



UM PROBLEMA DE CORTE COM PADRÕES COMPARTIMENTADOS*

Robinson Hoto

*Universidade Estadual de Londrina, CCE, Departamento de Matemática
Campus Universitário, Londrina, PR, Brasil – hoto@uel.br*

Fabiano Marques

*Universidade de São Paulo, ICMC, Departamento de Computação e Estatística
Campus Universitário, São Carlos, SP, Brasil – araxa@icmc.sc.usp.br*

Nelson Maculan

*Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Engenharia de Sistemas e Computação
Ilha do Fundão, Rio de Janeiro, RJ, Brasil – maculan@cos.ufrj.br*

Marcos Arenales

*Universidade de São Paulo, ICMC, Departamento de Computação e Estatística
Campus Universitário, São Carlos, SP, Brasil – arenales@icmc.sc.usp.br*

Resumo

Neste artigo apresentaremos a aplicação do Problema da Mochila Compartimentada (PMC) no Problema de Corte de Bobinas de Aço (PCBA), que é um problema de corte em duas etapas com restrições especiais de agrupamento dos itens. O PMC consiste em construir compartimentos de capacidades desconhecidas em uma mochila de capacidade conhecida, tendo em vista que os itens de interesse estão agrupados em subconjuntos, de modo que, itens de um agrupamento não podem ser combinados com itens de outro. Para entender melhor o PMC admita que a mochila de um alpinista deve ser composta por um número ideal de compartimentos com itens de quatro categorias (remédios, alimentos, ferramentas, roupas), porém, itens de categorias distintas não podem ser combinados para formar um mesmo compartimento, além do mais, são desconhecidas as capacidades ideais de cada compartimento da mochila.

Palavras Chave: Corte e empacotamento; Padrões compartimentados; Mochila compartimentada

Abstract

In this paper we will present the application of the Compartmented Knapsack Problem (CKP) in the Cut Problem of Steel Rolls (CPSR), that it is a problem of cut in two stages with restrictions special of grouping of items. The CKP consists of constructing compartments of unknown capacities in a knapsack of known capacity, in view of that items of interest is grouped in subgroups, in mode that, items of a grouping cannot be matched with items of another one. To understand the CKP more good it admits that the knapsack of a alpinist must be composite for an ideal number of compartments with items of four categories (remedies, foods, tools, clothes), however, items of distinct categories cannot be matched to form one same compartment, in addition, is unknown the ideal capacities of each compartment of the knapsack.

Keywords: Cutting and packing problem; Compartmented pattern; Compartmented knapsack

1. Introdução

* Artigo submetido a apreciação na Revista Pesquisa Operacional



Padrões de corte compartimentados são comuns em empresas do ramo da metalurgia que necessitam efetuar laminação a frio do aço que é acondicionado em bobinas. Estas bobinas do estoque são identificadas pelo seu “peso” (varia de 12.000 Kg a 13.500 Kg), sua largura (varia de 1000 mm a 1300 mm), espessura do aço (varia de 0,90 mm a 6,30 mm) e pelo teor de carbono na liga, que determinará a dureza do aço. A demanda é composta por fitas de especificações determinadas (largura, espessura e tipo de aço) que devem ser cortadas de uma bobina do estoque e, devido a razões técnicas, a maioria destas fitas precisam ter a espessura do aço reduzida por meio de laminação. A laminação é feita com “cilindros de laminação” que efetuam pressão sobre a lâmina de aço em temperatura ambiente (laminação a frio, figura 1). Devido a limitações técnicas, a máquina de laminação não pode processar a largura total de uma bobina do estoque, além do mais, existem vários conjuntos de fitas com reduções de espessura de aço distintas, de modo que, devem ser definidas bobinas intermediárias com larguras admissíveis pelo laminador e compostas de fitas compatíveis entre si. Estas bobinas intermediárias são cortadas de uma bobina em estoque e, delas são recortadas as fitas, de modo que, os padrões de corte devem ser estruturados em compartimentos, cujos tamanhos devem ser determinados.

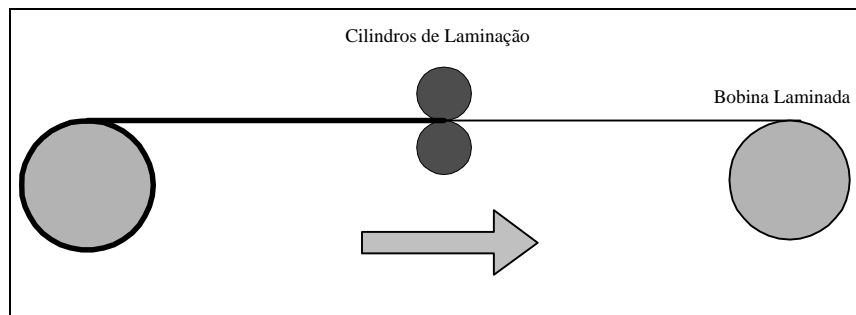


Figura 1. Laminação a frio do aço de uma bobina

Na figura 2 ilustramos o processo de corte com um padrão compartimentado. Suponha que o aço da bobina tenha 1,20 mm de espessura e que as fitas da primeira bobina intermediária precisem ser laminadas a uma espessura de 1,00 mm, enquanto, as da segunda bobina intermediária devem ser laminadas a uma espessura de 0,90 mm, ou numa outra situação não serem laminadas.

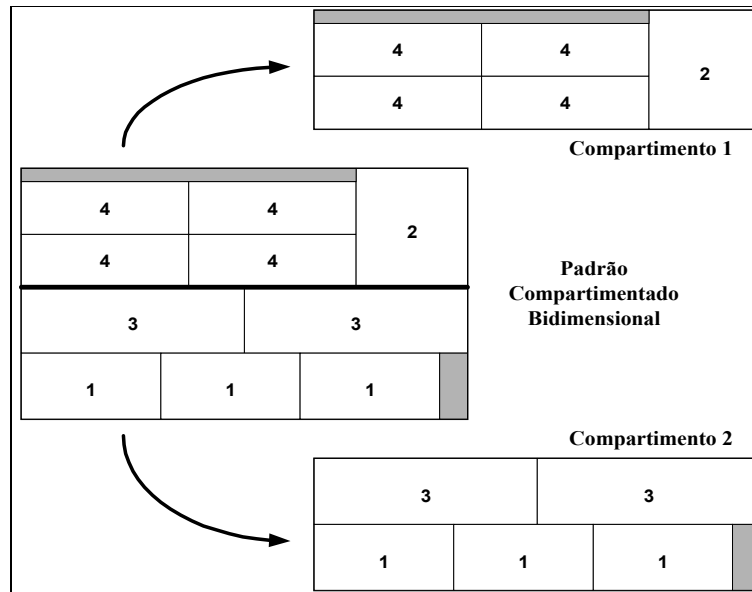


Figura 3. Padrão de corte compartmentado bidimensional

O corte de bobinas de aço é um exemplo onde aparecem padrões compartmentados unidimensionais, pois, alguns itens devem sofrer laminações distintas, neste caso é preciso definir compartimentos que são denominados bobinas intermediárias (figura 2).

A grande dificuldade na construção de um padrão compartmentado, unidimensional ou bidimensional, está no fato de não conhecermos as dimensões dos compartimentos que devem compor o padrão, ao mesmo tempo, é preciso determinar quais compartimentos e em quais quantidades constituirão o padrão. Hoto (2001) e Hoto *et al.* (1996, 1996, 1998) descrevem padrões compartmentados por meio de um Problema da Mochila Compartimentada (PMC) (Hoto *et al.*, 1999, 2002), que é uma nova variação do clássico Problema da Mochila. Marques (2000) e Marques e Arenales (2000) estudaram o caso restrito do PMC e apresentaram alguns procedimentos heurísticos.

3. A abordagem de Geração de Colunas no Corte de Bobinas de Aço

Na resolução do corte de bobinas de aço sujeitas a laminação adotamos a Técnica de Geração de Colunas de Gilmore-Gomory (1961, 1963). Nosso objetivo consiste em minimizar os custos associados às perdas lineares de aço numa bobina, e custos por utilização de compartimentos, além de examinar as limitações do estoque. Considere as definições dadas a seguir:

Dados das Bobinas

- m total de tipos de bobinas em estoque;
- P^r “peso” (a massa) da bobina (objeto) $r = 1, \dots, m$ (Kg);
- L^r largura da bobina (objeto) $r = 1, \dots, m$ (mm);
- e^r disponibilidade da bobina (objeto) $r = 1, \dots, m$ (unidades de bobinas);
- $c_{aço}^r$ custo linear do aço da bobina (objeto) $r = 1, \dots, m$ (\$/unidade de comprimento);



- T_j^r perda linear de aço na bobina (objeto) $r = 1, \dots, m$, segundo o padrão compartimentado j (unidades de comprimentos);

Dados das Fitas

- n total de tipos de itens;
- ℓ_i largura da fita (item) $i = 1, \dots, n$ (mm);
- d_i demanda solicitada da fita (item) $i = 1, \dots, n$ (Kg);

Dados das Bobinas Intermediárias

- c_{hj}^r custo operacional da bobina intermediária (compartimento) h na bobina r , segundo o padrão compartimentado j (\$/unidade do compartimento h);
- H_{jr} total de tipos de bobinas intermediárias (compartimentos) na bobina r , segundo o padrão compartimentado j (unidades de compartimentos);

Variáveis

- y_{hj}^r número de bobinas intermediárias (compartimentos) h na bobina r , segundo o padrão compartimentado j (unidades de compartimentos);
- x_j^r número de bobinas utilizadas do tipo r , segundo o padrão compartimentado j (unidades de bobinas);
- a_{ij}^r número de fitas (itens) tipo i na bobina r , segundo o padrão compartimentado j (unidades de fitas);

Padrões

- p_r total de padrões compartimentados viáveis para bobinas do tipo r ;

O modelo matemático que formulamos para resolver o problema é escrito a seguir:

$$\text{minimizar } \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^{p_r} \left(c_{aço}^r T_j^r + \sum_{h=1}^{H_{jr}} (c_{hj}^r y_{hj}^r) \right) x_j^r \quad (1.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^{p_r} \frac{p_r}{L^r} \ell_i a_{ij}^r x_j^r = d_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

$$\begin{matrix} \sum_{j=1}^{p_1} x_j^1 & \leq e^1 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{p_m} x_j^m & \leq e^m \end{matrix} \quad (1.3)$$

$$x_j^r \geq 0, \text{ e inteiro } r = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p_r \quad (1.4)$$



O subproblema gerador de colunas do problema (1.1 – 1.4) é escrito como:

$$\text{minimizar } - \left(\sum_{h=1}^{H_{jr}} \left(\sum_{i=1}^n u_i a_{ih}^{jr} \right) - c_h \right) y_{hj}^r + \left(c_{aço}^r (L^r - S_1) - \pi_{n+r} \right)$$

sujeito a coluna a_k^r de coeficientes a_{ih}^{jr} representar um padrão de corte
compartimentado para o Corte de Bobinas de Aço sujeitas a Laminação

No gerador de colunas $u_i = (c_{aço}^r + \pi_i \frac{P^r}{L^r}) \ell_i$ e $c_h = c_{hj}^r - c_{aço}^r S_2$, os parâmetros S_1 e S_2 são perdas técnicas intrínsecas ao problema e π_i é o multiplicador Simplex.

4. Arredondamento da Solução e Fracionamento do Estoque

O procedimento consiste em resolver o modelo (1.1 – 1.4) relaxando a condição de integralidade da variável x_j^r . A seguir, truncamos (arredondamos para baixo) a solução obtida. Um problema residual é formulado a partir da demanda remanescente e resolvido, de modo que, este processo é repetido até que o arredondamento forneça uma solução residual nula. Ao final, é bem possível que uma pequena demanda ainda deva ser atendida, isto é feito por meio de uma heurística que gera padrões restritos, que também é utilizada nos problemas residuais.

Seja $x^r = (x_1^r, \dots, x_{p_r}^r)^T$, $r = 1, \dots, m$. Observe que $A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_m x^m = d$, e que $I x^r \leq e^r$, onde $A_r = (\alpha_{ij}^r)_{n \times p_r}$ e $I = (1, \dots, 1)_{p_r}$, $r = 1, \dots, m$.

Sejam x_0^r a solução contínua do problema (1.1 – 1.4) e $\lfloor x_0^r \rfloor$ o arredondamento para baixo desta solução (maior inteiro menor ou igual a x_0^r), $r = 1, \dots, m$. Considere $d_0 = d$ a demanda inicial e $e_0^r = e^r$, $r = 1, \dots, m$, a disponibilidade inicial do estoque. Para $q = 1, \dots, Q$, os Problemas Residuais, com soluções contínuas x_q^r , são definidos como:

$$\text{minimizar } c^1 x^1 + \dots + c^m x^m \tag{2.1}$$

sujeito a:

$$A_1 x^1 + \dots + A_m x^m = d_q, \text{ onde}$$

$$d_q = d_{q-1} - \left(A_1 \lfloor x_{q-1}^1 \rfloor + \dots + A_m \lfloor x_{q-1}^m \rfloor \right) \tag{2.2}$$

$$I x^r \leq e_{q-1}^r - \left\| \lfloor x_{q-1}^r \rfloor \right\|_1, \quad r = 1, \dots, m \tag{2.3}$$

$$x^r \geq 0, \quad r = 1, \dots, m \tag{2.4}$$



No objetivo do modelo (2.1 – 2.4) $c^r = (c_1^r, \dots, c_{p_r}^r)$ e $c_j^r = c_{aço}^r T_j^r + \sum_{h=1}^{H_{jr}} (c_{h,j}^r y_{h,j}^r)$, $j=1, \dots, p_r$, $r=1, \dots, m$. Na inequação 2.3 $\| \lfloor x_{q-1}^r \rfloor \|_1$ é a norma 1 do vetor $\lfloor x_{q-1}^r \rfloor$. O total Q de Problemas Residuais a serem resolvidos é determinado quando $\| \lfloor x_{Q-1}^r \rfloor \|_1 = 0$.

Ressaltamos que a medida que os Problemas Residuais são resolvidos as demandas vão diminuindo, por conseqüência, os padrões compartimentados destes problemas devem ser restritos.

Após a resolução de todos os Problemas Residuais, ainda poderá existir uma demanda residual que é atendida por uma heurística de repetição exaustiva (Hinxman, 1980) com padrões compartimentados restritos.

Em visita a uma empresa do setor descobrimos que as bobinas em estoque poderiam ser fracionadas em duas outras bobinas, cujos “pesos” são exatamente a metade do “peso” da bobina original. Por exemplo, uma bobina do estoque que tenha 12.000 Kg poderia ser fracionada em duas de 6.000 Kg.

Assim, o arredondamento das soluções contínuas dos Programas de Programação Linear, usados no Corte de Bobinas de Aço sujeitas a Laminação, pode ser feito por meio da seguinte função:

$$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \cup \Omega, \text{ onde } \Omega = \left\{ n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lfloor x \rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + 0.5, & \text{se } x - \lfloor x \rfloor \geq 0.5 \\ \lfloor x \rfloor, & \text{se } x - \lfloor x \rfloor < 0.5 \end{cases}$$

Observe que ao utilizarmos a função de arredondamento $\lfloor \cdot \rfloor$, surgirão em estoque bobinas fracionadas, de modo que, ao arredondarmos uma solução torna-se necessário identificarmos se o tipo de bobina em questão já sofreu fracionamento. Caso a bobina em questão tenha sofrido o fracionamento ela não poderá ser novamente fracionada, e o arredondamento deverá ser feito pela função $\lfloor x \rfloor$ (maior inteiro menor ou igual a x).

5. Resultados Computacionais

As implementações foram feitas em Delphi e executadas num pentium II, 450 Mhz com 160 Mb de RAM. Para construir um padrão compartimentado irrestrito implementamos os procedimentos COMPEX e COMPMT (Hoto, 2001) e (Hoto *et al.*, 2002) que resolvem o Problema da Mochila Compartimentada Irrestrito. Para os padrões compartimentados restritos implementamos os procedimentos COMPREST e COMPRESTMT (Hoto, 2001). Assim, para resolver um exemplo do PCBA determinamos quatro combinações (todas heurísticas):

• **combinação 1**

COMPMT para padrões irrestritos
COMPRESTMT para padrões restritos

• **combinação 2**

COMPMT para padrões irrestritos
COMPREST para padrões restritos

• **combinação 3**

COMPEX para padrões irrestritos

• **combinação 4**

COMPEX para padrões irrestritos



COMPRESTMT para padrões restritos

COMPREST para padrões restritos

Na tabela 1 apresentamos os resultados numéricos que obtivemos na resolução de 21 exemplos gerados aleatoriamente, cujos dados foram baseados nas condições práticas do problema. As larguras foram geradas com valores distribuídos entre 55 mm e 250 mm.

Como estoque utilizamos três tipos de bobinas: com largura de 900 mm, de 1100 mm e de 1200 mm, todas elas com 12.000 Kg. A capacidade do laminador está compreendida entre os valores 154 mm e 456 mm. O custo de bobinas intermediárias sujeitas à laminação foi considerado 50% maior que o de bobinas intermediárias isentas deste processo.

Nas colunas **Agrup**, **Comp** e **Iens** estão registrados respectivamente o número de agrupamentos, o número total de compartimentos e o número de itens de cada exemplo. Cada exemplo foi examinado segundo as quatro combinações possíveis, de forma que, foi medido o tempo de execução em minutos, segundos e milissegundos (**coluna Tempo**), a perda de material (**coluna Perda**) e o número de bobinas intermediárias no processo (**coluna Bobint**).

Dados do Exemplo		Combinação 1 COMPMT COMPRESTMT			Combinação 2 COMPMT COMPREST			Combinação 3 COMPEX COMPRESTMT			Combinação 4 COMPEX COMPREST			
Agrup	Comp	Itens	Tempo	Perda	Bobint	Tempo	Perda	Bobint	Tempo	Perda	Bobint	Tempo	Perda	Bobint
5	1515	32	00:22:410	---	773	01:39:410	---	768	01:57:210	---	581	05:47:890	---	579
		32	00:41:630	0,70%	748	03:11:800	0,70%	738	02:14:290	---	562	04:25:400	0,01%	545
		27	00:27:580	0,51%	711	01:08:660	0,51%	704	01:33:430	---	506	04:39:410	---	511
		32	00:57:290	0,58%	784	02:06:880	0,58%	788	01:32:000	---	696	03:25:870	---	686
		35	00:42:240	1,17%	807	02:07:420	1,19%	791	01:48:480	---	601	05:43:170	---	588
10	3030	62	01:40:350	0,04%	1472	10:28:180	---	1470	05:26:260	---	1268	16:34:650	0,02%	1275
		62	02:05:230	---	1318	10:02:420	0,01%	1330	03:50:080	---	1296	19:52:870	0,05%	1275
		52	01:32:270	0,08%	1233	10:21:700	---	1231	05:08:900	---	1198	10:38:830	---	1209
		60	02:30:440	0,38%	1492	12:41:260	0,39%	1481	04:21:340	---	1162	10:13:470	---	1173
		57	00:44:000	0,99%	1347	05:57:340	0,99%	1380	05:25:650	--	1111	16:15:750	0,03%	1084
15	4545	67	01:48:200	---	1577	06:22:330	---	1586	06:18:770	---	1341	14:10:960	0,01%	1347
		85	03:10:980	---	2014	14:43:470	---	2007	13:27:240	---	1556	29:43:870	---	1583
		82	02:37:800	0,67%	1948	15:24:400	0,67%	1957	07:49:880	---	1545	09:26:280	---	1538
		82	04:02:380	0,02%	2146	04:46:980	---	2126	09:31:280	---	1634	20:06:720	0,01%	1648
		75	02:24:340	2,77%	1676	17:29:410	0,77%	1663	08:53:770	---	1442	14:40:180	---	1431
20	6060	95	04:18:530	1,04%	2144	11:41:840	1,07%	2146	21:16:080	0,01%	1983	33:59:110	---	1989
		110	06:54:200	1,24%	2495	23:14:950	1,25%	2501	30:23:470	---	1987	38:21:380	---	1974
		120	07:23:250	4,12%	2675	41:31:640	4,18%	2674	26:38:990	---	2568	49:17:680	---	2581
		102	03:27:350	1,22%	2286	24:45:400	1,22%	2312	13:04:830	---	2175	29:05:480	---	2216
		100	08:04:990	0,01%	2482	14:24:960	---	2460	12:59:390	---	2029	30:34:180	---	2071
30	9090	142	17:15:180	---	3618	38:28:740	---	3602	32:03:770	0,01%	3200	61:07:010	---	3218

Tabela 1. Resultados numéricos de exemplos aleatórios

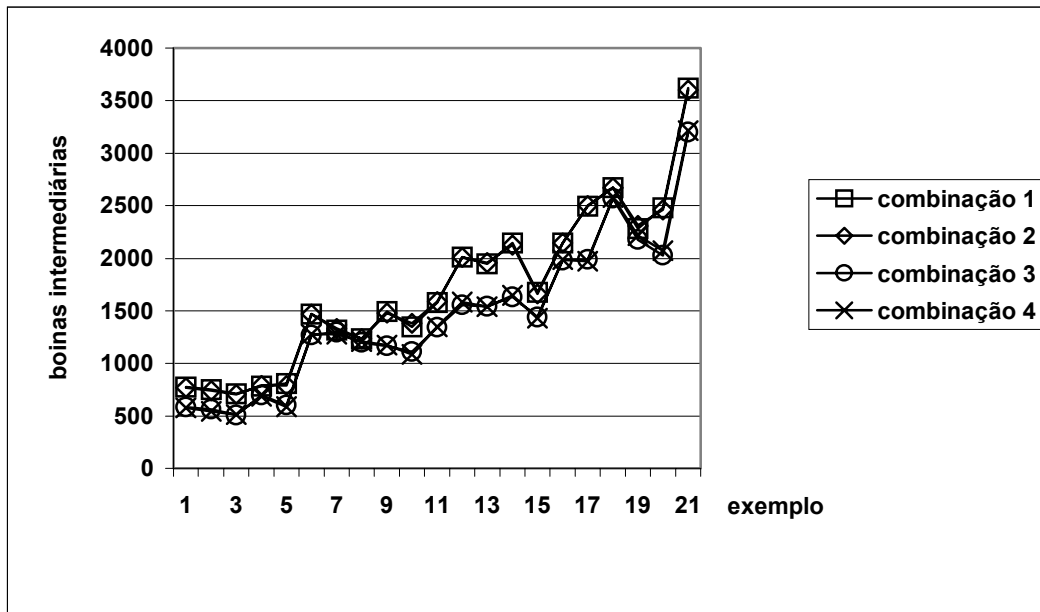


Figura 4. Gráfico da evolução do número de bobinas intermediárias para cada combinação

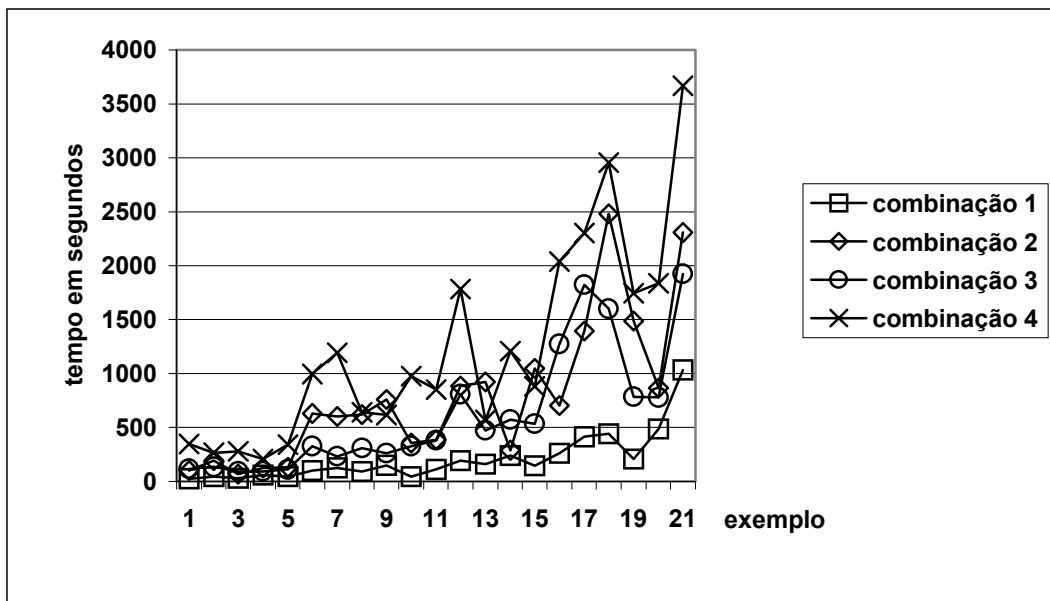


Figura 5. Gráfico da evolução do tempo de execução para cada combinação

Observe pelo gráfico da figura 4 que as combinações 1 e 2 são praticamente equivalentes quanto ao número de bobinas intermediárias, ocorrendo o mesmo com as combinações 3 e 4. No gráfico da figura 5 podemos observar que a combinação que requer menor tempo de execução na maioria dos exemplos é a combinação 1, porém, o número de bobinas intermediárias é bem superior se comparados com os obtidos pela combinação 4, que requer um tempo de execução mais elevado.



Fitas	Largura	Espessura Inicial	Espessura Final	Tipos de Aço	Demandas
tipo 1	200 mm	2,00 mm	1,10 mm	SAE 1008	50.000 Kg
tipo 2	230 mm	2,00 mm	1,10 mm	SAE 1008 ou SAE 1010	55.000 Kg
tipo 3	90 mm	2,00 mm	1,10 mm	SAE 1008	60.000 Kg
tipo 4	115 mm	2,00 mm	1,20 mm	SAE 1008	57.500 Kg
tipo 5	105 mm	2,00 mm	1,10 mm	SAE 1010	63.000 Kg
tipo 6	105 mm	1,50 mm	0,90 mm	SAE 1010 ou SAE 1012	47.000 Kg
tipo 7	200mm	1,50 mm	0,90 mm	SAE 1012	71.000 Kg
tipo 8	120 mm	1,50 mm	0,90 mm	SAE 1010 ou SAE 1012	54.000 Kg
tipo 9	90 mm	2,00 mm	2,00 mm	SAE 1008	53.800 Kg
tipo 10	70 mm	2,00 mm	2,00 mm	SAE 1008	70.200 Kg
tipo 11	65 mm	2,00 mm	2,00 mm	SAE 1008 ou SAE 1010	61.000 Kg
tipo 12	105 mm	2,00 mm	2,00 mm	SAE 1008	50.000 Kg
tipo 13	135 mm	1,00 mm	1,00 mm	SAE 1010 ou SAE 1012	55.550 Kg
tipo 14	205 mm	1,00 mm	1,00 mm	SAE 1010	48.600 Kg
tipo 15	125 mm	1,00 mm	1,00 mm	SAE 1010	49.000 Kg
tipo 16	115 mm	1,00 mm	1,00 mm	SAE 1010	52.500 Kg
tipo 17	180 mm	1,00 mm	1,00 mm	SAE 1010	63.000 Kg
tipo 18	53 mm	1,50 mm	1,50 mm	SAE 1010 ou SAE 1012	60.500 Kg
tipo 19	105 mm	1,50 mm	1,50 mm	SAE 1012	58.200 Kg
tipo 20	90 mm	1,50 mm	1,50 mm	SAE 1010 ou SAE 1012	54.500 Kg

Tabela 2. Um exemplo extraído de dados reais

Para finalizar, apresentamos os resultados obtidos para um conjunto de 20 itens extraídos de dados reais. Os agrupamentos dos itens são: $N_1 = \{1, 2, 3\}$, $N_2 = \{4\}$, $N_3 = \{5\}$, $N_4 = \{6, 7, 8\}$, $N_5 = \{9, 10, 11, 12\}$, $N_6 = \{13, 14, 15, 16, 17\}$ e $N_7 = \{18, 19, 20\}$. Na tabela 2 estão os resumidos os dados do problema e na tabela 3 os resultados obtidos.

Dados do Exemplo			Combinação 1 COMPMT COMPRESTMT			Combinação 2 COMPMT COMPREST			Combinação 3 COMPEX COMPRESTMT			Combinação 4 COMPEX COMPREST		
Agrup	Comp	Itens	Tempo	Perda	Bobint	Tempo	Perda	Bobint	Tempo	Perda	Bobint	Tempo	Perda	Bobint
7	2121	20	0:11:320	0,77%	341	00:12:200	0,77%	342	00:33:230	0,25%	319	00:39:710	0,25%	325

Tabela 3. Solução do exemplo da tabela 2

6. Conclusões

Neste artigo abordamos o Problema de Corte de Bobinas de Aço (PCBA), cujos padrões devem ser estruturados em compartimentos. Fizemos uma revisão dos trabalhos que abordam problemas desta natureza e, apresentamos o Problema da Mochila Compartimentada (PMC) como o modelo gerador de padrões compartimentados unidimensionais.

Para o PMC são conhecidos dois algoritmos (COMPEX e COMPMT) e, para o caso restrito do PMC os algoritmos (COMPREST e COMPRESTMT).

Utilizamos a Técnica de Geração de Colunas de Gilmore-Gomory para resolver o PCBA e, baseado nos resultados computacionais obtidos, os algoritmos COMPEX (para gerar padrões do



caso irrestrito) e COMPRESTMT (para gerar padrões do caso restrito) resultam numa boa estratégia.

Agradecimentos

Este trabalho teve apoio da FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa de São Paulo, da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, do Ministério da Educação Brasileira e do CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, do Ministério da Educação Brasileira.

Ao Professor Nei Yoshihiro Soma do Instituto Tecnológico de Aeronáutica do Brasil, nossos sinceros agradecimentos pelas excelentes observações, e pela cooperação nas implementações.

Referências

- J. M. V. Valério de CARVALHO (1991). Um problema de corte em duas fases. *Tese de Doutorado*, Universidade do Minho, Portugal.
- J. M. V. Valério de CARVALHO and A. J. G. RODRIGUES (1994). A computer based interactive approach to a two-stage cutting-stock problem. *INFOR*, 32(4), 243-252.
- J. M. V. Valério de CARVALHO and A. J. G. RODRIGUES (1995). An LP-based approach to a two-stage cutting-stock problem. *European Journal of Operational Research*, 84, 580-589.
- J. S. FERREIRA, M. A. NEVES and P. F. CASTRO (1990). A two-phase roll cutting problem. *European Journal of Operational Research*, 44, 185-196.
- P. C. GILMORE and R. E. GOMORY (1961). A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem, *Operations Research*, 9, 849-859.
- P. C. GILMORE and R. E. GOMORY (1963). A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem, part II, *Operations Research*, 14, 94-120.
- P. C. GILMORE and R. E. GOMORY (1966). The theory and computation of knapsack functions. *Operations Research*, 14, 1045-1074.
- R. W. HAESSLER (1975). "Controlling cutting pattern changes in one dimensional trim problems." *Operations Research*, 23(3), 483-493.
- R. W. HAESSLER (1979). Solving the two-stage cutting-stock problem. *Omega, The International Journal of Management Science*, 7(2), 145-151.
- R. W. HAESSLER (1980). "A note on computational modifications to the Gilmore-Gomory cutting stock algorithm." *Operations Research*, 28(4), 1001-1005.
- A. I. HINXMAN (1980). "The trim-loss and assortment problems: a survey." *European Journal of Operational Research*, 5, 8-18.
- R. HOTO (1996). Otimização no Corte de Peças Unidimensionais com Restrições de Agrupamento. *Dissertação de Mestrado*, ICMSC-USP, São Carlos, S.P., Brasil.
- R. HOTO (2001). O Problema da Mochila Compartimentada aplicado no Corte de Bobinas de Aço. *Tese de Doutorado*, COPPE-Sistemas/UFRJ, Rio de Janeiro, R.J., Brasil.
- R. HOTO e M. ARENALES (1996). "Um problema de corte unidimensional com restrições de agrupamento e aplicações industriais." *ION PCE*, IME-USP, São Paulo, S.P., Brasil.
- R. HOTO e M. ARENALES (1997). O problema do corte em bobinas de aço. *XX CNMAC*, Gramado, R.S., Brasil.
- R. HOTO, M. N. ARENALES e N. MACULAN (1999). O Problema da Mochila Compartimentada. *Relatório Técnico*, Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, P.R., Brasil.



- R. HOTO, N. MACULAN e M. N. ARENALES (1998). O problema do corte em bobinas de aço via geração de colunas. *XXX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Curitiba, P.R., Brasil, 267-268.
- R. HOTO, N. MACULAN, M. N. ARENALES e F. P. MARQUES (2002). Um novo procedimento para o cálculo de mochilas compartimentadas. *Pesquisa Operacional*, Lisboa, Portugal, (*artigo a ser publicado*).
- R. E. JOHNSTON and L. R. KHAN (1995). Bounds for nested knapsack problems. *European Journal of Operational Research*, 81, 154-165.
- E. Yu-Hsien LIN (1998). A bibliographical survey on some well-known non-standard knapsack problems. *INFOR*, 36(4), 274-317.
- F. P. MARQUES (2000). O Problema da Mochila Compartimentada. *Dissertação de Mestrado*, ICMC-USP, São Carlos, S.P., Brasil.
- F. P. MARQUES e M. N. ARENALES (2000). “O problema da mochila compartimentada.” *XXXII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Viçosa, M.G., Brasil, 803-816.
- S. MARTELLO and P. TOTH (1990). *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*. John Wiley & Sons, Chichester.
- M. A. PEREIRA (1993). *Uma abordagem matemática para o problema de corte e laminação de fitas de aço*. Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, São Paulo, Brasil.
- D. PISINGER (1995). Algorithms for knapsack problems. *Ph.D. Thesis*, Department of Computer Science, University of Copenhagen, Copenhagen, Denmark.
- H. SUZUKI (1978). A generalized knapsack problem with variable coeficientes. *Mathematical Programming*, 15, 162-176.
- H. STADTLER (1990). “A one dimensional cutting-stock problem in the aluminium industry and its solution.” *European Journal of Operational Research*, 44, 209-223.
- N. Y. SOMA and P. TOTH (1999). “On the critical item for subset sum problems.” *Revista Pesquisa Operacional – SOBRAPO*, 19(2), 279-283.
- N. Y. SOMA, H. H. YANASSE and N. MACULAN (1997). O problema da mochila. *O Problema de Corte e Empacotamento e Aplicações Industriais*, 2.a Oficina Nacional de PCE, XX CNMAC, Gramado, R.S., 24-58.
- N. Y. SOMA, H. H. YANASSE, A. S. I. ZINOBER and P. J. HARLEY (1995). A polynomial approximation scheme for the subset sum problem. *Discrete Applied Mathematics*, 57, 243-253.
- G. WÄSCHER and T. GAU (1996). “Heuristics for the integer one dimensional cutting-stock problem: a computacional study.” *OR Spektrum*, 18, 131-144.
- H. H. YANASSE, N. Y. SOMA (1987). A new enumeration scheme for the knapsack problem. *Discrete Applied Mathematics*, 18, 235-245.
- H. H. YANASSE, N. Y. SOMA and N. MACULAN (2000). An algorithm for determining the k-best solutions of one-dimensional knapsack problem. *Pesquisa Operacional*, 20(1), 117-134.