



DUAS ABORDAGENS PARA O PROBLEMA INTEGRADO DE GERAÇÃO E SEQUENCIAMENTO DE PADRÕES DE CORTE

Gisele C. F. Pileggi

Departamento de Ciências de Computação e Estatística
ICMC - USP - São Carlos, SP
gpileggi@icmc.sc.usp.br

Reinaldo Morabito

Departamento de Engenharia de Produção
UFSCar - São Carlos, SP
morabito@power.ufscar.br

Marcos N. Arenales

Departamento de Ciências de Computação e Estatística
ICMC - USP - São Carlos, SP
arenales@icmc.sc.usp.br

Resumo

Este trabalho apresenta duas abordagens heurísticas para resolver de forma integrada os problemas de geração e seqüenciamento de padrões de corte, que permitem realizar análises de *tradeoff* entre a perda e o número máximo de pilhas abertas. A primeira abordagem é baseada em um procedimento iterativo que resolve alternativamente os problemas de geração e seqüenciamento de padrões, enquanto a segunda utiliza o método simplex com um procedimento de geração de colunas factíveis do ponto de vista do seqüenciamento dos padrões. O desempenho das duas abordagens é ilustrado resolvendo-se problemas de corte unidimensionais e bidimensionais guilhotinados em dois estágios.

Palavras-chave: problema de corte, problema de seqüenciamento de padrões, análise de *tradeoff*.

Abstract

This study presents two integrated approaches to deal with the generation and sequencing of cutting patterns, which allow a trade-off analysis between the trim loss and the maximum number of open stacks. The first approach is based on an iterative procedure that alternatively solves the problems of generating and sequencing patterns, whereas the second utilizes the simplex method with a feasible column generation procedure from the point of view of pattern sequencing. The performance of the approaches is illustrated solving one-dimensional and two-dimensional guillotine 2-stage cutting problems.

Key-words: cutting problem, cutting pattern sequencing, tradeoff analysis.

1. Introdução

Problemas de corte consistem em determinar a “melhor” forma de cortar unidades maiores (objetos) para produzir um conjunto de unidades menores (itens) de maneira a otimizar algum critério, por exemplo, minimizar a perda de material. Em certos processos industriais, os objetos são cortados em padrões (um padrão de corte descreve como arranjar itens dentro de um objeto) que precisam ser antes seqüenciados de maneira a otimizar algum critério, por exemplo, minimizar o número máximo de itens (pilhas) abertos durante o corte dos padrões. Em geral ambos os problemas de corte e





$$\text{Maximizar} \quad f(a) = \sum_{i=1}^M \lambda_i a_i \quad (4)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^M l_i a_i \leq L \quad (5)$$

$$a_i \geq 0 \text{ e inteiro} \quad i = 1, \dots, m \quad (6)$$

onde λ_i corresponde ao multiplicador *simplex* associado à restrição de demanda do item i (λ_i pode ser entendido como uma tendência de variação de f em relação à demanda de cada unidade pequena), a_i é a quantidade de itens do tipo i , l_i é o comprimento do item do tipo i e L é o comprimento do objeto.

3. O Problema de Seqüenciamento de Padrões

Conforme mencionado na seção 1, em alguns processos industriais, por exemplo em fábricas de vidro, móveis e chapas duras, a ordem na qual os padrões de corte são produzidos é importante; logo, é preciso resolver um problema de seqüenciamento de padrões. Alguns trabalhos tratando este problema podem ser encontrados em Yuen (1995), Yanasse (1997), Faggioli e Bentivoglio (1998), Fink e Vo (1999) e Ashikaga (2001). Diferentes objetivos podem ser de interesse no seqüenciamento de padrões.

Neste trabalho, o objetivo é determinar uma seqüência que minimize o número máximo de pilhas abertas durante o processamento dos padrões – *MOSP* (do inglês *minimization of open stack problem*). Quando o corte de um padrão é iniciado, diferentes tipos de itens são produzidos. A cada tipo de item cortado uma pilha nova é associada. Uma pilha é considerada aberta se a produção de um item foi iniciada, mas ainda não terminou. A mesma permanece aberta até que o último padrão que contenha este item seja processado. Uma formulação matemática para o *MOSP* foi proposta em Pinto e Yanasse (2000) com o objetivo de minimizar a troca de pilhas sujeito à restrição de que o número máximo de pilhas abertas seja menor ou igual a um valor pré-estabelecido. A formulação proposta considera que as pilhas acabadas também podem ser removidas durante o processamento de um padrão.

4. Interação dos Problemas de Corte e de Seqüenciamento de Padrões

Problemas de corte e seqüenciamento são NP-difíceis; logo, combiná-los num único problema também resulta em um problema NP-difícil. Porém, em diversos sistemas produtivos, o problema de corte não pode ser resolvido independentemente do problema de seqüenciamento, e vice-versa. Suponha que o objetivo do problema de corte seja a minimização da perda (p_e) gerada pelo corte dos padrões, e o objetivo do problema de seqüenciamento seja a minimização do número máximo de pilhas abertas (p_i). Como na realidade existem dois problemas interdependentes com objetivos de importância equivalente (e na maioria das vezes conflitantes) a serem resolvidos, trata-se, portanto, de um problema bi-objetivo.

Existem diversos métodos para resolver problemas multi-objetivos (Steuer, 1986). No presente trabalho um método *a posteriori* é aplicado que consiste em minimizar a perda de material (p_e) sujeito à uma limitação (\hat{p}_i) para o número máximo de pilhas abertas (p_i). Variando-se a limitação de \hat{p}_i é possível gerar os pontos da fronteira eficiente (ou curva de *tradeoff*) entre os critérios de mínima perda e mínimo número máximo de pilhas abertas. Os pontos desta curva correspondem às soluções eficientes ou dominantes no sentido que dominam todas as outras possíveis soluções do problema do ponto de vista de perda e número máximo de pilhas abertas. Para ilustrar esta discussão, a figura 1 abaixo apresenta uma *curva de tradeoff* entre a perda e o número máximo de pilhas abertas, onde:

$\underline{p_e}$ = perda mínima (solução ótima da relaxação linear do problema (1)-(3))

$\hat{p_e}$ = perda tolerada satisfazendo $\underline{p_e} \leq \hat{p_e} \leq \overline{p_e}$ (tolerância definida pelo usuário)

$\overline{p_e}$ = perda máxima (solução obtida utilizando padrões homogêneos)



\hat{p}_i



4.1 Abordagem 1

Na *Abordagem 1* inicialmente o problema de corte é resolvido sem nenhuma restrição adicional (a não ser as do problema de corte), utilizando o método simplex com um procedimento de geração de colunas. Note que o conjunto de padrões obtido, com perda $pe = \underline{pe}$, é ótimo do ponto de vista de perda. O problema de seqüenciamento é então resolvido a partir do conjunto de padrões de perda mínima, utilizando a heurística 3 de Yuen (1995). A seqüência com menor número máximo de pilhas abertas \hat{p}_i é selecionada e, em caso de empate, escolhe-se aleatoriamente uma das seqüências (dentre aquelas que apresentam o menor número máximo de pilhas abertas).

Se \hat{p}_i \hat{p}_i , a solução encontrada é ótima (sujeito à limitação \hat{p}_i para o número máximo de pilhas abertas). Caso contrário, isto é, se \hat{p}_i \hat{p}_i , então esta solução é infactível do ponto de vista da limitação \hat{p}_i , e é então factibilizada da seguinte maneira: dentre o conjunto de padrões de corte gerado, escolhe-se um ou mais padrões que, ao serem substituídos por padrões homogêneos, satisfaçam \hat{p}_i \hat{p}_i . Desta maneira obtém-se uma solução factível mas com perda pe em geral maior do que \underline{pe} .

Se um número máximo de iterações ainda não tiver sido atingido, um padrão (escolhido dentre o conjunto de padrões gerado pela resolução do problema de corte) é nomeado "proibido", e o problema de corte é novamente resolvido utilizando o método simplex com um procedimento de geração de colunas que evite gerar padrões proibidos. O propósito da proibição é tentar obter um novo conjunto de padrões com uma solução que satisfaça \hat{p}_i \hat{p}_i (e com uma perda pe menor ou igual a menor perda obtida até então). Cada padrão proibido é mantido proibido por um certo número de iterações. O problema de seqüenciamento é então resolvido a partir do novo conjunto de padrões, utilizando a heurística 3 de Yuen. E assim por diante, o procedimento continua até que um certo número máximo de iterações seja atingido, ou que uma solução de perda mínima $pe = \underline{pe}$ satisfazendo \hat{p}_i \hat{p}_i seja encontrada (neste caso esta solução é ótima sujeito à limitação \hat{p}_i). Note que a *Abordagem 1* pode ser utilizada para gerar pontos da curva de *tradeoff*, simplesmente variando-se os valores de \hat{p}_i .

4.2 Abordagem 2

Na *Abordagem 2* os problemas de corte e seqüenciamento de padrões são resolvidos utilizando o método simplex com um procedimento de geração de colunas que considera a restrição do número máximo de pilhas abertas. Desta maneira, diferentemente da *Abordagem 1*, a solução do método simplex é sempre factível, isto é, cada conjunto de padrões de corte gerado, quando seqüenciado, satisfaz o número máximo de pilhas tolerado, \hat{p}_i .

Isto é realizado da seguinte maneira: no procedimento de geração de colunas só são consideradas as colunas que possuem custo relativo negativo, ou seja, que quando inseridas na base melhoram o valor da função objetivo. Para cada coluna com custo relativo negativo é avaliado se a entrada da mesma na base (seguida da saída de uma coluna da base) resultará em \hat{p}_i \hat{p}_i , ou seja, se esta coluna melhora o valor da função objetivo e se é factível do ponto de vista do seqüenciamento de padrões. Isto é realizado resolvendo-se um problema de seqüenciamento para cada coluna com custo negativo, utilizando a heurística 3 de Yuen. Note que a *Abordagem 2* pode ser utilizada para gerar pontos da curva de *tradeoff* simplesmente variando-se os valores de \hat{p}_i .

5. Resultados Computacionais

Foram realizados experimentos computacionais para avaliar o comportamento das duas abordagens propostas. Exemplos de problemas de corte unidimensionais e bidimensionais foram



gerados aleatoriamente para a realização dos testes. Os testes foram divididos em duas classes em função do número de tipos de itens, $m = 10$ e $m = 20$. Em cada classe foram gerados exemplos até se obter 50 exemplos ineficazes do ponto de vista do seqüenciamento, ou seja, com número máximo de pilhas abertas (obtido com o seqüenciamento do conjunto de padrões de corte gerado pelo método simplex) maior que o número máximo de pilhas abertas tolerado, \hat{p}_i .

Para os problemas unidimensionais e bidimensionais o número máximo de iterações utilizado na *Abordagem 1* foi fixado em 100 (testes anteriores indicaram que os resultados obtidos com o aumento do número de iterações não compensava o aumento do tempo computacional), e cada padrão proibido foi mantido proibido durante 3 iterações (outros valores também estão sendo pesquisados). O número máximo de pilhas abertas tolerado, \hat{p}_i , foi arbitrariamente fixado em 3. Nos problemas unidimensionais considerou-se um objeto de comprimento igual a 100. O comprimento e a demanda dos itens foram gerados aleatoriamente nos intervalos [10,75] e [1.000, 10.000], respectivamente. No caso bidimensional considerou-se um objeto de comprimento x largura igual a 100 x 100. O comprimento, a largura e a demanda dos itens foram gerados aleatoriamente nos intervalos [10,75], [10,75] e [1.000, 10.000], respectivamente.

Nas tabelas abaixo a coluna “*método de solução*” corresponde ao método utilizado para resolver os problemas de corte e seqüenciamento. A linha “*simplex com heurística 3*” corresponde à utilização do método simplex e a heurística 3 de Yuen para solução dos problemas de corte e seqüenciamento. Note que, nestes exemplos, isto não resulta numa solução com número de pilhas menor ou igual a 3 (veja discussão anterior sobre geração dos exemplos). Nas abordagens o procedimento de geração de colunas do método simplex utilizou o algoritmo lexicográfico para resolver os problemas da mochila envolvidos na geração dos padrões de corte unidimensionais e bidimensionais em até 2-estágios, conforme descrição em Gilmore e Gomory (1963, 1965). As colunas “*perda*”, “*pilha*” e “*tempo*” correspondem respectivamente à perda média (em porcentagem), ao número médio de pilhas aberto e ao tempo médio (em segundos) gasto por cada método. Os testes foram executados em um microcomputador Pentium IV com 512MB de memória RAM.

Inicialmente, nas tabelas 1 e 2 são apresentados os resultados para os 50 exemplos de problemas unidimensionais com $m = 10$ e $m = 20$.

Tabela 1: Resultados obtidos para os problemas unidimensionais com $m = 10$.

Método de Solução	Perda	Pilha	Tempo
Simplex com Heurística 3	4,79	4,16	0,00
Abordagem 1	4,91	3,00	0,54
Abordagem 2	5,06	3,00	0,00

Tabela 2: Resultados obtidos para os problemas unidimensionais com $m = 20$.

Método de Solução	Perda	Pilha	Tempo
Simplex com Heurística 3	4,71	5,20	0,00
Abordagem 1	6,10	3,00	73,26
Abordagem 2	5,87	3,00	2,42

Note que a *Abordagem 1* apresenta as menores médias para $m = 10$, seguida da *Abordagem 2*, enquanto a *Abordagem 2* apresenta as menores médias para $m = 20$, seguida da *Abordagem 1*. Convém salientar que essas perdas (4,91% e 5,06% para $m = 10$, e 6,10% e 5,87% para $m = 20$) são relativamente próximas dos limitantes inferiores (4,79% e 4,71%), o que indica que tais soluções são próximas das soluções ótimas dos problemas (para $m = 10$, menos de 0,13% e 0,27% para as abordagens 1 e 2, e para $m = 20$, menos de 1,40% e 1,17% para as abordagens 1 e 2, respectivamente). Observe que o tempo computacional aumenta conforme o número de tipos de itens aumenta, porém para a *Abordagem 1* este aumento é bem mais significativo.

As tabelas 3 e 4 abaixo apresentam os resultados obtidos para os problemas bidimensionais com $m = 10$ e $m = 20$ para os 50 exemplos. Note nas tabelas 3 e 4, que diferente dos experimentos unidimensionais, a *Abordagem 1* apresenta os melhores resultados, seguida da *Abordagem 3*. Assim como nos experimentos unidimensionais, o tempo da *Abordagem 1* aumenta significativamente de $m = 10$ para $m = 20$.



Tabela 3: Resultados obtidos para os problemas bidimensionais com $m = 10$.

Método de Solução	Perda	Pilha	Tempo
Simplex com Heurística 3	25,55	5,12	0,00
Abordagem 1	27,06	3,00	1,96
Abordagem 2	28,51	3,00	0,14

Tabela 4: Resultados obtidos para os problemas bidimensionais com $m = 20$.

Método de Solução	Perda	Pilha	Tempo
Simplex com Heurística 3	19,11	8,40	0,00
Abordagem 1	26,68	3,00	261,12
Abordagem 2	30,69	3,00	15,98

Note que a *Abordagem 1* apresenta resultados em média melhores do que a *Abordagem 2*, por outro lado consome maiores tempos computacionais. Observe que os tempos das duas abordagens aumentam significativamente de $m = 10$ para $m = 20$. Convém salientar que as perdas médias obtidas pelas abordagens para $m = 10$ (27,06% e 28,51%) são relativamente próximas do limitante inferior (25,55%), o que indica que tais soluções são próximas das soluções ótimas dos problemas (menos de 1,52% e de 2,97% para as abordagens 1 e 2, respectivamente). Por outro lado, para $m = 20$ (tabela 4) estas diferenças aumentam sensivelmente, o que em parte pode ser explicado pela necessidade de maior redução do número de pilhas (de 8,4 para 3 pilhas conforme tabela 4, quando antes era de 5,12 para 3 pilhas, conforme tabela 3).

Os experimentos acima foram realizados para $\hat{p}_1 = 3$. Um novo experimento foi realizado para avaliar o desempenho das duas abordagens para gerar curvas de *tradeoff* (variando-se os valores de \hat{p}_1). Tomou-se o primeiro exemplo unidimensional com $m = 10$ (figura 2) e o primeiro exemplo unidimensional com $m = 20$ (figura 3) e variou-se $\hat{p}_1 = 1, 5$ em cada exemplo (note que 5 é um limitante superior para estes exemplos, pois foi o número máximo de pilhas abertas obtidos pelo método simplex e a heurística 3). Apenas as soluções dominantes obtidas por cada abordagem estão representadas.

Observe nas figuras 2 e 3 que as abordagens 1 e 2 geram curvas bastante próximas, apesar da *Abordagem 1* encontrar uma solução com perda menor para $\hat{p}_1 = 2$ (figura 2). Já para $m = 20$ as duas abordagens geraram a mesma curva.

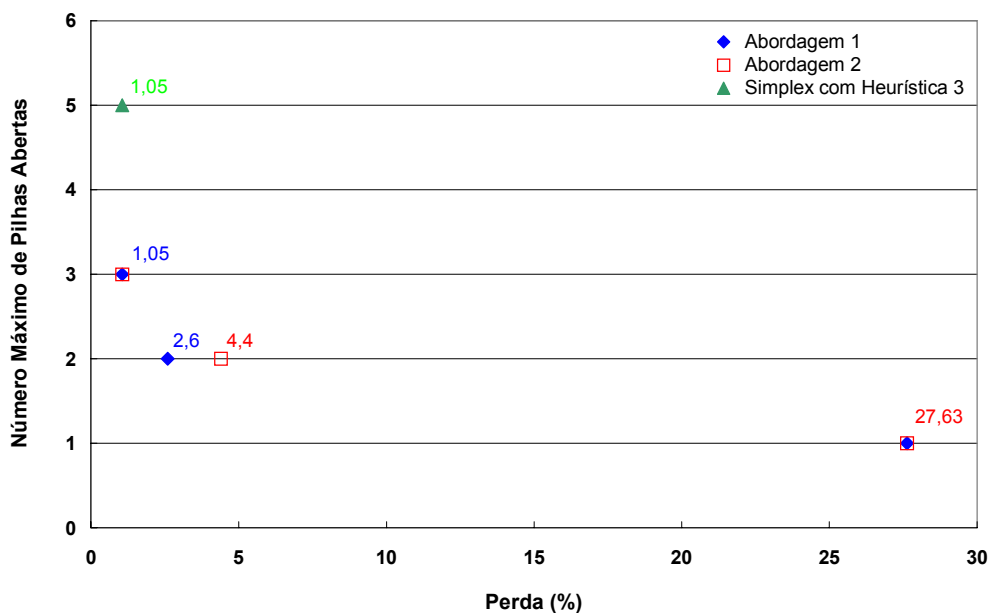


Figura 2: Curvas de *tradeoff* entre a perda e o número máximo de pilhas abertas para $m = 10$.

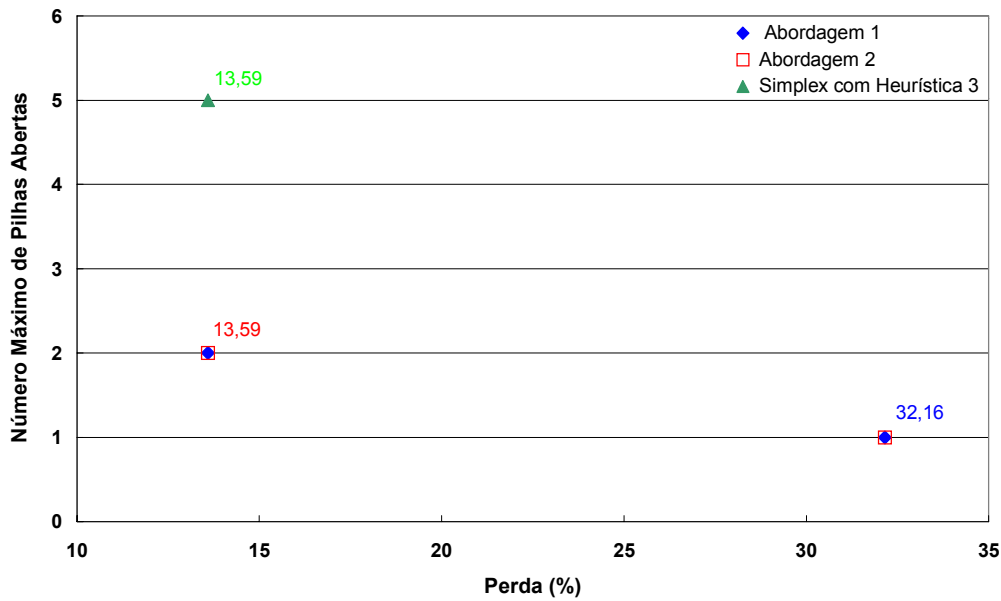


Figura 3: Curvas de *tradeoff* entre a perda e o número máximo de pilhas abertas para $m = 20$.

Para o caso bidimensional novamente tomou-se o primeiro exemplo da classe com $m = 10$ (figura 4) e o primeiro exemplo da classe com $m = 20$ (figura 5), e variou-se $\hat{p}_i = 1, 2, \dots, 8$ e $\hat{p}_i = 1, 2, \dots, 9$ em cada exemplo, respectivamente (note que 8 e 9 são limitantes superiores para estes exemplos, pois foram os números máximos de pilhas abertas obtidos pelo método simplex e a heurística 3). Observe nas figuras 4 e 5 que as curvas de *tradeoff* das abordagens 1 e 2 são bastante próximas; além disso, uma não domina a outra. Novos testes estão sendo compilados para melhor avaliar o desempenho das duas abordagens e serão apresentados no congresso.

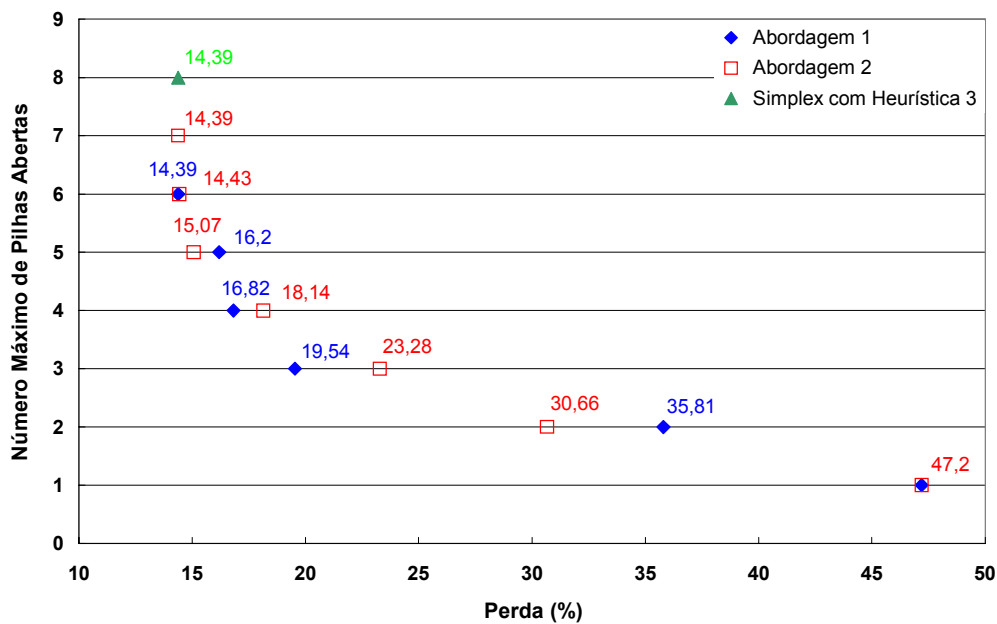


Figura 4: Curvas de *tradeoff* entre a perda e o número máximo de pilhas abertas para $m = 10$.

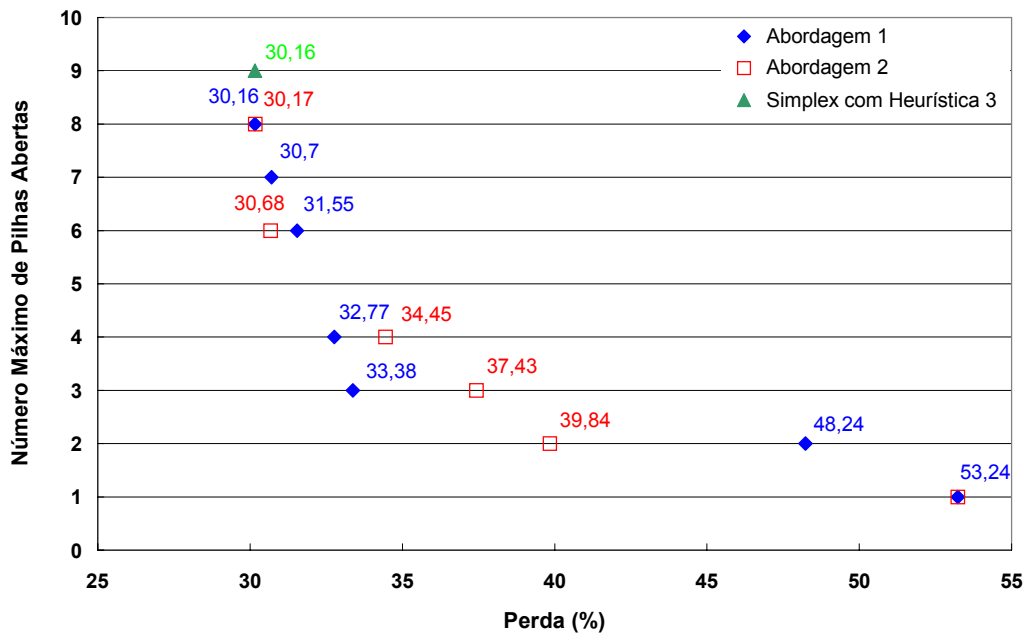


Figura 5: Curvas de *tradeoff* entre a perda e o número máximo de pilhas abertas para $m = 20$.

Referências

- Arenales, M., Morabito, R., Yanasse H. (eds.) (1999). Cutting and packing problems. *Pesquisa Operacional*, v. 19, n. 2.
- Ashikaga, F. M. (2001). Um método frugal para o problema de minimização de pilhas abertas. *Dissertação de Mestrado*, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brasil.
- Bischoff, E., Waescher, G. (eds.) (1995). Cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, v.84, n.3.
- Dowland, K., Dowland, W. (1992). Packing problems. *European Journal of Operational Research*, v.56, p.2-14.
- Dyckhoff, H. (1990). A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v.44, p.145-159
- Faggioli, E., Bentivoglio, C.A. (1998). Heuristic and exact methods for the cutting sequencing problem. *European Journal of Operational Research*, v.110, n.3, p.564-575.
- Fink, A., Vo, S. (1999). Applications of modern heuristic search methods to pattern sequencing problems. *Computer and Operations Research*, v.26, n.1, p.17-34.
- Gilmore, P., Gomory, R. (1961). A linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research*, v.9, p.849-859.
- Gilmore, P., Gomory, R. (1963). A linear programming approach to the cutting-stock problem II. *Operations Research*, v.11, p.863-888.
- Gilmore, P., Gomory, R. (1965). Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research*, v.14, p.94-120.
- Pinto, M. J., Yanasse, H. (2000). O Problema de Corte e Sequenciamento de Padrões: uma Abordagem Integrada. *Monografia*, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil.
- SICUP (2001). Special Interest Group on Cutting and Packing. <http://prodlog.wiwi.uni-halle.de/sicup>
- Steuer, R.E. (1986). *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation & Application*. New York: John Wiley.



- Sweeney, P., Paternoster, E. (1992). Cutting and packing problems: a categorised, application-oriented research bibliography. *Journal of the Operational Research Society*, v. 43, p.691-706.
- Yanasse, H. (1997). On a pattern sequencing problem to minimise the maximum number of open stacks. *European Journal of Operational Research*, v.100, n.3, p.454-463
- Yuen, B. (1995). Improved heuristics for sequencing cutting patterns. *European Journal of Operational Research*, v. 87, p.57-64.