UM MÉTODO EXATO BASEADO EM RELAXAÇÃO LAGRANGIANA PARA O PROBLEMA DE CARREGAMENTO DE PALETES DO PRODUTOR

LILIAN KÁTIA DE OLIVEIRA
REINALDO MORABITO
{plko@iris.ufscar.br, morabito@power.ufscar.br}
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Engenharia de Produção
Via Washington Luís, Km 235 - Caixa Postal 676
CEP 13.565-905, São Carlos, SP, Brasil

RESUMO

O propósito desse trabalho é apresentar um método exato para resolver o problema de carregamento de paletes (PCP) do produtor, baseado no método em Beasley (1985) para um problema mais geral da classe 2/B/O/M. Tal problema consiste em arranjar sem sobreposição o máximo número de retângulos de dimensões (l,w) ou (w,l) sobre um retângulo maior (L,W). O PCP do produtor parece ser NP-completo e tem sido freqüentemente tratado por métodos heurísticos. O presente método exato é um procedimento de busca em árvore do tipo *branch and bound* que, em cada nó, utiliza o limitante derivado de uma relaxação Lagrangiana de uma formulação de programação linear 0-1. Um algoritmo de otimização do subgradiente é usado para otimizar este limitante. São aplicados ainda testes de redução do problema e uma heurística Lagrangiana na otimização do subgradiente. Testes computacionais foram realizados utilizando exemplos difíceis da literatura.
Palavras-chave: Problema de carregamento de paletes do produtor, Relaxação Lagrangiana, método *Branch and Bound*.

ABSTRACT

The aim of this paper is to present an exact method to solve the manufacturer's pallet loading problem (PLP) based on the method in Beasley (1985) for a more general problem of class 2/B/O/M. The PLP is the problem of arranging the maximum number of rectangles of sizes (l,w) and (w,l) into a larger rectangle (L,W) without overlapping. This problem seems to be NP-complete and it has been often treated by heuristic methods. The present exact method is a tree search procedure of branch and bound type which utilizes for each node a bound derived from a Lagrangean relaxation of a 0-1 linear programming formulation. A subgradient optimization algorithm is used to optimize such bound. Problem reduction tests and a Lagrangean heuristic are applied in the subgradient optimization. Computational experiments were performed utilizing difficult examples of the literature.
Key-words: Manufacturer's Pallet Loading Problem, Lagrangean Relaxation, Branch and Bound method.

1. INTRODUÇÃO

Diversos autores têm observado que a unitização de carga está sendo cada vez mais utilizada na distribuição e armazenagem de produtos. No Brasil, assim como em outros países, há uma crescente tendência a paletização de carga ao longo de toda a cadeia logística, principalmente em empresas atacadistas e do setor de alimentos. Em particular, um problema que recebe especial atenção por parte de produtores e transportadores é o problema da escolha e do carregamento de paletes.

Este trabalho trata de um caso particular dos problemas de corte e empacotamento, denominado problema de carregamento de paletes do produtor (PCP do produtor), o qual é classificado como 2/B/O/C (bidimensional, seleção de itens, único objeto, itens iguais), de acordo com a tipologia de Dyckhoff (1990). Basicamente, este problema consiste em arranjar sem sobreposição o máximo número de retângulos de dimensões (l,w) ou (w,l) (faces inferiores das caixas) sobre um

retângulo maior (L,W) (superfície do palete). Admitimos que as caixas estão disponíveis em grandes quantidades e devem ser arranjadas ortogonalmente, isto é, com seus lados paralelos aos lados do palete. Estes arranjos de caixas formam camadas que são então empilhadas sobre o palete. Devido à escala e extensão de certos sistemas logísticos, um pequeno aumento do número de produtos carregados sobre cada palete pode resultar em economias substanciais.

O interesse em estudá-lo é que, além de ser um problema de difícil solução exata, o PCP do produtor parece ser NP-completo, embora isso ainda não tenha sido provado (Nelissen, 1995). O PCP do produtor é importante nas atividades logísticas de armazenagem e transporte de produtos embalados em caixas e carregados sobre paletes e caminhões (Morabito *et al.* 2000). Devido à dificuldade de solução desse problema, poucos autores têm proposto métodos de solução exatos, como Dowsland (1987), Tsai *et al.* (1993), Hadjiconstantinou e Christofides (1995) e Bhattacharya *et al.* (1998). Outros propuseram métodos heurísticos, tais como Steudel (1979), Smith e De Cani (1980), Bischoff e Dowsland (1982), Nelissen (1994, 1995), Arenales e Morabito (1995), Scheithauer e Terno (1996), Morabito e Morales (1998) e Farago e Morabito (2000).

Neste trabalho, o PCP do produtor é modelado como um problema inteiro 0-1 similarmente a Farago e Morabito (2000). O modelo pode ser visto como um caso particular do modelo proposto em Beasley (1985) para o problema mais geral da classe 2/B/O/M (bidimensional, seleção de itens, único objeto, vários itens diferentes). Apresentamos um método exato baseado na aplicação da técnica de relaxação Lagrangiana, que fornece um excelente limitante para ser usado num procedimento de busca em árvore (método *branch and bound*). Beasley (1985) utilizou um método similar baseado em relaxação Lagrangiana e *Surrogate* para o problema mais geral de corte bidimensional não-guilhotinado. Um algoritmo de otimização do subgradiente é usado para otimizar o limitante obtido por relaxação Lagrangiana. São aplicados ainda testes de redução com o objetivo de reduzir o tamanho do problema, e a heurística Lagrangiana em Farago e Morabito (2000). Os testes computacionais foram realizados utilizando exemplos conhecidos da literatura.

O trabalho está organizado como descrito a seguir. Na seção 2 é apresentada a formulação do problema. A aplicação de relaxação Lagrangiana está descrita na seção 3. Na seção 4 é apresentado o método de otimização do subgradiente. Em seguida, na seção 5, estão descritas a técnica de redução do problema e a heurística Lagrangiana. O procedimento de busca em árvore (*branch and bound*) é apresentado na seção 6. Finalmente, os resultados e conclusões são apresentados na seção 7.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Um palete (L,W), de comprimento L e largura W, deve ser carregado com caixas iguais com faces inferiores de dimensões l e w. Admitimos que L, W, l e w são números inteiros, e que $l \geq w$ e $l \leq \min\{L,W\}$. Por simplicidade, definimos $(l_1, w_1) = (l, w)$ e $(l_2, w_2) = (w, l)$, assim, (l_i, w_i), i=1,2, correspondem ao comprimento e largura da face de uma caixa com orientação i. O problema consiste em encontrar um arranjo de caixas em camadas horizontais, tal que a utilização da superfície do palete seja a máxima possível.

Definimos P e Q o mínimo e o máximo número de caixas por camada, respectivamente, que podem ser colocadas sobre o palete ($0 \leq P \leq Q$). Consideramos um sistema de coordenadas cartesianas com origem no canto inferior esquerdo do palete. Sabemos que as caixas podem ser colocadas em várias posições ao longo do comprimento L e largura W do palete. Sejam

$$X = \{p \mid 0 \leq p \leq L\text{-}w, \text{ inteiro}\} \text{ e } Y = \{q \mid 0 \leq q \leq W\text{-}w, \text{ inteiro}\},$$

os conjuntos das coordenadas (p,q), respectivamente, para se colocar o canto inferior esquerdo da face (l,w) de uma caixa dentro do palete. Sem perda de generalidade (Beasley, 1985), podemos restringir os conjuntos X e Y para:

$$X = \{p \mid p = \sum_{i=1}^{2} l_i b_i, \quad 0 \leq p \leq L - w, \quad b_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1,2\}$$

$$Y = \{q \mid q = \sum_{i=1}^{2} w_i b_i, \quad 0 \leq q \leq W - w, \quad b_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1,2\}.$$

Definimos ainda a função a que é útil para descrever restrições de sobreposição de caixas sobre o palete, e que pode ser computada com antecedência para cada posição (p,q), cada posição (r,s),

e cada orientação i, com $p \in X$ tal que $p \le L\text{-}l_i$, $q \in Y$ tal que $q \le W\text{-}w_i$, $r \in X$, $s \in Y$, e i=1,2 (Beasley, 1985) (Figura 1):

$$a_{ipqrs} = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \le p \le r \le p + l_i - 1 \le L - 1 \text{ e } 0 \le q \le s \le q + w_i - 1 \le W - 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Finalmente, para todo $p \in X$ tal que $p \le L\text{-}l_i$, $q \in Y$ tal que $q \le W\text{-}w_i$, e i=1,2, temos a variável de decisão x_{ipq}:

$$x_{ipq} = \begin{cases} 1, & \text{se uma caixa é colocada na posição } (p,q) \text{ do palete, com orientação } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

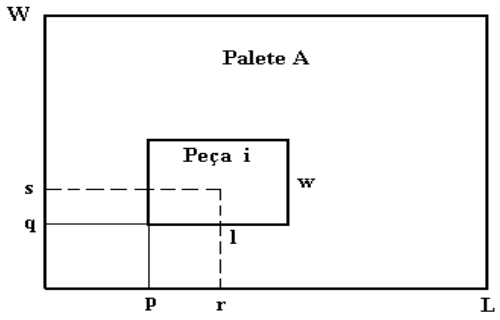

Figura 1 – Posição (r,s) não permitida em função da colocação de uma face na posição (p,q) com orientação i.

O PCP do produtor pode então ser formulado pelo seguinte problema linear 0-1 (Beasley, 1985, Farago e Morabito, 2000):

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{2} \sum_{\{p \in X | p \le L - l_i\}} \sum_{\{q \in Y | q \le W - w_i\}} x_{ipq} \tag{1}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{2} \sum_{\{p \in X | p \le L - l_i\}} \sum_{\{q \in Y | q \le W - w_i\}} a_{ipqrs} x_{ipq} \le 1, \quad \text{para todo } r \in X,\ s \in Y \tag{2}$$

$$P \le \sum_{i=1}^{2} \sum_{\{p \in X | p \le L - l_i\}} \sum_{\{q \in Y | q \le W - w_i\}} x_{ipq} \le Q \tag{3}$$

$$\text{com} \quad x_{ipq} \in \{0,1\},\ i=1,2,\ p \in X \text{ tal que } p \le L\text{-}l_i;\ q \in Y \text{ tal que } q \le W\text{-}w_i \tag{4}$$

A função objetivo (1) maximiza o número de caixas colocada sobre o palete. A restrição (2) garante que cada par (r,s) seja ocupado por no máximo uma caixa e, desta maneira, evita sobreposição no arranjo de caixas (Figura 1). A restrição (3) garante que o número de caixas arranjadas esteja dentro do intervalo [P,Q] (em geral, temos P = 0). O problema (1)-(4) envolve $O(|X||Y|)$ variáveis e restrições, o que o torna em geral difícil de ser resolvido otimamente nos casos práticos.

3. RELAXAÇÃO LAGRANGIANA

A técnica de relaxação Lagrangiana é muito utilizada e existem várias razões que justificam o seu uso. Muitos problemas de otimização combinatória são problemas “fáceis”, complicados pela adição de algumas restrições “difíceis”. No entanto, se estas restrições forem retiradas e introduzidas na função objetivo com uma certa penalidade (os conhecidos multiplicadores de Lagrange) é possível obter-se um problema fácil de se resolver e, assim, podemos dar uma atenção maior para a escolha de valores numéricos para os multiplicadores de Lagrange, pois estes são muito importantes para a qualidade dos limitantes. Além disso, experiências com relaxação Lagrangiana indicam que esta fornece bons limitantes e de razoável custo computacional (Beasley, 1993).

Utilizando a técnica de relaxação Lagrangiana em (1)-(4), ou seja, introduzindo os multiplicadores de Lagrange g_{rs} (≥ 0) para todo $r \in X$ e todo $s \in Y$ da expressão (2), obtemos o seguinte problema Lagrangiano (note que temos $|X||Y|$ multiplicadores):

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{2} \sum_{\{p \in X | p \leq L - l_i\}} \sum_{\{q \in Y | q \leq W - w_i\}} V_{ipq} x_{ipq} + \sum_{r \in X} \sum_{s \in Y} g_{rs} \tag{5}$$

$$P \leq \sum_{i=1}^{2} \sum_{\{p \in X | p \leq L - l_i\}} \sum_{\{q \in Y | q \leq W - w_i\}} x_{ipq} \leq Q \tag{6}$$

$$\text{com} \quad x_{ipq} \in \{0,1\}, \ i=1,2, \ p \in X \text{ tal que } p \leq L\text{-}l_i; \ q \in Y \text{ tal que } q \leq W\text{-}w_i \tag{7}$$

onde $V_{ipq} = 1 - \sum_{r \in X} \sum_{s \in Y} g_{rs} a_{ipqrs}$.

Sejam $\{X_{ipq}\}$ representando os valores das variáveis $\{x_{ipq}\}$ na solução do problema Lagrangiano (5)-(7), com valor dado por

$$Z_{UB} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{\{p \in X | p \leq L - l_i\}} \sum_{\{q \in Y | q \leq W - w_i\}} V_{ipq} X_{ipq} + \sum_{r \in X} \sum_{s \in Y} g_{rs} ,$$

que corresponde a um limitante superior para o valor ótimo do problema original (1)-(4), para quaisquer $\{g_{rs}\}$ não negativos.

Observe que, dados $\{g_{rs}\}$, o problema (5)-(7) pode ser facilmente resolvido, uma vez que se decompõe em dois problemas independentes (um para cada tipo i de orientação de caixa), e que cada subproblema pode ser facilmente resolvido por inspeção. Seja n o número de variáveis x_{ipq} com valores V_{ipq} estritamente positivos:

- Se $n \geq Q$, então escolha as Q variáveis com maiores valores V_{ipq}, e fixe-as em 1.
- Se $P \leq n < Q$, então escolha as n variáveis com maiores valores V_{ipq}, e fixe-as em 1.
- Se $n < P$, então escolha as P variáveis com maiores valores V_{ipq}, e fixe-as em 1.

As demais variáveis são fixadas em 0. Note que o problema Lagrangiano (5)-(7) possui a propriedade de integralidade, uma vez que, dados $\{g_{rs}\}$, sua solução não se altera ao trocarmos a restrição de integralidade $x_{ipq} \in \{0,1\}$, por sua relaxação linear $0 \leq x_{ipq} \leq 1$. Isto implica que o melhor limitante superior produzido pelo problema Lagrangiano (5)-(7) para o problema (1)-(4) não é melhor do que o limitante superior obtido pela relaxação de programação linear do problema (1)-(4).

4. OTIMIZAÇÃO DO SUBGRADIENTE

Para resolver o problema dual Lagrangiano: $\min_{g_{rs} \geq 0} \{\text{problema Lagrangiano (5)-(7)}\}$, é utilizado o método de otimização do subgradiente, que está descrito a seguir (Camerini *et al.* (1975), Crowder (1976) e Beasley (1985, 1993)).

Passo 1: Gere uma solução factível, por exemplo, a solução homogênea com todas as caixas arranjadas sob a mesma orientação. Faça Z_{LB} igual ao valor desta solução homogênea. Seja *ITMAX* o máximo número de iterações e faça $it = 0$. Fixe $g_{rs} = 0$ para todo $s \in Y$, e todo $r \in X$, como valores iniciais para os multiplicadores.

Passo 2: Resolva o problema Lagrangiano (5)-(7) com o conjunto de multiplicadores atual, obtendo a solução $\{X_{ipq}\}$ e valor Z_{UB}. Faça $it = it + 1$.

Passo 3: Teste de factibilidade: se a solução Lagrangiana é factível para o problema original (1)-(4), então atualize Z_{LB}, o limitante inferior para o problema, correspondendo a uma solução factível. Atualize o menor limitante superior Z_{min} com Z_{UB}.

Passo 4: Teste de otimalidade: pare se $Z_{min} = Z_{LB}$; caso contrário, vá para o Passo 5.

Passo 5: Calcule os subgradientes:

$$G_{rs} = -1 + \sum_{r \in X} \sum_{s \in Y} \left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{\{p \in X | p \leq L - l_i\}} \sum_{\{q \in Y | q \leq W - w_i\}} a_{ipqrs} X_{ipq} \right),$$

para todo para $(r,s)\in(X,Y)$.

Passo 6: Defina o tamanho do passo t por:

$$t = \frac{f(Z_{UB} - Z_{LB})}{\sum_{r\in X}\sum_{s\in Y} G_{rs}^2},$$

onde $0 < f \leq 2$, e atualize os multiplicadores de Lagrange por

$$g_{rs} = \max(0, g_{rs} + tG_{rs}),$$

para todo par $(r,s)\in(X,Y)$.

Passo 7: Se $it = ITMAX$, pare; caso contrário, vá para o Passo 2.

Existem várias maneiras de se variar o parâmetro f ao longo das iterações, para acelerar a convergência do método. Observe que, se em alguma iteração obtivermos $Z_{min} = Z_{LB}$ no passo 4, então o procedimento acima termina com a solução ótima do problema original (1)-(4). Caso contrário, obtemos o menor limitante superior Z_{min} para o problema.

5. REDUÇÃO DO PROBLEMA E HEURÍSTICA LAGRANGIANA

É possível aplicar, durante cada iteração do método de otimização do subgradiente, alguma heurística Lagrangiana para gerar soluções factíveis para o problema original (1)-(4), a partir da solução obtida para o problema Lagrangiano do passo 2 (modelo (5)-(7)). Também podemos aplicar alguma técnica de redução do problema para tentar fixar, sem perda de generalidade, alguma variável em 0 ou 1, e, desta maneira, reduzir o tamanho do problema (1)-(4).

A seguir é apresentada a técnica de redução do problema e a heurística Lagrangiana.

5.1. Redução do Problema

Em cada iteração, seja n o número de variáveis com valor 1 na solução do problema Lagrangiano do passo 2.

- Fixando $x_{ipq} = 0$:

  Ao fixarmos x_{ipq} em 1 (com $X_{ipq} = 0$) obtemos o seguinte limitante superior:

$$Z'_{UB} = \begin{cases} Z_{UB} + V_{ipq} - \min_{r\in X, s\in Y, X_{irs}=1}\{V_{irs}\}, & \text{se } n = Q \\ Z_{UB} + V_{ipq} - \min_{r\in X, s\in Y, X_{irs}=1}\{0, V_{irs}\} & \text{se } n \neq Q \end{cases}. \quad (8)$$

Observe em (8) que V_{ipq} é o valor do coeficiente da variável x_{ipq} fora da solução corrente do problema Lagrangiano, e $\{V_{irs}\}$ é o conjunto dos valores dos coeficientes das n variáveis que estão fazendo parte da solução corrente (isto é, $X_{irs} = 1$).

Se $n = Q$, então, ao colocarmos a variável x_{ipq} na solução (isto é, ao fixarmos $x_{ipq} = 1$), precisamos retirar da solução atual a variável x_{irs} (com $X_{irs} = 1$) com mínimo valor V_{irs}, para não ultrapassarmos a quantidade máxima de caixas Q.

Se $n \neq Q$, então temos dois sub-casos:

(i) Se $P < n < Q$, então, ao colocarmos a variável x_{ipq} na solução, não precisamos retirar da solução atual nenhuma variável x_{irs} (com valor $X_{irs} = 1$) de valor V_{irs} positivo, pois não ultrapassamos a quantidade máxima de caixas Q (isto é, $n + 1 \leq Q$). Note que, neste caso, não é possível ter variáveis x_{irs} com V_{irs} negativo, dado que $n > P$.

(ii) Se $P = n < Q$, então, ao ser colocada a variável x_{ipq} na solução, não é necessário retirar da solução atual nenhuma variável x_{irs} (com valor $X_{irs} = 1$) de valor V_{irs} positivo (pelo mesmo motivo anterior), ou então é preciso retirar a variável x_{irs} com menor valor, caso esta tenha V_{irs} negativo. Note que, neste caso, podemos ter variáveis x_{irs} com V_{irs} negativo, dado que $n = P$.

Se o valor do limitante superior em (8) for menor ou igual ao valor do limitante inferior, isto é, se $Z'_{UB} \leq Z_{LB}$, então é possível fixar x_{ipq} em 0, ou seja, reduzir o problema original ao não considerar a possibilidade de colocar uma caixa na posição (p,q) sob orientação i.

- Fixando $x_{ipq} = 1$:
  Ao fixamos x_{ipq} em 0 (com $X_{ipq} = 1$) obtemos o seguinte limitante superior:

$$Z'_{UB} = \begin{cases} Z_{UB} - V_{ipq} + \max_{r \in X, s \in Y, X_{irs}=0} \{V_{irs}\}, & \text{se } n = P \\ Z_{UB} - V_{ipq} + \max_{r \in X, s \in Y, X_{irs}=0} \{0, V_{irs}\} & \text{se } n \neq P \end{cases}. \quad (9)$$

O raciocínio é análogo ao caso anterior. Se o valor do limitante superior em (9) for menor ou igual ao valor do limitante inferior, isto é, se $Z'_{UB} \leq Z_{LB}$, então é possível fixar x_{ipq} em 1, ou seja, reduzir o problema original ao desconsiderar a possibilidade de não colocar uma caixa na posição (p,q) sob orientação i.

5.2. Heurística Lagrangiana

A idéia básica da heurística Lagrangiana em Farago e Morabito (2000) é, partindo da solução do problema Lagrangiano da iteração corrente, convertê-la numa solução factível para o problema original (1)-(4). Esta solução constitui um limitante inferior para a solução ótima deste problema.

Passo 1: Coloque todas as variáveis fixadas em 1 pela redução do problema na solução heurística, e retire seus valores correspondentes da lista dos $\{V_{ipq}\}$. Ordene os $\{V_{ipq}\}$ restantes de forma decrescente, e forme uma lista F com as variáveis x_{ipq} correspondentes aos V_{ipq}.

Passo 2: Pare se a lista F estiver vazia, caso contrário, coloque na solução heurística a primeira variável da lista F, e retire-a dessa lista.

Passo 3: Teste a factibilidade da solução heurística em questão. Se for factível, mantenha a variável correspondente na solução; caso contrário, desconsidere-a e volte para o passo 2.

Ao término deste procedimento, podemos estar com uma solução factível melhor que a da iteração anterior. Neste caso, atualizamos esse limitante inferior Z_{LB}. A otimalidade desta solução é testada no decorrer do método de otimização do subgradiente.

6. BUSCA EM ÁRVORE

Como dito anteriormente, no final do procedimento de otimização do subgradiente, o menor limitante superior (Z_{min}) e o máximo limitante inferior (Z_{LB}) correspondente a uma solução factível podem não coincidir e, para resolver este problema, aplicamos o método *branch and bound* (Nemhauser e Wolsey, 1988). O problema será resolvido utilizando uma árvore binária com busca em profundidade e, em cada nó da árvore, é computado um limitante superior de relaxação Lagrangiana.

A seguir é apresentada a estrutura de cada nó da árvore e, em seguida, apresentamos o algoritmo do procedimento de busca em árvore.

Em cada nó da árvore é aplicado o procedimento de otimização do subgradiente e, se em qualquer iteração do procedimento, obtivermos $Z_{min} = Z_{LB}$, então o problema é resolvido otimamente sendo Z_{LB} o valor ótimo da solução (Z_{LB} é o limitante inferior na solução do problema correspondente a uma solução factível). O conjunto inicial de multiplicadores de cada nó é o conjunto associado com o melhor limitante superior encontrado no nó predecessor da árvore.

Convém lembrar que, durante cada iteração do método de otimização do subgradiente, foi aplicada a heurística Lagrangiana da seção 5.2 para gerar soluções factíveis para o problema original (1)-(4), a partir da solução obtida para o problema Lagrangiano do passo 2 (modelo (5)-(7)). Também foi aplicada a técnica de redução do problema da seção 5.1 para tentar fixar, sem perda de generalidade, alguma variável em 0 ou 1, e, desta maneira, reduzir o tamanho do problema (1)-(4).

Os critérios para sondagem do método *branch and bound* são:

a) Otimilidade, ou seja, se $Z_{min} = Z_{LB}$;
b) Infactibilidade, ou seja, se a solução encontrada não for factível;
c) Valor de dominância, ou seja, se a solução encontrada for factível e ainda $Z_{min} > Z_{LB}$.

No caso de encontrarmos uma solução factível com $Z_{min} > Z_{LB}$ ou se a solução for infactível, devemos fazer a divisão (*branch*) do nó e teremos então dois novos subproblemas a serem resolvidos, ou seja, teremos um novo nó a esquerda e outro a direita. Neste caso, selecionamos uma variável e esta será fixada com valor igual a 1 no nó da esquerda e, conseqüentemente, igual a 0 no nó da direita. O

nó da esquerda é considerado primeiro do que o da direita, assim ao fazermos a sondagem de um nó, consideramos primeiro o nó da esquerda a ser explorado.

A seguir é apresentado o algoritmo do procedimento de busca em árvore (Nemhauser e Wolsey, 1988).

***Passo 1**:* Inicialização: forme uma lista L={P} (sendo P o problema (1)-(4)) com os problemas ainda não resolvidos e inicialize Z_{LB}.

Passo 2: Teste de término: se L=∅ então a solução que assegura $Z_{min}=Z_{LB}$ é ótima.

***Passo 3**:* Seleção do problema e relaxação: selecione e elimine um problema P^i de L. Resolva a relaxação do problema selecionado. Seja Z_{min} o valor ótimo do problema P^i .

***Passo 4**:* Sondagem:

a) se $Z_{LB} \leq Z_{min}$, vá para o passo 2;
b) se a solução encontrada for infactível, vá para o passo 5;
c) se a solução encontrada for factível e ainda $Z_{min}>Z_{LB}$, vá para o passo 5.

***Passo 5**:* Divisão (*branch*): teremos dois novos subproblemas e devemos selecionar uma variável e esta será fixada com valor igual a 1 no nó da esquerda e, conseqüentemente, igual a 0 no nó da direta. Esses novos subproblemas são incluídos na lista L. Em seguida, vá para o passo 2.

7. RESULTADOS COMPUTACIONAIS E CONCLUSÕES

As implementações foram realizadas em linguagem Pascal (compilador Delphi 5) e os testes foram realizados em um microcomputador Pentium III 650 MHz.

A tabela abaixo (Tabela 1) apresenta os dados de 10 exemplos retirados de Letchford e Amaral (2001). Escolhemos estes exemplos por serem considerados difíceis uma vez que todos têm valor da solução relaxada de (1)-(4) (Z_{min}) diferente do valor da solução ótima (veja Tabela 2). A coluna '2(|X||Y|)' da Tabela 1 representa o número (aproximado) de variáveis envolvidas no modelo(5)-(7).

Tabela 1. Exemplos da literatura.

Exemplo	**(*L*,*W*)**	**(*l*,*w*)**	**|X|**	**|Y|**	**2(|X||Y|)**
L1	(32,22)	(5,4)	27	13	702
L2	(32,27)	(5,4)	27	19	1026
L3	(40,26)	(7,4)	27	14	756
L4	(40,33)	(7,4)	27	21	1134
L5	(53,26)	(7,4)	49	14	1372
L6	(37,30)	(8,3)	32	25	1600
L7	(81,39)	(9,7)	52	12	1248
L8	(100,64)	(17,10)	32	14	896
L9	(100,82)	(22,8)	33	23	1518
L10	(100,83)	(22,8)	33	23	1518

O procedimento de otimização do subgradiente foi iniciado sempre com o parâmetro f=2 (passo 6, na seção 4), sendo reduzido ao longo das iterações conforme Morabito e Farago (2001). Se a solução ótima é encontrada ou se $f < 0.005$ (passo 7), o procedimento é terminado.

Na Tabela 2 é apresentado o resultado dos testes computacionais dos exemplos L1-L10 com o limitante superior (Z_{min}) e o limitante inferior (Z_{LB}) no nó inicial da árvore. Também são apresentados o valor da solução ótima, o número de nós utilizados na busca em árvore e o tempo total (em minutos) gasto para se executar cada exemplo.

Tabela 2. Resultados computacionais dos exemplos encontrados na literatura.

Exemplo	Nó inicial da árvore		Busca em árvore		Tempo total (min)
	Z_{min}	Z_{LB}	Sol. ótima	N° de nós	
L1	35	32	34	07	1,02
L2	43	40	42	15	5,13
L3	37	30	36	05	1,43
L4	47	40	46	11	9,48
L5	49	42	48	13	9,13
L6	46	40	45	17	10,12
L7	50	45	49	11	12,92
L8	37	30	36	05	1,92
L9	46	40	45	17	16,62
L10	46	40	45	17	16,50

Note que o método exato foi capaz de resolver otimamente todos os 10 exemplos em um tempo computacional aceitável. Conforme mencionado, tais exemplos são considerados difíceis uma vez que todos os limitantes superiores (Z_{min}) obtidos com a relaxação Lagrangiana no nó inicial da árvore têm *gap* de otimalidade (de acordo com Letchford e Amaral (2001) e Morabito e Farago (2001), estes limitantes são bem apertados e quase sempre coincidem com o valor da solução ótima).

Foram feitos também testes quanto à aplicação ou não do método de redução do problema proposto na seção 5.1 para resolver os mesmos exemplos L1-L10. Além disso, também foi testada a exclusão do procedimento de redução juntamente com a heurística Lagrangiana proposta na seção 5.2. A Tabela 3 apresenta o número de nós utilizados na busca em árvore e o tempo total gasto (em minutos) para executar cada exemplo sem a aplicação do método de redução do problema na busca em árvore, e sem considerar o método de redução e a heurística Lagrangiana.

Tabela 3. Resultados computacionais dos exemplos encontrados na literatura, sem a utilização da redução do problema e também sem a heurística Lagrangiana.

Exemplo	Busca em árvore sem o procedimento de redução		Busca em árvore sem o procedimento de redução e heurística Lagrangiana	
	N° de nós	Tempo total (min)	N° de nós	Tempo total (min)
L1	17	9,15	113	6,97
L2	41	35,37	115	26,47
L3	17	12,20	79	12,43
L4	45	76,43	107	62,42
L5	33	77,35	75	55,07
L6	219	293,98	265	195,12
L7	17	49,45	53	52,72
L8	17	15,87	79	16,38
L9	219	474,33	263	346,00
L10	219	467,48	263	332,50

Comparando as Tabelas 2 e 3, observe que o tempo computacional para o programa incluindo o teste de redução é bem menor do que sem a inclusão da redução. O mesmo acontece para o problema sem a inclusão do teste de redução e da heurística Lagrangiana.

Observe também pela Tabela 2 que o número de nós envolvidos na busca em árvore foi menor que os resultados encontrados na Tabela 3. Podemos dizer também que o número de nós na busca em árvore sem o procedimento de redução é menor do que a busca em árvore sem a heurística Lagrangiana e o método de redução (Tabela 3).

Os próximos passos deste trabalho são resolver outros exemplos tanto da literatura quanto coletados em situações reais. Também pretende-se comparar o desempenho do presente método,

baseado em relaxação Lagrangiana, com uma variação baseada em relaxação Lagrangiana e *Surrogate* similarmente a Beasley (1985). Outra perspectiva interessante deste trabalho é a aplicação de relaxação Lagrangiana e *Surrogate* nos outros modelos 0-1 apresentados em Tsai *et al.* (1993) e Hadjiconstantinou e Christofides (1995).

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arenales, M. e Morabito, R. (1995), An And/Or-Graph Approach to the Solution of Two-Dimensional Non-Guillotine Cutting Problems, *European Journal of Operational Research* 84, pp.599-617.

Beasley, J. (1985), An Exact Two-Dimensional Non Guillotine Cutting Tree Search Procedure, *Operations Research* 33, pp.49-64.

Beasley, J. E. (1993), Lagrangean Relaxation. In: *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problem,* Edited by Reeves, C. R. Blackwell scientific publications, Oxford, Great Britain.

Bhattacharya, S.; Roy, R. e Bhattacharya, S. (1998), An Exact Depth-First Algorithm for the Pallet Loading Problem, *European Journal of Operational Research* 110, pp. 610-625.

Bischoff, E. e Dowsland, W. (1982), An Application of the Micro to Product Design and Distribution, *Journal of the Operational Research Society* 33, pp.271-280.

Camerini, P. M.; Fratta, L. e Maffioli, F. (1975), On Improving Relaxation Methods by Gradient Techniques, *Mathematical Programming Study* 3, pp. 26-34.

Crowder, H. Computational improvements for subgradient optimization, *Symposio Matematica*, Rome, vol. 17, pp. 357-372, 1976.

Dowsland, K. (1987), An Exact Algorithm for the Pallet Loading Problem, *European Journal of Operational Research* 31, pp. 78-84.

Dyckhoff, H. (1990), A Typology of Cutting and Packing Problems, *European Journal of Operational Research* 44, pp. 145-159.

Farago, R. e Morabito, R. (2000). Um Método Heurístico Baseado em Relaxação Lagrangiana para o Problema do Carregamento de Paletes do Produtor, *Pesquisa Operacional* 20(2), pp. 197-212.

Hadjiconstantinou, E. e Christofides, N. (1995), An Exact Algorithm for General, Orthogonal, Two-Dimensional Knapsach Problems, *European Journal of Operational Research* 83, pp. 39-56.

Letchford, A. N. e Amaral, A. (2001), Analysis of Upper Bounds for the Pallet Loading Problem, *European Journal Of Operational Research* 3 (132), pp. 582-593.

Morabito, R. e Farago, R. (2001). A Tight Lagrangean Relaxation Bound for the Manufacturer's Pallet Loading Problem. Aceito para publicação na *Studia Informatica* (França).

Morabito, R. e Morales, S.R. (1998), A Simple and Effective Recursive Procedure for the Manufacturer's Pallet Loading Problem, *Journal of the Operational Research Society* 49, pp.819-828.

Morabito, R., Morales, S.R. e Widmer, J.A. (2000), Loading Optimization of Palletized Products on Trucks, *Transportation Research* 36, pp. 285-296.

Nelissen, J. (1994), Solving the Pallet Loading Problem More Efficiently, *Working Paper*, Graduiertenkolleg Informatik und Technik, Aachen.

Nelissen, J. (1995), How to Use Constraints to Compute an Upper Bound for the Pallet Loading Problem, *European Journal of Operational Research* 84, pp. 662-680.

Nemhauser, G. L. e Wolsey, L. A. (1988), Integer and Combinatorial Optimization, *Wiley-Interscience Publication*.

Scheithauer, G. e Terno, J. (1996), The G4-Heuristic for the Pallet Loading Problem, *Journal of the Operational Research Society* 47, pp. 511-522.

Smith, A. e De Cani, P. (1980), An Algorithm to Optimize the Layout of Boxes in Pallets, *Journal of the Operational Research Society* 31, pp. 573-578.

Steudel, H. (1979), Generating Pallet Loading Patterns: a Special Case of the Two-Dimensional Cutting Stock Problem, *Management Science* 10, pp. 997-1004.

Tsai, R. D.; Malstrom, E. M. e Kuo, W. (1993), Three Dimensional Palletization of Mixed Box Sizes, *IEE Transactions* 25 (4), pp. 64-75.