



## PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR COM PARÂMETROS FUZZY

**Luiza Amalia Pinto Cantão**

**Akebo Yamakami**

DT – FEEC – UNICAMP

CP: 6101, 13083-970, Campinas–SP, Brasil

{[luiza,akebo](mailto:luiza,akebo@dt.fee.unicamp.br)}@dt.fee.unicamp.br

### Resumo

Apresentamos aqui algumas modificações nos métodos de Programação Não-Linear para a minimização de problemas, visando tratar aqueles com funções objetivo com incerteza em seus coeficientes, caracterizados como parâmetros fuzzy (números fuzzy). Para isso, estabelecemos algumas propriedades básicas, tais como: definição de função convexa fuzzy, diferenciabilidade e mínimo de funções fuzzy e, finalmente, suas condições de otimalidade.

Alguns métodos para problemas **irrestritos** e **restritos** de Programação Não-Linear Fuzzy são propostos, tais como:

1. Problemas Irrestritos: métodos de busca unidimensional com e sem derivadas, e os métodos de busca multidimensional com e sem derivadas;
2. Problemas Restritos: método de função penalidade e função barreira, e método de direções viáveis.

Finalmente, apresentamos aplicações em alguns problemas clássicos e as análises de seus resultados.

**Palavras chave:** Programação Não-Linear Fuzzy, Programação Matemática Fuzzy, Parâmetros Fuzzy.

### Abstract

In this paper we present some modifications in the Nonlinear Programming methods for the minimization of problems with uncertain coefficients on the objective function, i.e., the coefficients are fuzzy parameters (fuzzy numbers). For this purpose, we establish some basic properties, such as: definition of fuzzy convex functions, differentiability and minimum in the fuzzy framework, and finally the optimality conditions.

Some methods of Nonlinear Programming for both **unconstrained** and **constrained** problems are proposed, such as:

1. Unconstrained Problem: linear search with and without derivatives, multidimensional search with and without derivatives;
2. Constrained Problems: Penalty and Barrier functions, and method of feasible directions.

Finally, some classical problems were solved and their results are analysed.

**Key-Words:** Fuzzy Nonlinear Programming, Fuzzy Mathematical Programming, Fuzzy Parameters.



## 1. Introdução

A proposta da *Programação Matemática* é a de resolver problemas reais, onde sua modelagem, muitas vezes, baseia-se em dados incertos. A teoria Fuzzy ajuda-nos a modelar esses problemas – problemas com incerteza em alguns aspectos de sua modelagem. Estas incertezas podem ocorrer de forma qualitativa, permitindo a violação do conjunto de restrições ( $g_i(x) \lesssim 0, i = 1, 2, \dots, m$ ), como aquela apresentada em [tl-1988] e/ou na forma quantitativa, onde os coeficientes (dados) do problema são incertos, caracterizados por parâmetros fuzzy (números fuzzy). Os coeficientes fuzzy podem ocorrer somente na função objetivo, somente nos coeficientes das restrições ou em ambos os casos. A proposta deste trabalho é a de desenvolver ferramentas teóricas e práticas para problemas de Programação Não-Linear com parâmetros fuzzy **na função objetivo**.

Aqui, os parâmetros fuzzy presentes nos coeficientes da função objetivo são tratados como números fuzzy. Cada número fuzzy  $\tilde{a} \in F(\mathfrak{R})$ , onde  $F(\mathfrak{R})$  é o conjunto de números fuzzy sobre  $\mathfrak{R}$ , está associado a uma função de pertinência triangular, denotada por  $\mu_{\tilde{a}}(x) : \mathfrak{R} \rightarrow [0, 1]$ , onde:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x - \underline{a}}{\underline{a} - \underline{a}} & \text{se } x \in [\underline{a}, \underline{a}], \\ \frac{\bar{a} - x}{\bar{a} - \underline{a}} & \text{se } x \in [\underline{a}, \bar{a}], \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os números fuzzy serão caracterizados por intervalos de confiança e por seus  $\alpha$ -cortes ( $\mu_{\tilde{a}}^\alpha = \{x / \mu_{\tilde{a}} \geq \alpha\}$ ):

$$\tilde{a}^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [\underline{a} + \alpha(\underline{a} - \underline{a}), \bar{a} - \alpha(\bar{a} - \underline{a})],$$

onde  $\underline{a}$  e  $\bar{a}$  são os limites à esquerda e à direita do valor modal de  $\tilde{a}$ , respectivamente. Note que o valor modal de um número fuzzy  $\tilde{a}$  é aquele onde a função de pertinência associada tem o seu valor máximo, ou seja,  $\mu_{\tilde{a}}(x) = 1$ . As funções  $a_1^\alpha$  e  $a_2^\alpha$  representam as funções inversas da função de pertinência triangular, à direita e à esquerda do valor modal, respectivamente. A representação do número fuzzy zero será:  $\tilde{0}^\alpha = [\underline{\varepsilon}(1 - \alpha), \bar{\varepsilon}(1 - \alpha)]$ , sendo  $\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}$  os limites à esquerda e à direita de 0.

Assim, um problema de Programação Não-Linear com parâmetros fuzzy pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \\ \text{S. a} \quad & \mathbf{x} \in S \end{aligned} \tag{1}$$

sendo  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : F(\mathfrak{R}^m) \times \mathfrak{R}^n \rightarrow F(\mathfrak{R})$ ,  $\tilde{\mathbf{a}} \in F(\mathfrak{R}^m)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  e  $S$  o conjunto de soluções viáveis para o problema **irrestrito** ( $S \subseteq \mathfrak{R}^n$ ) e o conjunto de restrições para o problema **restrito** ( $S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} / \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\}$ ).

O problema (1) amplia o espectro da otimização não-linear, ao possibilitar a introdução das incertezas naturalmente presentes em diversas modelagens; apresentaremos então os resultados teóricos e computacionais relativos à solução numérica deste tipo de problema.

Na seção 2 abordaremos funções convexas fuzzy, diferenciabilidade de funções fuzzy, derivada direcional fuzzy e mínimo de funções fuzzy. Estes resultados teóricos formam a base necessária para a definição das condições de otimalidade fuzzy.

Na seção 3 apresentaremos as modificações propostas para alguns métodos clássicos de otimização, de forma a aproveitá-los na resolução numérica de problemas do tipo (1).

Finalmente, na seção 4, os resultados de aplicações dos algoritmos propostos a problemas testes são analisados.



## 2. Convexidade Fuzzy e Condições de Otimalidade

Nesta seção abordaremos inicialmente **convexidade fuzzy**, sua definição e algumas propriedades. Posteriormente, abrangearemos as **condições de otimalidade** para problemas com função objetivo fuzzy.

### 2.1 Convexidade de Funções com Parâmetros Fuzzy

A função fuzzy abordada aqui segue a mesma definição da função objetivo do problema (1).

**Definição:** Uma função com parâmetros fuzzy é convexa se:

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \preceq \lambda \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)$$

sendo  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{a}} \in F(\mathfrak{R}^m)$  e  $\lambda \in [0, 1]$ .

A derivada de uma função com parâmetros fuzzy deve satisfazer as seguintes condições, como em [ka-1987] e [db-1982]:

1. Normalização:  $\exists \mathbf{x}_0 \in \mathfrak{R}^n$  tal que  $\mu_{\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_0)}(y) = 1$ ;
2. Continuidade:  $\mu_{\tilde{f}}(y)$  é contínuo;
3. Suporte-limitado: Existe um intervalo  $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$  tal que  $Supp(\mu_{\tilde{f}}) \subseteq [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ , sendo  $Supp(\mu_{\tilde{f}}) = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R} / \mu_{\tilde{f}} > 0\}$ ;
4. Convexidade:  $\mu_{\tilde{f}}(y)$  é convexo.

Para o resultado seguinte, assuma a definição de *função com parâmetros fuzzy diferenciável* dada por [ka-1987], onde verifica-se também a prova do teorema que segue.

**Teorema:** [ka-1987] Seja  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : F(\mathfrak{R}^m) \times \mathfrak{R}^n \rightarrow F(\mathfrak{R})$ , com  $\tilde{\mathbf{a}} \in F(\mathfrak{R}^m)$  e  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ , uma função diferenciável. Denote  $\tilde{f}^\alpha(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) = [\tilde{f}_1^\alpha(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}), \tilde{f}_2^\alpha(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})]$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . Então  $\tilde{f}_1^\alpha$  e  $\tilde{f}_2^\alpha$  são diferenciáveis e  $[\tilde{f}'(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})]^\alpha = [\tilde{f}_1'(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})^\alpha, \tilde{f}_2'(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})^\alpha]$ .

Agora podemos definir *derivada direcional* de funções convexas com parâmetros fuzzy, com base em [bs-1993], que relaciona direções ao comportamento da função.

**Definição:** Seja  $S \subseteq F(\mathfrak{R}^m) \times \mathfrak{R}^n$  um conjunto não-vazio, e seja  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : S \rightarrow F(\mathfrak{R})$ . Sejam  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathfrak{R}^n$  e  $\mathbf{d}$  um vetor não-nulo tal que  $\bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}$ , para  $\lambda > 0$  e suficientemente pequeno. A derivada direcional de  $\tilde{f}$  em  $\bar{\mathbf{x}}$ , na direção  $\mathbf{d}$ , é definida quando os limites indicados abaixo existem e são iguais:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) - \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\lambda} \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) - \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d})}{\lambda}.$$

**Teorema:** Considere a seguinte função fuzzy  $\tilde{f}$ , para qualquer ponto  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathfrak{R}^n$  e uma direção não-nula  $\mathbf{d} \in F(\mathfrak{R}^m) \times \mathfrak{R}^n$ ; seja  $\tilde{v}(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda) = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d})$  uma função fuzzy de  $\lambda \in \mathfrak{R}$ . Então  $\tilde{f}$  é convexa se, e somente se,  $\tilde{v}$  é convexa para todo  $\bar{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{d}$  não-nulo em  $F(\mathfrak{R}^m) \times \mathfrak{R}^n$ .

O próximo teorema permitirá verificar a convexidade de funções com parâmetros fuzzy duas vezes diferenciáveis. Note também que o teorema é válido se o considerarmos para todos os elementos de  $\tilde{\mathbf{a}}$ , ou seja, para  $\forall \tilde{\mathbf{a}}^\alpha \in \tilde{\mathbf{a}}$ , onde  $\tilde{\mathbf{a}}^\alpha$  representa o  $\alpha$ -corte de  $\tilde{\mathbf{a}}$ , e  $\alpha \in [0, 1]$ .



**Teorema:** Sejam  $S \subset F(\mathfrak{R}^m) \times \mathfrak{R}^n$  um conjunto convexo, não-vazio e aberto, e seja  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : S \rightarrow F(\mathfrak{R})$  uma função com derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1.  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$  é convexa para qualquer  $\bar{\mathbf{x}} \in S$ ;
2.  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \succeq \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + \nabla \tilde{f}'(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$  para cada  $\mathbf{x} \in S$ ;
3. A matriz de derivadas parciais de segunda ordem de  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$  é semi-definida positiva para todo  $\mathbf{x} \in S$ .

## 2.1 Condições de Otimalidade para Problemas com Função Objetivo Fuzzy

Agora, definiremos mínimo de funções convexas com parâmetros fuzzy e condições de otimalidade para problemas de programação não-linear fuzzy. Vale mencionar aqui que,  $\mathbf{x} \in S$  sempre será um número ordinário – a idéia é a de propor métodos que gerem uma solução ordinária, usando a imprecisão da função objetivo para obter uma *solução melhor*.

**Definição:** Seja  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : F(\mathfrak{R}^m) \times \mathfrak{R}^n \rightarrow F(\mathfrak{R})$ , com  $\tilde{\mathbf{a}} \in F(\mathfrak{R}^m)$  e  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ . Considere o problema (1) como um problema **irrestrito** ( $S \subseteq \mathfrak{R}^n$ ). Seja  $\mathbf{x} \in S$  uma *solução viável* para o problema. Se  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \preceq \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ , para  $\forall \mathbf{x} \in S$ , então  $\bar{\mathbf{x}}$  é um mínimo global. Se existe um  $\varepsilon \in \mathfrak{R}_+$  não-nulo, tal que  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \preceq \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ , para  $\forall \mathbf{x} \in S$ , satisfazendo  $\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ , então  $\bar{\mathbf{x}}$  é um mínimo local.

**Teorema:** Seja  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : F(\mathfrak{R}^m) \times \mathfrak{R}^n \rightarrow F(\mathfrak{R})$ , com  $\tilde{\mathbf{a}} \in F(\mathfrak{R}^m)$  e  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ , uma função convexa fuzzy. Considere o problema (1) como **irrestrito** ( $S \subseteq \mathfrak{R}^n$ ). Suponha que  $\bar{\mathbf{x}} \in S$  é uma solução ótima local para o problema, então  $\bar{\mathbf{x}}$  é uma solução ótima global.

**Teorema:** Suponha que  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : F(\mathfrak{R}^m) \times \mathfrak{R}^n \rightarrow F(\mathfrak{R})$ , com  $\tilde{\mathbf{a}} \in F(\mathfrak{R}^m)$  e  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ , seja duas vezes diferenciável em  $\bar{\mathbf{x}}$ .

1. Se existe um vetor  $\mathbf{d}$  tal que  $\nabla \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} \preceq \tilde{\mathbf{0}}$ , então existe um  $\delta > 0$  tal que  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) \preceq \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$  para cada  $\lambda \in (0, \delta)$ , onde  $\mathbf{d}$  é uma direção de descida de  $\tilde{f}$  em  $\bar{\mathbf{x}}$ ;
2. Se  $\bar{\mathbf{x}}$  é um mínimo local, então  $\nabla \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \cong \tilde{\mathbf{0}}$  e  $\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$  é semi-definida positiva.

A prova dos teoremas aqui elaborados são similares aos apresentados em [bs-1993]. Os resultados até aqui apresentados compõem a parte teórica dos métodos de **otimização irrestrita**.

Considere agora os seguintes **problemas restritos** com parâmetros fuzzy na função objetivo:

Min. $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ S. a $g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in [1, m]$ (2.a) $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$	Min. $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ S. a $h_i(\mathbf{x}) = 0, i \in [1, l]$ (2.b) $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$	Min. $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ S. a $g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in [1, m]$ (2.c) $h_i(\mathbf{x}) = 0, i \in [1, l]$ $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$
--	---	---

Na seção 3 veremos métodos que trabalham com problemas do tipo (2.a), do tipo (2.b) e do tipo (2.c). Contudo, para maior praticidade, abrangeremos a parte teórica para problemas restritos considerando o tipo (2.c). Vale lembrar que em cada um destes problemas podemos encontrar restrições lineares e restrições não-lineares.



Considere abaixo as seguintes definições que serão usadas na apresentação dos resultados obtidos independentemente por Karush (1939) e por Kuhn and Tucker (1951) – **as condições de otimalidade de KKT**.

**Definições:**

1. Uma restrição de desigualdade  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$  se diz ativa em um ponto  $\bar{\mathbf{x}}$  se  $g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ ; o conjunto de índices para as restrições ativas é dado por  $I = \{i : g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$ .
2. Um ponto  $\bar{\mathbf{x}}$  satisfazendo  $g_i(\bar{\mathbf{x}}) \leq 0$ , para  $i \in [1, m]$ , e  $h_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ , para  $i \in [1, l]$ , se diz *regular* se os vetores gradientes  $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$ , para  $i \in I$ , e  $\nabla h_i(\bar{\mathbf{x}})$ , para  $i \in [1, l]$ , são linearmente independentes.
3. A *função Lagrangiana com parâmetros fuzzy* associada ao problema (2.c) é dada por:

$$\tilde{L}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}; \mathbf{v}, \rho) = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m v_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \rho_i h_i(\mathbf{x}),$$

onde  $v_i$  e  $\rho_i$  são os multiplicadores de Lagrange para as restrições de desigualdade e de igualdade, respectivamente.

4. Uma restrição ativa se diz *não-degenerada* se os correspondentes multiplicadores de Lagrange são estritamente positivos.

Considere agora as extensões das **Condições de KKT** para problemas de programação não-linear com parâmetros fuzzy.

- **Condições Necessárias de 1ª ordem de KKT:** Seja  $\bar{\mathbf{x}}$  um ponto regular para as restrições do problema (2.c), e suponha que as funções  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ ,  $g_i(\mathbf{x})$ , para  $i \in [1, m]$ , e  $h_i(\mathbf{x})$ , para  $i \in [1, l]$ , do problema (2.c) sejam diferenciáveis. Se  $\bar{\mathbf{x}}$  é um ponto de mínimo local do problema (2.c), então existem multiplicadores de Lagrange  $v_i \geq 0$ , para  $i \in [1, m]$  e  $\rho_i$ , para  $i \in [1, l]$ , tais que:

$$\nabla \tilde{L}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}; \mathbf{v}, \rho) = \nabla \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m v_i \nabla g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \rho_i \nabla h_i(\mathbf{x}) \cong \tilde{\mathbf{0}}, \quad (3.a)$$

$$v_i g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i \in [1, m]. \quad (3.b)$$

- **Condições Necessárias de 2ª ordem:** Suponha que a função  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : F(\mathfrak{R}^m) \times \mathfrak{R}^n \rightarrow F(\mathfrak{R})$  e as funções  $g_i(\mathbf{x}) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , para  $i \in [1, m]$ , e  $h_i(\mathbf{x}) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , para  $i \in [1, l]$ , são duas vezes diferenciáveis, e seja  $\bar{\mathbf{x}}$  um ponto regular para as restrições do problema (2.c). Se  $\bar{\mathbf{x}}$  é um ponto de mínimo local para o problema (2.c), então existem multiplicadores de Lagrange  $v_i \geq 0$  para  $i \in [1, m]$  e  $\rho_i$  para  $i \in [1, l]$ , tais que as condições em (3) se verificam, e a matriz Hessiana:

$$\nabla^2 \tilde{L}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}; \mathbf{v}, \rho) = \nabla^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} v_i \nabla^2 g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^l \rho_i \nabla^2 h_i(\bar{\mathbf{x}}) \quad (4)$$

é semi-definida positiva fuzzy, logo,  $\mathbf{y}' \nabla^2 \tilde{L}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}; \mathbf{v}, \rho) \mathbf{y} \succeq \tilde{\mathbf{0}}$ , para  $\forall \mathbf{y} \in M$  e  $M = \{\mathbf{y} \neq \mathbf{0} : \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})' \mathbf{y} \leq 0, \text{ para } i \in I, \nabla h_i(\bar{\mathbf{x}})' \mathbf{y} = 0, \text{ para } i = 1, \dots, l\}$ .

- **Condições Suficientes de 2ª ordem:** Seja  $\bar{\mathbf{x}}$  um ponto regular para as restrições do problema (2.c). Suponha que existam multiplicadores de Lagrange  $v_i \geq 0$  para  $i \in [1, m]$  e  $\rho_i$  para  $i \in [1, l]$ , tais que as condições em (3) se verificam, e que a matriz Hessiana (4) seja semi-definida positiva fuzzy. Então  $\bar{\mathbf{x}}$  é um ponto de mínimo local para (2.c).

Os resultados desta seção compõem a parte teórica dos métodos de otimização apresentados na seção 3.



### 3. Métodos de Programação Não-Linear com Parâmetros Fuzzy

Nesta seção apresentaremos as modificações propostas em alguns métodos clássicos de programação não-linear para funções com parâmetros fuzzy na função objetivo. Assim, foram implementados métodos de otimização irrestrita (métodos de busca unidimensional e multidimensional) e métodos de otimização com restrição (método de função penalidade e função barreira, e método de direções viáveis).

#### 3.1 Métodos de Programação Não-Linear Irrestrita

Apresentamos aqui duas *classes* de métodos: métodos de busca unidimensional e multidimensional. Para cada classe foram implementados métodos de busca **sem** o uso de derivadas e **com** o uso de derivadas, baseando-se nos algoritmos dados em [bs-1993].

##### 3.1.1 Métodos de Busca Unidimensional

Os primeiros métodos de busca unidimensional implementados foram aqueles que **não** usam derivadas: **Dicotômico**, **Seção Áurea** e **Fibonacci**. Para esta classe de métodos, a única *ferramenta fuzzy* usada foi a comparação entre funções fuzzy (números fuzzy – pois cada função retorna um número fuzzy). Usamos o **Primeiro Índice de Yager** como em [bd-1985] para efetuar tal comparação.

Implementamos também métodos que usam as derivadas das funções a serem otimizadas em seus algoritmos: **método da Bisseção**, **método de Newton** e **da Falsa Posição**.

No método da Bisseção usou-se dois tipos de critérios de parada: o tamanho do intervalo de incerteza e, no caso ordinário,  $f'(x) = 0$ . O último critério envolve uma comparação fuzzy, isto é,  $\tilde{f}'(\tilde{a}; x) \cong \tilde{0}$ . Neste caso, o algoritmo pára quando  $(\tilde{f}')^\alpha \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  para algum  $\alpha \in [0, 1]$ , e  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

Nos métodos de Newton e da Falsa Posição, a comparação fuzzy é desnecessária durante a execução do algoritmo. Porém, o ponto  $x_k$  torna-se um número fuzzy durante sua atualização, devido ao tipo de aproximação usada (veja [bs-1993] e [lu-1989]). A fim de evitar a propagação fuzzy, usamos um método de busca sem o uso de derivadas para obter  $x_k$  ordinário.

Dado  $\tilde{x}_k$  fuzzy, este pode ser denotado por intervalos de confiança e seus  $\alpha$ -cortes, como em [kg-1991], onde  $\tilde{x}_k^\alpha = [x_{k,1}^\alpha, x_{k,2}^\alpha]$ . Assim, usando um método de busca sem derivada, como mencionado acima, otimizamos o seguinte sub-problema:  $\min \tilde{f}(\tilde{a}; y)$  sujeito a  $y \in \tilde{x}_k^{\alpha_p}$ . O parâmetro  $\alpha_p$  é conhecido como  $\alpha$ -preferência, e usa-se normalmente o valor de 0.75.

##### 3.1.1 Métodos de Busca Multidimensional

Para esta classe de problemas implementamos somente um método sem o uso de derivadas, o **método de Rosenbrock**, como em [bs-1993]. Este método, similar aos métodos de busca unidimensional, usa somente a comparação entre números fuzzy, como ferramenta adicional para otimização de funções multidimensionais fuzzy, pois retorna uma solução  $\mathbf{x}_k$  ordinária.

Entre os métodos de *busca multidimensional* que usam derivadas, implementamos: **método de Newton**, **Máxima Descida** e **Gradiente Conjugado**.

A iteração do método de Newton, como no caso unidimensional, retorna  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  fuzzy. Novamente, o transformaremos em um valor ordinário. A atualização de  $\mathbf{x}_k$  é dada por  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k$ , onde  $\mathbf{d}_k = -\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)^{-1} \nabla \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)$ . Note que  $\mathbf{d}_k$  é um vetor com componentes fuzzy. Para simplificar a notação, denotamos  $\mathbf{d}_k$  como intervalos de confiança e seus  $\alpha$ -cortes, como em



[kg-1991]:  $\mathbf{d}^\alpha = [\mathbf{d}_1^\alpha, \mathbf{d}_2^\alpha]$ , para  $\alpha \in [0,1]$ . Assim,  $\mathbf{d}_k$  pode ser discretizado usando o algoritmo 1 abaixo, sem o passo 2 e modificando o passo 3 para:  $\mathbf{x}_{k+1} = \left\{ \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_j : \min_{j \in J} [\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_j)] \right\}$ .

Nos métodos de Máxima Descida e Gradiente Conjugado,  $\mathbf{x}_k$  é atualizado por  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k$ , onde  $\lambda_k$  é a solução do problema:  $\min_{\lambda} \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k)$ , e  $\mathbf{d}_k$  é uma direção de descida. Cada um destes métodos é caracterizado por diferentes maneiras de se obter  $\mathbf{d}_k$ , como pode ser verificado em [bs-1993]. Novamente, estes métodos fornecem  $\mathbf{d}_k$  como um vetor com



A restrição  $\nabla \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})^T \mathbf{d} - z \leq 0$  é discretizada e calculada como nos passos de Inicialização e passo 1 do algoritmo 1. Para resolver o problema (5) discretizado usamos o software “*LP Solve*”, versão 3.2 (vide [be-1999]), e então, tomamos  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k$  como aquele que mais minimiza o problema, ou seja,  $\mathbf{x}_{k+1} = \left\{ \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_j : \min_{j \in J} [\tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_j)] \right\}$ . Obtemos  $\lambda_k$  resolvendo:  $\min_{\lambda} \tilde{f}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}_k)$ , sujeito a  $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ , sendo  $\lambda_{\max} = \sup \{ \lambda : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \text{ para } i = 1, \dots, m \}$ . O algoritmo é finalizado quando  $z = 0$ .

#### 4. Resultados e Comentários

Foram implementados os algoritmos apresentados na seção 3, e para este propósito, desenvolvemos uma classe em C++ que modela o conceito de números fuzzy, bem como as operações aritméticas correspondentes, baseando-se em [kg-1991].

Apresentaremos a seguir, os problemas testes e seus respectivos resultados através de tabelas. A coluna  $\tilde{f}(\bar{x})$  mostra o valor da função objetivo fuzzy calculada no ponto  $\bar{x}$ , e como este resultado é um número fuzzy, o primeiro número apresentado é seu o valor modal, o segundo e o terceiro valores são os seus limites inferior e superior, respectivamente.

Para os métodos de busca unidimensional, usamos o seguinte problema:

$$\min \{ x \in [1, 9] : \tilde{f}_1(x) = \tilde{a}x^2 - \tilde{b}x + \tilde{c}, \tilde{a} = 0.75, \tilde{b} = 6, \tilde{c} = 13 \},$$

onde cada coeficiente fuzzy teve uma perturbação de 1%. A tabela 1 mostra os resultados obtidos, sendo que nas três primeiras linhas obtemos os resultados para os métodos de busca sem o uso de derivadas, e estes mantiveram-se semelhantes ao caso ordinário, e nas três últimas linhas, os resultados para os métodos de busca com o uso de derivadas, obtendo assim, resultados mais precisos.

Métodos	Mínimo de $\tilde{f}_1$		Iterações
	$\bar{x}$	$\tilde{f}_1(\bar{x})$	
Dicômico	3.9999	(1; 0.51, 1.49)	17
Seção Áurea	4.0000	(1; 0.51, 1.49)	25
Fibonacci	3.9999	(1; 0.51, 1.49)	24
Bisseção	4	(1; 0.51, 1.49)	03
Newton	4	(1; 0.51, 1.49)	02
Falsa Posição	3.99998	(1; 0.51, 1.49)	02

Tabela 1: Resultados obtidos para métodos de Busca Unidimensional.

Para os métodos de busca multidimensional usamos três funções para os testes:  $\tilde{f}_2(\mathbf{x}) = (x_1 - \tilde{2})^4 + (x_1 - \tilde{2}x_2)^2$ ,  $\tilde{f}_3(\mathbf{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + 1\tilde{0}0(\tilde{1} - x_1)^2$  (esta é uma variação da função de Rosenbrock) e  $\tilde{f}_4(\mathbf{x}) = (x_1 + 1\tilde{0}x_2)^2 + \tilde{5}(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - \tilde{2}x_3)^4 + 1\tilde{0}(x_1 - x_4)^4$ , a função de Fletcher-Powell (estas funções foram obtidas de [hi-1972]). Os coeficientes fuzzy de  $\tilde{f}_2$ ,  $\tilde{f}_3$  e  $\tilde{f}_4$  tiveram uma perturbação de 10%. As tabelas 2, 3 e 4 mostram os resultados obtidos.

Métodos	$x_{\text{inicial}}$	Mínimo de $\tilde{f}_2$		Iterações
		$\bar{x}$	$\tilde{f}_2(\bar{x})$	
Rosenbrock	(-1.2, 1)	(2; 1)	( $2.6467 \times 10^{-19}$ ; -0.041601, 0.041602)	02
Máx. Descida		(2.0736, 1.0368)	( $2.9401 \times 10^{-5}$ ; -0.45589, 0.048607)	04
Newton		(1.9633, 0.9818)	( $2.0147 \times 10^{-6}$ ; -0.040727, 0.041875)	07
Grad. Conjugado		(2.071, 1.0355)	( $2.5431 \times 10^{-5}$ ; -0.045459, 0.048287)	02

Tabela 2: Resultados obtidos para os métodos de Busca Multidimensional para  $\tilde{f}_2$ .



Métodos	$x_{\text{inicial}}$	Mínimo de $\tilde{f}_3$		Iterações
		$\bar{x}$	$\tilde{f}_3(\bar{x})$	
Rosenbrock	(-1.2, 1)	(1, 1.0008)	$(6.7964 \times 10^{-5}; -0.0099, 0.010075)$	03
Máx. Descida		(1, 1)	$(6.4774 \times 10^{-9}; -0.01, 0.01)$	02
Newton		(1, 1)	$(1.9746 \times 10^{-10}; -1.1, 1.1)$	03
Grad. Conjugado		(0.9999, 1.0038)	$(1.4534 \times 10^{-5}; -1.1, 1.1)$	01

Tabela 3: Resultados obtidos para os métodos de Busca Multidimensional para  $\tilde{f}_3$ .

Métodos	Mínimo de $\tilde{f}_4$ ( $x_{\text{inicial}} = (-3, -1, 0, 1)$ )		It.
	$\bar{x}$	$\tilde{f}_4(\bar{x})$	
Rosenbrock	(0.0102, -0.00102, 0.0043, 0.0043)	$((2.184; 1.105, 3.4246) \times 10^{-8})$	26
Máx. Descida	(-0.0445, 0.0045, -0.03099, -0.0311)	$((1.9893; 1.8972, 2.0836) \times 10^{-10})$	20
Newton	(0.04305, -0.0043, 0.0264, 0.0265)	$((1.1438; 1.0857, 1.2104) \times 10^{-5})$	24
Grad. Conjugado	(-0.0536, 0.0106, -0.0536, -0.0543)	(0.000269, 0.00026, 0.000278)	10

Tabela 4: Resultados obtidos para os métodos de Busca Multidimensional para  $\tilde{f}_4$ .

Nas tabelas 2, 3, 4, verificamos que os métodos de busca multidimensionais fornecem soluções melhores em relação ao número de iterações e precisão, quando comparados às respectivas funções ordinárias. Somente para o método de Newton obtivemos um desempenho semelhante à função ordinária associada.

Para os métodos de função Penalidade, função Barreira e Topkis e Veinott resolvemos os problemas:  $p_1$  (extraído de [hi-1972]) e  $p_2$  (extraído de [bs-1993]), como segue abaixo. No método de função Penalidade usamos:  $\eta_0 = 1$  e a cada iteração atualizamos  $\eta_{k+1} = 10 \cdot \eta_k$ ; e na função barreira usamos:  $\vartheta_0 = 10$  e a cada iteração  $\vartheta_{k+1} = 0.1 \cdot \vartheta_k$ .

$$p_1 = \begin{cases} \min & \tilde{f}(\mathbf{x}) = (x_1 - \tilde{2})^2 + (x_2 - \tilde{1})^2 \\ \text{S. a} & x_1^2 - x_2^2 \leq 0 \\ & x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$p_2 = \begin{cases} \min & \tilde{f}(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\ \text{S. a} & x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ & 2x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Métodos	Prob.	$x_{\text{inicial}}$	Solução dos problemas		It.
			$\bar{x}$	$\tilde{f}(\bar{x})$	
Fç. Penalidade	$p_1$	(0.5, 0.5)	(1.0003, 1.0002)	(0.99932; 0.62946, 1.4492)	03
Fç. Barreira	$p_1$	(0.5, 0.5)	(0.99972, 0.99953)	(1.0006; 0.63045, 1.4508)	06
Topkis e Veinott	$p_1$	(0.5, 0.5)	(0.99756, 0.99512)	(1.0049; 0.63394, 1.4569)	06

Tabela 5: Resultados obtidos para o problema  $p_1$ .



Métodos	Prob.	$x_{\text{inicial}}$	Solução dos problemas		It.
			$\bar{x}$	$\tilde{f}(\bar{x})$	
Fç. Penalidade	$p_2$	(0, 0.75)	(0.66003, 0.86823)	(-6.6167; -7.7541, -5.4792)	03
Fç. Barreira	$p_2$	(0.01, 0.75)	(0.65882, 0.8682)	(-6.6128; -7.7492, -5.4164)	06
Topkis e Veinott	$p_2$	(0, 0.75)	(0.62394, 0.875211)	(-6.5286; -7.6436, -5.4136)	04

Tabela 6: Resultados obtidos para o problema  $p_2$ .

Nas tabelas 5 e 6 notamos que os resultados obtidos são compatíveis e um número menor de iterações é obtido, em comparação ao caso ordinário associado. Na tabela 6 o ponto inicial ( $x_{\text{inicial}}$ ) para a função Barreira é diferente dos demais métodos para garantir convergência.

Os resultados aqui apresentados mostram claramente que os algoritmos adaptados para a realidade fuzzy são eficientes para resolver problemas de programação não-linear com coeficientes fuzzy na função objetivo.

Estas técnicas podem ser vistas como uma poderosa ferramenta, pois:

- i. em alguns problemas não conhecemos exatamente os valores para alguns (ou para todos) coeficientes;
- ii. em problemas de difícil resolução, o processo de *fuzzificação* dos coeficientes da função ordinária, nos fornece um problema relaxado, que nos permite encontrar uma solução de maneira mais fácil;
- iii. dada esta relaxação, para alguns problemas podemos encontrar (e foram encontradas) soluções melhores, quando comparadas à solução da função ordinária.

### Referências Bibliográficas

- [bd-1985] Bortolan, G. e Degani, R.. A review of some methods for ranking fuzzy subsets, *Fuzzy Sets and Systems* **15**: 1-19, 1985.
- [be-1999] Berkellar, M. *LP Solve 3.2*, obtido em ftp://ftp.ics.ele.tue.nl/pub/lp\_solve, 1999.
- [bs-1993] Bazaraa, M. S., Sheralli, H. D. e Shetty, C. M.. *Nonlinear Programming: Theory and Applications*, second edn, John Wiley & Sons, 1993.
- [db-1982] Dubois, D. e Prade, H.. Toward Fuzzy Differential Calculus part 3: Differentiation, *Fuzzy Sets and Systems*, **8**(3):225-233, 1982.
- [hi-1972] Himmelblau, D. M.. *Applied Nonlinear Programming*, McGraw-Hill Book Company, 1972.
- [ka-1987] Kaleva, O., Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets and Systems*, **24**: 301-317, 1987.
- [kg-1991] Kaufmann, A. e Gupta, M. M., *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications*, Van Nostrand Reinhold, 1991.
- [lu-1989] Luenberger, D. G., *Linear and Nonlinear Programming*, second edn, Addison-Wesley Publishin Company, 1989.
- [pg-1998] Pedrycz, W. e Gomide, F.. *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*. A Bradford Book, 1998.
- [tl-1988] Trappey, J. –F, Liu, C. R. e Chang, T. –T.. Fuzzy non-linear programming: Theory and applications in manufacturing, *Int. J. Prod. Res.*, **26** (5): 975-985, 1988.