



MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS APLICADO A PROBLEMAS DE SEQUENCIAMENTO: ESTUDO DO PARÂMETRO M

Ricardo S. de Camargo

rcamargo@dep.ufmg.br

Departamento de Engenharia de Produção
Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte – MG

Carlos Roberto V. de Carvalho

carlos@dep.ufmg.br

Departamento de Engenharia de Produção
Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte – MG

Resumo

Desde a década de 50, o problema de seqüenciamento de sistemas de manufaturas tem sido assunto de extensas pesquisas. Todas possuindo o mesmo objetivo, a alocação de um ou mais recursos em atividades num intervalo de tempo. A aplicação do método de decomposição de Benders em problemas de seqüenciamento não é novo, já tendo sido utilizado por Balas (1967), entretanto os autores desconhecem trabalhos relacionados ao problema e ao método que investigam a influência do valor do parâmetro M na resolução do Problema Mestre (PM) do método da decomposição de Benders. Normalmente, assume-se para o valor do parâmetro M um valor suficientemente grande (Geoffrion (1972)), porém o que vem a ser “suficientemente grande”? Será que não existe um valor melhor? O presente trabalho apresenta resultados preliminares da aplicação do método de decomposição de Benders a problemas de seqüenciamento.

Palavras-chave: problemas de seqüenciamento; método de decomposição de Benders; programação inteira mista.

Abstract

Since the 50's, scheduling problems have been largely discussed in a great number of researchs. All of them having the same goal: to allocate one or more resources to activities in time. The use of Benders decomposition in scheduling problems is not new, been done already by Balas (1967). However, the authors do not know any work that discuss the influence of the M parameter's value in the resolution of Benders decomposition method. Usually, the M parameter equal to a sufficiently large value (Geoffrion (1972)). But what does “sufficiently large” mean? Is there another value and better? The present work is a preliminary study of the use of Benders decomposition to scheduling problems.

Key-words: scheduling problems; Benders decomposition method; mixed interger programming



Problema de Seqüenciamento

Num problema de seqüenciamento da produção, trabalhos devem ser processados em máquinas com o objetivo de minimizar alguma função de término dos tempos de execução, sujeitos às restrições que: (i) prescrevem uma seqüência tecnológica de fabricação para cada trabalho e; (ii) cada máquina processa apenas um trabalho de cada vez. O processamento do trabalho numa máquina é chamado de operação, e a duração de sua execução (tempo de processamento) é constante. A condição (i) é também conhecida como restrições conjuntivas, enquanto que a condição (ii) é conhecida como restrições disjuntivas. O objetivo aqui escolhido é o de minimizar o tempo necessário para executar todos os trabalhos, também chamado de *makespan*.

Sejam então: $N = \{0, 1, \dots, n\}$ o conjunto de operações com 0 e n representando as operações fictícias de início e término do seqüenciamento, respectivamente; M o conjunto de máquinas; A o conjunto de pares de operações representando as relações de precedência da condição (i), acima; E o conjunto de pares de operações a serem executadas numa máquina k e que não podem se sobrepor no tempo, segundo a condição (ii). Além disso, sejam $p_i > 0$ e t_i o tempo de processamento e a data de início da operação i , respectivamente. Ilustrando este tipo problema, tem-se um exemplo a seguir.

Exemplo 1: (Balas 1967 e 1985). Três itens ou trabalhos devem ser processados em duas máquinas. O tempo de processamento em cada máquina e a indexação das operações são dados na tabela 1.

Tabela 1: Tempos de processamento

Trabalho	Operação _i : Máquina (p_i)	
1	$o_1 : 1 (7)$	$o_2 : 2 (11)$
2	$o_3 : 1 (10)$	$o_4 : 2 (5)$
3	$o_5 : 1 (9)$	$o_6 : 2 (8)$

A formulação matemática para o problema de seqüenciamento pode ser dado por (Manne (1960) e Balas (1998)):

$$(P) \quad \min t_n, \quad (1)$$

sujeito a:

$$t_j - t_i \geq p_i, \quad (i,j) \in A, \quad (2)$$

$$t_j - t_i \geq p_i \vee t_i - t_j \geq p_j, \quad (i,j) \in E, \quad (3)$$

$$t_i \geq 0, \quad i \in N.$$

Onde a função objetivo, dada por (1), é a de minimizar o tempo total de execução de todas as operações, representado pela data de início da operação fictícia n . A inequação (2) representa a condição (i), enquanto que a inequação (3) representa a condição (ii). Qualquer solução viável de (P) é chamada de um seqüenciamento viável.

Uma outra forma muito comum e útil de representação deste problema é a representação por um grafo potencial-tarefas disjuntivo $G = (N, A, E)$ com um conjunto de nós N , um conjunto de arcos orientados A e, um conjunto de arcos não orientados, mas orientáveis, E . O comprimento dos arcos depende da orientação dos mesmos, ou seja, se o arco $(i,j) \in A$, o comprimento será p_i ; mas se o arco $(i,j) \in E$, o mesmo poderá ser ou p_i ou p_j , dependendo de sua orientação. Isto é, se a operação i precede a operação j ($i \rightarrow j$), tem-se p_i ; ou, no caso contrário, se a operação j precede a operação i ($i \leftarrow j$), tem-se p_j . Uma solução viável de (P) resulta num grafo orientado parcial $G = (N, A, S)$ de $G = (N, A, E)$, onde S representa o conjunto que possui apenas um dos membros de cada par de arco disjuntivo de E .

A figura 1 mostra o grafo disjuntivo $G = (N, A, E)$ do problema exemplo 1. As linhas pontilhadas curvas destacam o conjunto de operações executadas em uma mesma máquina, as setas pontilhadas representam os arcos disjuntivos, enquanto as setas sólidas representam os arcos conjuntivos. Cada arco é valorado com o tempo de processamento da operação que está na origem do arco. A figura 2



mostra o grafo $G = (N, A, S)$ que representa uma das possíveis soluções viáveis para o problema. Os arcos em negrito destacam o caminho crítico da operação 0 até 7. O tempo total de execução das operações deste exemplo é igual 37 unidades de tempo.

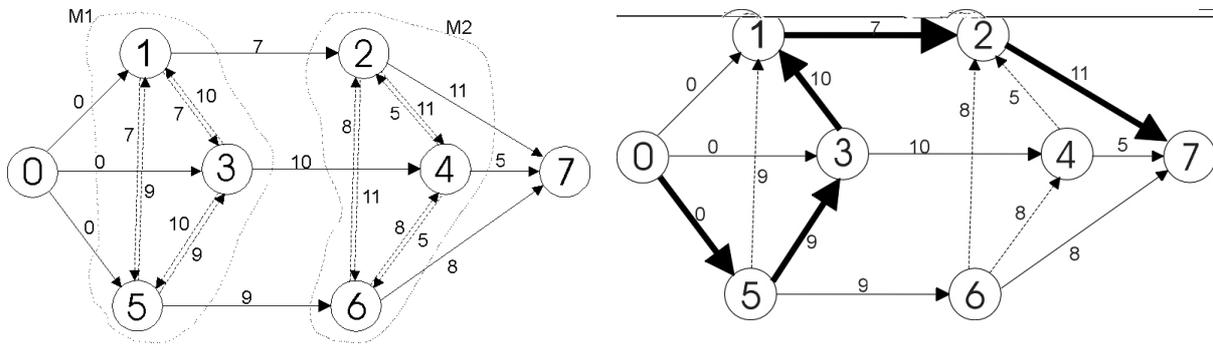


Figura 1: Grafo potencial-tarefas disjuntivo

Figura 2: Grafo potencial-tarefas de uma solução

Uma representação, bastante conhecida, de uma solução para o problema de seqüenciamento é o gráfico de Gantt. A figura 3 mostra esta representação para uma solução do problema *exemplo 1*. Neste diagrama, os retângulos com traçado sólido representam a duração da execução das operações em cada máquina. Os retângulos com traçado pontilhado representam o tempo durante o qual as máquinas não executam nenhuma operação, também conhecido como tempo morto. Ainda nesta representação, usando um método de identificação de caminho crítico (ver Roy (1964)), pode se identificar um caminho crítico. Nesta solução, este é formado por: $\mu = \{5, 3, 1, 2\}$

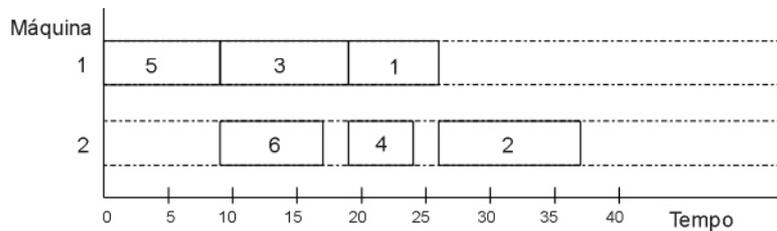


Figura 3: Gráfico de Gantt de uma solução viável

Na próxima seção, uma reformulação das inequações do problema (P) é realizada.

Rescrevendo o Problema

Manne (1960) faz uso da programação linear inteira para modelar o problema de seqüenciamento (P). Para esta formulação, uma nova variável binária y_{ij} é definida para cada um dos pares de operação que são executadas numa mesma máquina, (i. e. $\forall (i,j) \in E$), tal que:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se operação } i \text{ precede operação } j \text{ numa máquina } k \\ 0 & \text{se operação } j \text{ precede operação } i \text{ numa máquina } k \end{cases}$$

Desta forma, o problema pode ser escrito com as seguintes inequações:



$$(PA) \quad \min t_n,$$

Sujeito a:

$$t_j - t_i \geq p_i, \quad (i,j) \in A, \quad (4)$$

$$t_j \geq t_i + p_i - M(1 - y_{ij}), \quad (i,j) \in E, \quad (5)$$

$$y_{ij} + y_{ji} = 1, \quad \forall \{(i,j);(j,i)\} \subset E, \quad (6)$$

$$t_i \geq 0, \quad i \in N.$$

onde a inequação (4) representa as restrições de seqüência tecnológica (condição (i)). A inequação (5) e (6) representam as restrições disjuntivas do problema. Nesta formulação, supõe-se o conhecimento de um limite superior, parâmetro M , igual a duração total de execução de todas as operações ou suficientemente grande (Balas (1967)).

O problema (PA) é conhecido como um problema de difícil resolução (NP-completo, Garey e Johnson (1979)). Experiências práticas realizadas por Jurisch (1992), Perregaard (1995) e Balas (1998) mostram que este é um dos problemas de análise combinatória dos mais difíceis. Isto é ilustrado pelo fato que instâncias envolvendo 10 trabalhos e 10 máquinas, propostos por Fisher e Thompson (1963) continuam sem serem resolvidos. Informações mais detalhadas sobre o problema, complexidades e métodos de resolução podem ser encontrados com facilidade na literatura especializada, como por exemplo em Baker (1974), em Rinnooy Kan (1976), em Blazewicz *et ali* (1996), em Conway *et al.* (1967) e em French (1982).

Na próxima seção, é mostrado como o método de decomposição de Benders pode ser aplicado ao problema de seqüenciamento (PA). Esta formulação de Benders é inspirada no trabalho de Carvalho (1998) e pode ser encontrada com maiores detalhes em Camargo (2002).

Método de Decomposição de Benders Aplicado ao Problema de Seqüenciamento

O método de decomposição de Benders se mostra apropriado para a resolução de problemas de programação matemática com variáveis mistas (Benders (1962) e Geoffrion (1972)) cujas estruturas permitem a fixação temporária de algumas variáveis. Este procedimento conduz a um algoritmo iterativo de geração de restrições que, após um número finito de iterações, obtém ou uma solução ótima (finita), ou a conclusão que não há uma solução viável para o problema.

Ao aplicar-se o método de decomposição de Benders no problema de seqüenciamento, têm-se duas fases alternadas: na primeira fase, determina-se a orientação dos pares de arcos disjuntivos $(i,j) \in E$ resolvendo-se um problema linear misto com variáveis 0-1, y_{ij} , e uma variável contínua, y_0 , conhecido como Problema Mestre Relaxado (PMR); na segunda fase, resolve-se um problema linear (SP) com variáveis contínuas, não negativas, t_i ($i \in N$) e t_n , (datas de início das operações) conhecido com Subproblema (SP). A cada iteração, a resolução do (SP) gera novas restrições conhecidas como cortes de Benders que enriquecem a definição do (PMR) da iteração seguinte. A figura 4 ilustra a troca de informação entre estes dois problemas.

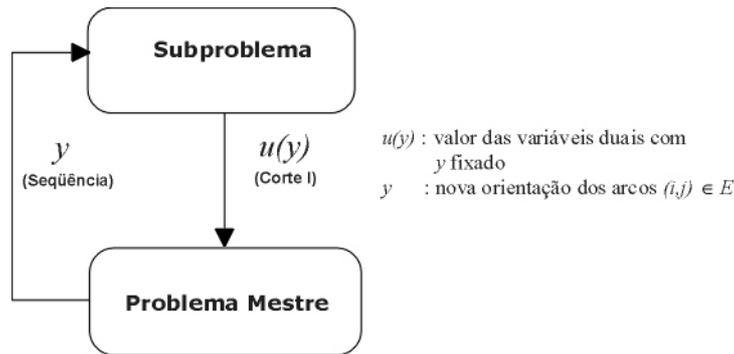


Figura 4: Troca de informações entre (SP) e (PM) – método de decomposição de Benders

Uma possível formalização do método da decomposição de Benders aplicado ao problema de seqüenciamento pode ser feita definindo-se o conjunto Y , dado por:

$$Y = \{y \in \{0,1\} : y_{ij} + y_{ji} = 1, \forall (i,j) \in E\}$$

e rescrevendo o problema (PA) na forma compacta:

$$\begin{aligned}
 \text{(PC)} \quad & \min t_n, \\
 \text{Sujeito a:} \quad & G(t_i, y) \leq 0, \quad i \in N \\
 & y \in Y,
 \end{aligned}$$

onde $G(t_i, y) = \mathbf{E}t_i + \mathbf{B} - \mathbf{M}(\mathbf{I} - y)$, e:

a) \mathbf{E} é uma matriz de dimensão $|E| \times |N|$, tendo cada linha associada a cada par de arco disjuntivo $(i,j) \in E$, na forma de:

$$\mathbf{E}_{ij} = \begin{bmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) \mathbf{B} é uma matriz de dimensão $|E| \times |N|$ com as linhas na forma de:

$$\mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} \dots & i & \dots \\ 0 & p_i & 0 \end{bmatrix}$$

c) \mathbf{M} é um parâmetro escalar ou uma matriz diagonal composta de \mathbf{M}_{ij} ;

d) \mathbf{I} é o vetor coluna:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in R^{|E|}$$

Para um vetor $y \in Y$ fixado, define-se a função:

$$v(y) = \inf_{i \in N} \{t_n : G(t_i, y) \leq 0\}$$

onde a minimização, com y fixado, é chamado de Subproblema, denotado por (SP). Segundo Geoffrion (1972), (PC) é equivalente ao problema (P') definido por:

$$\begin{aligned}
 \text{(P')} \quad & \min v(y), \\
 \text{Sujeito a:} \quad & y \in Y \cap V,
 \end{aligned}$$



- I) (SP) admite uma solução ótima (t_n^*, \bar{y}) de valor $v(\bar{y}) \leq \bar{y}_0$. Neste caso, como demonstrado por Geoffrion (1972), (\bar{y}_0, \bar{y}) é uma solução ótima de (PM) e, por consequência, (t_n^*, \bar{y}) é uma solução ótima de (PC);
- II) (SP) admite uma solução ótima (t_n^*, \bar{y}) de valor $v(\bar{y}) > \bar{y}_0$. Uma nova restrição (9) é introduzida em (PMR), obtendo-se um novo Problema Mestre Relaxado. Esta nova restrição é definida com o vetor de multiplicadores ótimos duais \bar{u}^h associados as restrições $G(t_i, \bar{y})$ de uma solução ótima do (SP).
- III) (SP) não possui uma solução viável. Neste caso, determina-se $\bar{\lambda} \in \Lambda$, tal que $\inf_{i \in N} \{G(t_i, \bar{y}) \cdot \bar{\lambda}\} > 0$ e introduz-se uma nova restrição (10), obtendo-se um novo (PMR).

Devido as características da estrutura do problema e sua representação por um grafo potencial-tarefas $G = (N, A, S)$ a cada solução do (SP), pode-se simplificar as inequações (9) (situação (II)) fazendo a simplificação de $y_{ij} + y_{ji} = 1$ (equação (6)) para $y_{ij} = 1 - y_{ji}$:

$$y_0 \geq v(\bar{y}) - M \sum_{(i,j) \in \mu} (1 - y_{ij}) \bar{u}_{ij} \quad (11)$$

onde $v(\bar{y})$ é o valor da função objetivo do problema (SP); \bar{u}_{ij} é o valor das variáveis duais do (SP) associadas as restrições dos arcos disjuntivos e $(i,j) \in \mu$ são os arcos disjuntivos pertencentes ao caminho crítico da solução de (SP). Voltando ao *exemplo 1*, para um vetor $y = \{y_{1,3} = 0; y_{1,5} = 0; y_{3,5} = 0; y_{2,4} = 0; y_{2,6} = 0; y_{4,6} = 0\}$ têm-se um grafo e um caminho crítico como o da figura 2. Com estes valores fixado para y_{ij} gera-se o (SP) mostrado na figura 5. Resolvendo-se (SP), obtêm-se os valores das variáveis primais e duais mostrados na figura 5, juntamente com o corte gerado a partir destas últimas. Caso haja mais de um caminho crítico em $G = (N, A, S)$, adiciona-se um *corte 1* (inequação (11)) para cada caminho.

min t_7

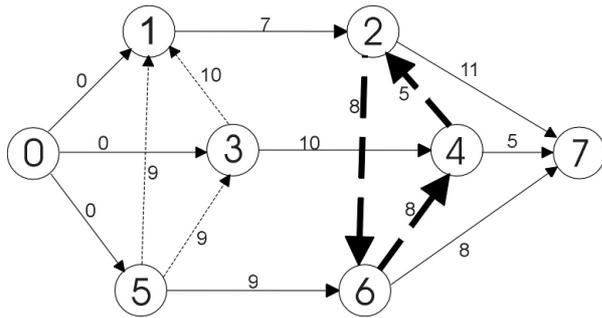
sujeito a:

(arcos conjuntivos) (arcos disjuntivo)

$$\begin{array}{ll} t_2 - t_1 \geq 7, & t_1 - t_3 \geq 10, \\ t_4 - t_3 \geq 10, & t_1 - t_5 \geq 9, \\ t_6 - t_5 \geq 9, & t_2 - t_6 \geq 8, \\ t_7 - t_2 \geq 11, & t_3 - t_5 \geq 9, \\ t_7 - t_4 \geq 5, & t_4 - t_2 \geq 5, \\ t_7 - t_6 \geq 8. & t_4 - t_6 \geq 8. \end{array}$$

Valor das variáveis primais de (SP):

$$t_1 = 19, t_2 = 26, t_3 = 9, t_4 = 19, t_5 = 0, t_6 = 9, t_7 = 37$$



$$y_{2,6} + y_{4,2} + y_{6,4} \leq 3 - I$$

como $y_{ij} = 1 - y_{ji}$

$$y_{2,6} + (1 - y_{2,4}) + (1 - y_{4,6}) \leq 2$$

$$y_{2,6} - y_{2,4} - y_{4,6} \leq 0$$

Figura 6: Eliminação de circuito

A prova da simplificação das inequações (9) e (10) pode ser encontrada em Camargo (2002).

Cálculo do Valor do Parâmetro M

Observando o (PMR), constata-se um número elevado de variáveis binárias y_{ij} , sendo esta uma das maiores dificuldades da resolução do método de decomposição de Benders aplicado ao problema de seqüenciamento. Desta forma, a investigação de formas de melhorar o desempenho da resolução do (PMR) é interessante. Uma das investigações possíveis e, portanto, foco deste trabalho, é a influência do valor do parâmetro M .

Considerando uma solução (\bar{y}_o, \bar{y}) de (PMR) e a forma do corte I , inequação (11), pode-se observar algumas características:

- a) se todos os componentes do vetor \bar{y} que aparecem num corte I , gerado numa iteração h , são iguais a 1. Neste caso, $y_o = v(\bar{y}^{-h})$, e o método pára com a solução ótima do problema (PA): $s^* = (t^*, \bar{y}^{-h})$.
- b) se, em todos os cortes I do (PMR), ao menos um componente do vetor \bar{y} é nulo. Neste caso, considera-se o corte I , obtido numa iteração h e que gera um valor de uma solução do problema mestre, como:

$$\bar{y}_o = v(\bar{y}^{-h}) - M \sum_{y_{ij}=1}^{-h} u_{ij} \tag{12}$$

Observando a equação (12), pode-se concluir que um pequeno valor para M implica num grande valor para \bar{y}_o . Para o método de Benders, \bar{y}_o representa o limite inferior do problema. Então, a determinação de um valor bem pequeno para M , tal que não se elimine nenhuma solução ótima do problema (PA), é interessante para a convergência do problema.

Sejam $s^* = (t^*, y^*)$ uma solução ótima para o problema (PA), t_n^* o valor ótimo da função objetivo e μ^* é um caminho crítico do grafo potencial-tarefas $G = (N, A, S_{y^*})$. Considerando as operações $i, j \in \mu^*$, tais que $(i,j) \in S_{y^*}$.

Pode-se escrever μ^* como uma união de 3 caminhos:

$$\mu^* = \mu_{o,i}^* \cup \mu_{i,j}^* \cup \mu_{j,n}^*$$

onde:

- a) $\mu_{o,i}^* \in \mu^*$ é o caminho crítico entre o e i , representado por $l_{o,i}^*$;
- b) $\mu_{i,j}^* \in \mu^*$ é o caminho crítico entre i e j , representado por $l_{i,j}^*$;
- c) $\mu_{j,n}^* \in \mu^*$ é o caminho crítico entre j e n , representado por $l_{j,n}^*$.



O comprimento do caminho crítico μ^* pode ser então representado por:

$$l^* = l_{0,i}^* + l_{i,j}^* + l_{j,n}^* = \sum_{i \in \mu^*} p_i$$

onde:

$$l_{i,j}^* = \sum_{i \in \mu^*} p_i - l_{0,i}^* - l_{j,n}^* \quad (13)$$

Observa-se aqui, que a equação (13) é válida apenas para a solução s^* considerada. Analisa-se agora um limite inferior para $l_{i,j}^*$ para todas as soluções $s^* = (t^*, y^*) \in S^*$, onde S^* é o conjunto de soluções ótimas.

- a) $\sum_{i \in \mu^*} p_i$: este valor é igual a t_n^* , que é o mesmo para todos os s^* ;
- b) $l_{0,i}^*$: este valor depende da solução ótima $s^* = (t^*, y^*)$ consideradas, mas pode-se calcular um limite inferior para este valor. Seja $G = (N, A)$ um grafo potencial-tarefas parcial de $G = (N, A, E)$ onde apenas os arcos conjuntivos são representados. Seja $\mu_{0,i} \in G = (N, A)$, com o comprimento $l_{0,i}$, o caminho crítico entre 0 e i em $G = (N, A)$. É claro que:

$$l_{0,i}^* \geq l_{0,i} \quad \forall s^* \in S^*$$

podendo $l_{0,i}$ ser calculado pela expressão:

$$l_{0,i} = \sum_{i': j(i')=j(i)}^{i' < i} p_{i'}$$

Este valor representa a soma dos tempos de execução de todas as operações da seqüência tecnológica do $j(i)$ executadas antes da operação i ;

- c) $l_{j,n}^*$: da mesma maneira, tem-se a expressão:

$$l_{j,n}^* \geq l_{j,n} \quad \forall s^* \in S^*$$

onde $l_{j,n}$ é o comprimento do caminho crítico $\mu_{j,n} \in G = (N, A)$ entre as operações j e n . Assim como na letra b, este valor é dado pela soma dos tempos de execução de todas as operações da seqüência tecnológica de $j(j)$ executadas após a operação j , i.e.:

$$l_{j,n} = \sum_{i': j(j)=j(i')}^{i' > j} p_{i'}$$

Pode-se agora formular uma expressão que representa um limite superior do comprimento do caminho crítico entre i e $j \in N'$ tal que existe o arco disjuntivo $(i,j) \in E$. Esta expressão é dada pela inequação (14).

$$l_{i,j}^* \leq t_n^* - \sum_{i': j(i)=j(i')}^{i' < i} p_{i'} - \sum_{i': j(j)=j(i')}^{i' > j} p_{i'} \quad (14)$$

Então para cada par de arcos disjuntivos $(i,j) \in E$ pode-se calcular um limite superior para M_{ij} .

$$M_{i,j} \leq t_n^* - \sum_{i': j(i)=j(i')}^{i' < i} p_{i'} - \sum_{i': j(j)=j(i')}^{i' > j} p_{i'}$$

Como a cada iteração do método de Benders tem-se um valor para t_n^* , pode-se calcular então um limite superior para o valor de M . Com o uso de novo limite superior reduzem-se o número de iterações do método e o tempo de processamento, mostrados na próxima seção.



Experiências Computacionais

São considerados 2 grupos diferentes de problemas. O primeiro grupo possui problemas clássicos de seqüenciamento. O segundo grupo possui problemas que contêm uma característica específica: o grafo potencial-tarefas, que representa uma orientação completa, não possui circuitos entre as operações executadas em máquinas diferentes. Para realização dos testes, utilizou-se a biblioteca de otimização do **GLPK** (*Gnu Linear Programming Kit*) e o compilador C++ numa *Pentium II 266 MHz* com 256 MB de memória.

A tabela 2 apresenta as características dos problemas, onde n , m representam, respectivamente, o número de trabalhos e de máquinas. O número total de restrições do problema é representado pela soma das restrições conjuntivas e disjuntivas. O número de vetores y considerados representa o número de orientações completas do grafo potencial-tarefas possíveis para o problema.

Tabela 2: Características dos problemas

Problema	$n \times m$	Número de Restrições	Número de Variáveis Binárias	Número de Vetores y Viáveis
1.1	5 x 4	13 + 30	15	5.184
1.2	6 x 6	24 + 72	36	191.102.976
1.3	6 x 6	24 + 72	36	191.102.976
2.1	5 x 4	13 + 26	15	5.184
2.2	6 x 6	24 + 72	36	191.102.976
2.3	6 x 6	24 + 72	36	191.102.976

A tabela 3 apresenta os resultados dos testes preliminares realizados. Apesar de limitado o número de instâncias, os resultados são encorajadores.

Tabela 3 : Resultados dos testes com o novo valor de M

Problema	Solução Ótima	Sem Cálculo do Valor de M		Com Cálculo do Valor de M	
		Número de Iterações	CPU (s)	Número de Iterações	CPU (s)
1.1	13	50	0,59	27	0,37
1.2	36	92	2,84	45	1,03
1.3	35	26	0,25	24	0,37
2.1	13	52	0,72	20	1,70
2.2	43	218	24,79	49	1,70
2.3	47	226	22,91	69	2,74

Uma análise interessante destes resultados é o comportamento dos limites superiores e inferiores do método de decomposição de Benders. A figura 7 mostra a evolução dos limites para o problema P1.3. Pode-se observar que para os novos valores de M há uma convergência maior do método. A grande vantagem da utilização de um valor pequeno para M consiste no conhecimento da qualidade da solução de uma iteração qualquer do método. Por exemplo, para o problema P1.3, a iteração 10 possui o limite superior igual a 38 e o inferior igual a 34, estando a solução desta iteração a 11,4% do ótimo.

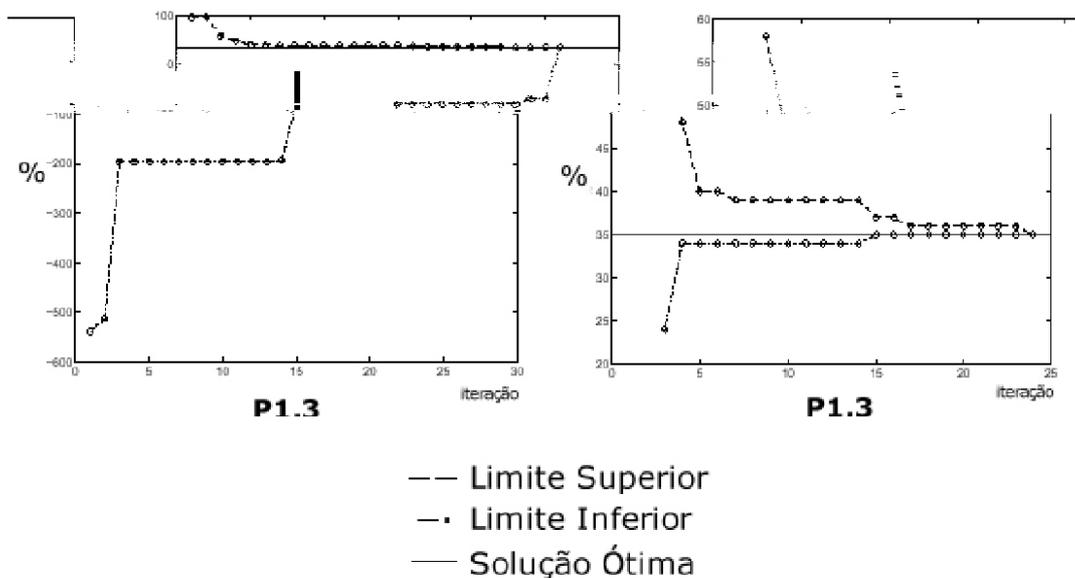


Figura 7: Evolução dos limites sem e com o cálculo do novo valor de M

Conclusão

Mesmo limitados os experimentos preliminares realizados até o presente momento, os mesmos se mostram encorajadores. Apesar de não resolver, ainda, instâncias maiores e reais, a aplicação do método de decomposição de Benders a problemas de seqüenciamento se mostra promissora devido a sua generalidade. É com facilidade que se aplica o método a problemas de seqüenciamento do tipo *job-shop*, *flow-shop* e uma máquina. Além disto, o cálculo do valor de M a cada iteração se mostrou muito importante na melhoria do desempenho do método, uma vez que diminuiu o tempo de processamento e o número de iterações na resolução das instâncias.

Bibliografia

- [1] Baker, K. R. (1974). Introduction to Sequencing and Scheduling. Wiley.
- [2] Balas, E. (1967). Discrete Programming by the Filter Method. *Operations Research*, **15**, 915-917
- [3] Balas, E. (1985). On The Facial Structure of Scheduling Polyhedra. *Mathematical Programming Study*, **24**, 179-218.
- [4] Balas, E. e Vazacopoulos, A. (1998). Guided Local Search with Shifting Bottleneck for Job-shop Scheduling. *Management Science*, **44**, 262-275.
- [5] Benders, J. F. (1962). Partitioning Procedures for Solving Mixed-variables Programming Problems. *Numerisch Mathematik*, **4**, 238-252.
- [6] Blazewicz, J., Ecker, K. H., Pesch, E., Schmidt, G. e Weglarz, J. (1996). Scheduling Computer and Manufacturing Processes. Springer-Verlag, Berlin.
- [7] Camargo, R. S. de (2002). Contribuições para a Modelagem da Integração dos Problemas de Planejamento Tático e Operacional. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil.
- [8] Carvalho, C. R. V. de (1998). Une Proposition D'Integration de La Planification et L'Ordonnancement de Production: Application de La Méthode de Benders. Tese de Doutorado, Université Blaise Pascal – Clermont II, França.
- [9] Conway, R. W., Maxwell, W. L. e Miller, L. W. (1967). Theory of Scheduling. Addison-Wesley, Reading.
- [10] Fisher, H. e Thompson, G. L (1963). Probabilistic Learning Combinations of Local Job-Shop Scheduling Rules. *Industrial Scheduling*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.



- [11] French, S. (1982). Sequencing and Scheduling: An Introduction to the Mathematics of the Job-shop. Ellis Horwood Limited.
- [12] Garey, M. R. e Johnson, R. E. (1979). Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. W. H. Freeman and Company, New York.
- [13] Geoffrion, A. M. (1972). Generalized Benders Decomposition. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **10** (4), 237-260.
- [14] Grötschel, M., Jünger, M. e Reinelt, G. (1985). Facets of the Linear Ordering Polytope. *Mathematical Programming*, **33**, 43-60.
- [15] Grötschel, M., Jünger, M. e Reinelt, G. (1985). On the Acyclic Subgraph Polytope. *Mathematical Programming*, **33**, 28-42.
- [16] Jurisch, B. (1992). Scheduling Jobs in Shops with Multi-Purpose Machines. Dissertação de Mestrado, Fachbereich Mathematik/Informatik, Universität Osnabrück.
- [17] Manne, A. S. (1960). On the Job-shop Scheduling Problem. *Operations Research*, **8**.
- [18] Manne, A. S. (1960). On The Job-shop Scheduling Problem. *Operations Research*, **8**.
- [19] Perregaard, M. (1995). Branch-and-Bound Methods for the Multi-Processor Job-shop and Flow-shop Scheduling Problems. Dissertação de Mestrado, University of Copenhagen, Denmark.
- [20] Rinnooy Kan, A. H. G. (1976). Machine Scheduling Problem: Classification, Complexity and Computations. Nyhoff, The Hague.
- [21] Roy, B. (1964). Contribution de la Théorie des Graphes a l'étude des Problèmes d'Ordonnancement. *Les Problèmes d'Ordonnancement, Applications et Méthodes*, Dunod, 109-125.