



## MODELOS MULTIOBJETIVO PARA DETERMINAÇÃO DE ALVOS NA ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS - DEA

**Lidia Angulo Meza**

Área de Pesquisa Operacional, Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, lidia@pep.ufrj.br

**Marcos Estellita Lins**

Área de Pesquisa Operacional, Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ

### **Resumo:**

A determinação de alvos para as DMUs ineficientes tem sido tratada por modelos com um único objetivo, principalmente através de estruturas de preferência expressas através de pesos. Estes modelos, não radiais, apresentam algumas dificuldades de implementação. Neste trabalho apresentamos modelos multiobjetivo para determinação destes alvos, onde são obtidas todas as possíveis projeções. As preferências do decisor também são levadas em conta, na escolha da solução mais preferida. Duas alternativas de modelos multiobjetivo que fornecem múltiplas vantagens sobre os modelos mono-objetivo que são apresentadas, sendo que a segunda alternativa fornece uma boa interação visual com o usuário.

**Palavras chave:** Análise Envoltória de Dados, determinação de alvos, Programação Linear Multiobjetivo.

### **Abstract:**

The determination of efficient targets for inefficient DMUs has been treated with models with a single objective, mainly throughout preference structure expressed with weights. This non radial models have some implementation difficulties. In this work we present multiple objective models to determine targets, where all the possible projections are obtained. Also, the decisor's preferences are taken into account in the selections of the most preferred solution. Two alternative multiobjective models that offer multiple advantages over the mono objective models are presented, given that the second offers a good visual interaction with the user.

**Keywords:** Data Envelopment Analysis, target setting, multiobjective linear programming.

### **1. Introdução**

A projeção equiproporcional ou alvo para uma DMU ineficiente foi uma abordagem dos modelos DEA clássicos que propõe uma projeção eficiente na fronteira (alvo) baseada na variação equiproporcional dos inputs ou outputs, com o objetivo de simplificar a modelagem. É uma projeção arbitrária porque não incorpora nenhum conceito que mostre ser esta projeção preferível a qualquer outra na fronteira, e tampouco leva em conta preferências do decisor na busca de um alvo eficiente. Este problema foi abordado na literatura DEA através dos modelos com estrutura de preferências propostos por Thanassoulis & Dyson (1992) e Zhu (1996).

A idéia da utilização da programação multiobjetivo surge a partir do conceito de Pareto eficiência que Análise Envoltória de Dados e a Programação Multiobjetivo compartilham. Ambas metodologias procuram um conjunto de unidades não comparáveis entre si, que são eficientes ou as melhores, em ao menos um aspecto ou função objetivo, que as outras. Isto é dedicam-se a caracterizar as faces eficientes do espaço de solução dos problemas (Stewart, 1996).

A utilização da programação multiobjetivo no contexto da Análise Envoltória de Dados não é nova, Golany (1988) utilizou um algoritmo que a cada passo calcula projeções eficientes dentro de um contexto de busca multiobjetivo interativa. Kornbluth (1991) também notou que os modelos DEA poderiam ser expressos como modelos de programação linear fracional multiobjetivo. Por outro lado, Joro, Korhonen & Wallenius (1998) fizeram uma comparação estrutural dos modelos DEA



padrão e do modelo multiobjetivo, utilizando o enfoque do ponto de referência, enfoque que é utilizado, por exemplo, pelo Pareto Race (Korhonen & Wallenius, 1988).

Uma metodologia baseada em um modelo multiobjetivo proposto por Halme et al. (1998) é chamada de Value Efficiency Analysis. Nesta metodologia utiliza-se o modelo multiobjetivo para determinar uma DMU, real ou virtual (mistura de DMUs), preferida pelo decisor ou usuário, denominada solução mais preferida (Most Preferred Solution – MPS). A partir desta, calcula-se a eficiência das outras DMUs como a distância à fronteira determinada por um modelo quase-DEA.

Li & Reeves (1999) apresentaram um modelo multiobjetivo que considera duas medidas de eficiência adicionais: a minimização do somatório das distâncias das DMUs à fronteira (minisum) e a minimização da maior distância (minimax), além da maximização do índice de eficiência padrão em DEA. Joro (1998) fez uma extensão do método Value Efficiency Analysis, mencionado acima, que utiliza um modelo multiobjetivo para determinação de alvos para as DMUs ineficientes.

O enfoque que agora apresentamos não somente calcula pontos eficientes alternativos, ou alvos eficientes, mas também introduz uma nova forma de caracterizar a estrutura de preferências do decisor através da determinação das regiões de indiferença de cada solução eficiente ou não dominada obtida pelos modelos multiobjetivo. Além disso, o modelo proposto permite visualizar melhor os alvos, viabilizando um ambiente de maior interação entre analista e usuário.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: Na seção 2 apresentamos uma descrição dos modelos para determinação de alvos na Análise Envoltória de Dados, e salientamos algumas desvantagens que apresenta este enfoque. Na seção 3 apresentamos o enfoque proposto: dois modelos multiobjetivo são introduzidos: o primeiro busca otimizar as razões entre insumos (e produtos) da DMU observada e do alvo – MORO (Multiple Objective Ratio Optimization). Uma comparação é feita entre os modelos com um único objetivo e multiobjetivo, onde veremos as vantagens da utilização destes últimos. Em seguida, alteramos o modelo MORO, transformando as funções objetivo, de modo a otimizar diretamente os alvos, obtendo-se os modelos MOTO (Multiple Objective Target Optimization). A formulação MOTO facilita o processo iterativo da modelagem. Na seção 4 deste trabalho apresentamos os conceitos de região de indiferença e como são aplicados a este contexto e sua importância na determinação das estruturas de preferência do decisor, assim como a utilização dos métodos iterativos para resolver os modelos multiobjetivo propostos. Por último, na seção 5 temos os comentários finais com relação a este trabalho e conclusões.

## 2. Modelos para Determinação de Alvos na Análise Envoltória de Dados

Na resolução dos modelos DEA obtemos os alvos ou níveis ótimos a serem atingidos pelas variáveis inputs e/ou outputs das unidades ineficientes quando projetadas na fronteira eficiente, seja considerando retornos constantes de escala (CRS) ou retornos variáveis de escala (VRS). Estes alvos representam reduções, no caso dos inputs, ou incrementos, no caso dos outputs, equiproporcionais das variáveis (dispensadas as folgas) fornecendo medidas de eficiência radiais. Estas medidas estão associadas a projeções, as vezes, não Pareto eficientes. Do ponto de vista gerencial é possível que existam alvos para os inputs e outputs que sejam preferíveis àqueles fornecidos pelos modelos que supõem projeção radial na fronteira. Por exemplo, o alvo pode ser um ponto resultante da minimização de alguns inputs e maximização de alguns outputs. Em qualquer caso deseja-se um alvo ou projeção preferível para o decisor ou com algum “significado” para ele.

Vários pesquisadores dedicaram-se ao estudo da determinação dos alvos ou projeções eficientes (*target models*), através de diversos enfoques. O enfoque mais estudado é o que utiliza modelos baseados em estruturas de preferências fornecidas pelo decisor. Existe um outro enfoque que se baseia na identificação por parte do decisor de um ponto ideal, mas não será tratado neste trabalho, (veja Thanassoulis e Dyson, 1992). Tal como indica seu nome, o método de estrutura de preferências inclui informação a priori fornecida pelo usuário ou decisor sobre a importância relativa das variáveis sob a forma de pesos. Apresentamos a seguir dois modelos para determinação de alvos que utilizam estrutura de preferências. Estes modelos são não radiais, uma vez que a redução nos inputs ou incrementos dos outputs não é realizada da forma equiproporcional.

- Modelo de Thanassoulis e Dyson (1992) - Este modelo é baseado em uma estrutura de preferências que utiliza pesos para as mudanças e considera dominância. A estrutura de



preferências do decisor é expressa através dos pesos  $w_r^+$  e  $w_i^-$  a serem atribuídos aos fatores  $\phi_r$  e  $\phi_i$ , onde  $\phi_r$  reflete o incremento percentual no output  $r$ , e  $\phi_i$  reflete o decremento percentual no input  $i$  para se atingir o alvo. Cabe destacar que este modelo somente indica se a DMU é eficiente ou não, e a sua projeção no caso de ineficiência, mas não indica ou grau (escore) de ineficiência da unidade.

- Modelo de Zhu (1996) - baseado na medida de eficiência apresentada por Russell, Zhu formulou um modelo para determinação de alvos. Este modelo também incorpora uma estrutura de preferências sobre os alvos a serem atingidos, sem considerar dominância. O que mais diferencia o modelo de Zhu é o uso de  $\phi_i$  e  $\phi_r$  não restritos, admitindo-se uma redução nos outputs ou/e um incremento nos inputs para atingir a fronteira eficiente. A DMU observada não é, necessariamente, dominada pela DMU alvo como no modelo de Thanassoulis e Dyson.

A determinação de alvos em DEA tanto no modelo de Thanassoulis e Dyson quanto no modelo de Zhu, apresenta uma dificuldade importante: a escolha dos pesos a serem atribuídos aos fatores  $\phi_r$  e  $\phi_i$ . Não se têm limites para estes pesos nem sabemos seus possíveis valores antes de testar os modelos; somente a tentativa e erro nos fornecem uma idéia das dimensões e das suas possíveis variações. Este processo não é sistemático, não há garantias de uma busca exaustiva de todas as possíveis soluções de interesse do usuário. Além disto, também não se sabe como variar os pesos de modo a obter soluções diferentes (alvos diferentes) das já obtidas.

### 3. Modelo multiobjetivo para otimizar as razões

A formulação proposta neste trabalho consiste em tratar cada objetivo sem necessidade de agregação em uma função de utilidade, através da utilização da Programação Linear Multiobjetivo. Formulamos o seguinte modelo, que considera incrementos e decrementos independentes para cada variável como um objetivo, sendo que temos  $n$  DMUs, que utilizam  $m$  recursos (inputs) e produzem  $s$  outputs. Assim temos:

$$\max \phi_1 \tag{1}$$

.....

$$\max \phi_s \tag{2}$$

$$\min \varphi_1 \tag{2}$$

.....

$$\min \varphi_m$$

Sujeito a:

$$\phi_r y_{rj_0} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j, \quad \forall r = 1, \dots, s \tag{3}$$

$$\varphi_i x_{ij_0} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j, \quad \forall i = 1, \dots, m \tag{4}$$

Este modelo DEA-MOLP será denominado por MORO (MultiObjective Ratio Optimization) – Multiobjetivo para razões entre insumos (produtos) da DMU observada e DMU alvo, versão CRS, pois indica uma fronteira de retornos constantes de escala. Neste modelo observa-se que maximiza-se o uso dos outputs ( 1 ) e minimiza-se o uso dos inputs ( 2 ), independentemente, sujeito a que aquela projeção não deve ultrapassar a fronteira definida pelas DMUs eficientes ( $\lambda_s$  diferentes de 0), para todos os outputs ( 3 ) e para todos os inputs ( 4 ). Este modelo considera retornos constantes de escala (CRS). Para considerar retornos variáveis de escala (VRS), acrescenta-se a restrição de convexidade:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \tag{5}$$



O modelo que inclui a restrição de convexidade ( 5 ) será chamado de modelo MORO versão VRS. Para ambas versões as variáveis de decisão são  $\phi_s, \lambda_j, \varphi_m$ . Além disso, se obtivermos como resultado  $\phi_r^* = \varphi_i^* = 1, \forall r, i$ , então a DMU  $j_0$  é uma DMU que encontra-se na fronteira Pareto eficiente (não dominada). Em qualquer caso, dado que  $\phi$  e  $\varphi$  não tem restrições, os alvos são:

$$y_{rj_0}^* = \phi_r^* y_{rj_0}, \quad \forall r \tag{6}$$

$$x_{ij_0}^* = \varphi_i^* x_{ij_0}, \quad \forall i \tag{7}$$

O valor final das variáveis  $\phi_r^*$  e  $\varphi_i^*$  depende da escolha do decisor entre as soluções não dominadas do problema. Este modelo não impõe a dominância da DMU alvo sobre a DMU observada tal como no modelo de Zhu (não existem restrições para  $\varphi$  e  $\phi$ ).

Adicionando-se restrições para  $\phi$  e  $\varphi$ , temos um enfoque semelhante ao modelo formulado por Thanassoulis e Dyson, acrescentando-se as seguintes restrições:

$$\phi_r \geq 1, \quad \forall r = 1, \dots, s \tag{8}$$

$$\varphi_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, m \tag{9}$$

no caso da fronteira CRS e ainda a restrição de convexidade para a fronteira VRS (restrição 5 ).

Este modelo DEA-MOLP será chamado de modelo MORO-D (Multiobjetivo para as razões com dominância) versão CRS e com a restrição de convexidade será chamado de modelo MORO-D versão VRS.

Ao utilizarmos um modelo multiobjetivo podemos determinar o conjunto de soluções eficientes (soluções não dominadas). De fato, na programação multiobjetivo não se fala em solução ótima, mas em soluções não dominadas, soluções não comparáveis entre si. Este conceito assemelha-se ao conceito de Pareto eficiência, o qual requer que uma DMU seja melhor ao menos em um aspecto que as outras soluções.

Como resultado dos modelos MORO e MORO-D obtemos todas as soluções eficientes (neste caso projeções eficientes) para a DMU observada. Isto fornece uma vantagem sobre os modelos com um único objetivo apresentados onde para cada novo conjunto de pesos deve ser rodado um novo modelo. A seleção de uma das soluções não dominadas como alvo representa uma forma de incorporar os julgamentos de valor ou estrutura de preferências do decisor.

### 3.1. Aplicação do modelo MORO na determinação de alvos

Para ilustrar o uso do modelo MORO, consideramos a seguinte base de dados:

Tabela 1

DMU	Variáveis	
	X	Y
A	2	12
B	4	15
C	6	6
D	2	9
E	3	15
F	1	7
G	2	4

Na tabela 1, temos 7 DMUs que utilizam um insumo X para produzir Y. Para resolver os problemas multiobjetivo utilizamos o software ADBASE desenvolvido por Steuer (1977) que fornece soluções eficientes para problemas lineares multiobjetivo baseado na ponderação das funções objetivo.

Os resultados com rendimentos constantes de escala para o modelo MORO proposto mostram que qualquer ponto na fronteira eficiente CRS serve e pode ser um alvo para as DMUs ineficientes ou eficientes (figura 1). Isto é devido ao fato de  $\phi$  e  $\varphi$  não estarem restritos.

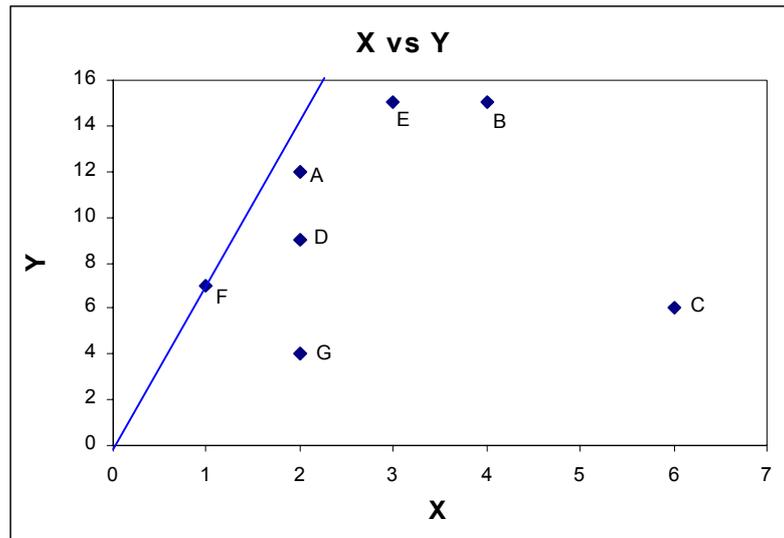


Figura 1. Fronteira CRS.

Considerando rendimentos variáveis de escala, VRS, obtivemos os resultados para o modelo MORO. Na figura 2 apresentamos primeiro as projeções ou alvos para a DMU C.

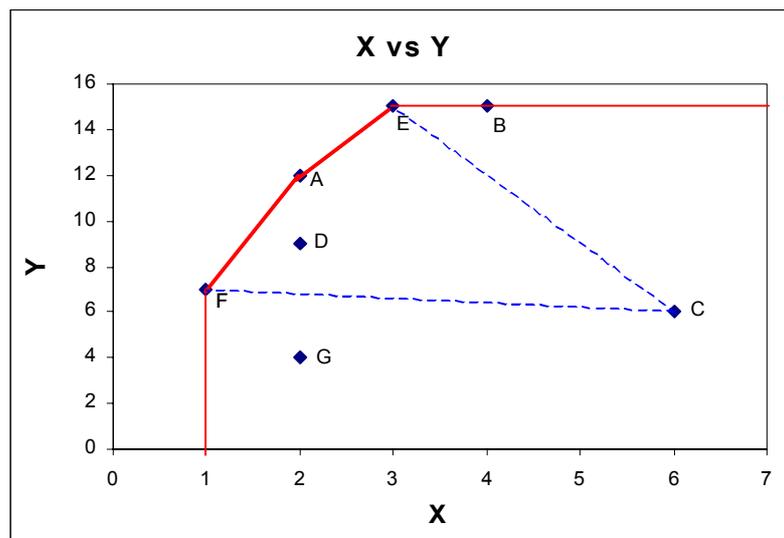


Figura 2. Projeção eficiente para a DMU C.

Aqui observamos as projeções ou alvos para a DMU C (figura 3). Neste caso, o modelo DEA clássico daria como solução (considerando maximização dos outputs) uma projeção na fronteira Pareto ineficiente (na reta paralela ao eixo X que passa pelo ponto E), dominada pelo ponto E. Isto não ocorre com o modelo multiobjetivo porque este só encontra soluções não dominadas. As mesmas projeções são encontradas para todas as outras DMUs dado que os fatores de incremento e decremento não são restritos.

Na tabela 2 encontram-se os resultados das funções objetivo do modelo MORO (incrementos e decrementos para as variáveis Y e X) e os valores obtidos para os alvos que resultam ser os mesmos valores das DMUs que determinam a fronteira eficiente qualquer que seja a DMU analisada. As DMUs F, A e E são eficientes e determinam a fronteira VRS.



Tabela 2. Modelo MORO (VRS)

Atual	Valor da Função Objetivo		Valor Alvo	
	Max $\phi$	Min $\phi$	Y	X
2	0.58333	0.5	7	1
	1	1	12	2
	1.25	1.5	15	3
4	0.46667	0.25	7	1
	0.8	0.5	12	2
	1	0.75	15	3
6	2.5	0.5	15	3



se pode projetar a DMU G. Por outro lado, todos os pontos (ou alvos) são proporcionais à DMU F pois ela define a fronteira eficiente considerando rendimentos constantes de escala.

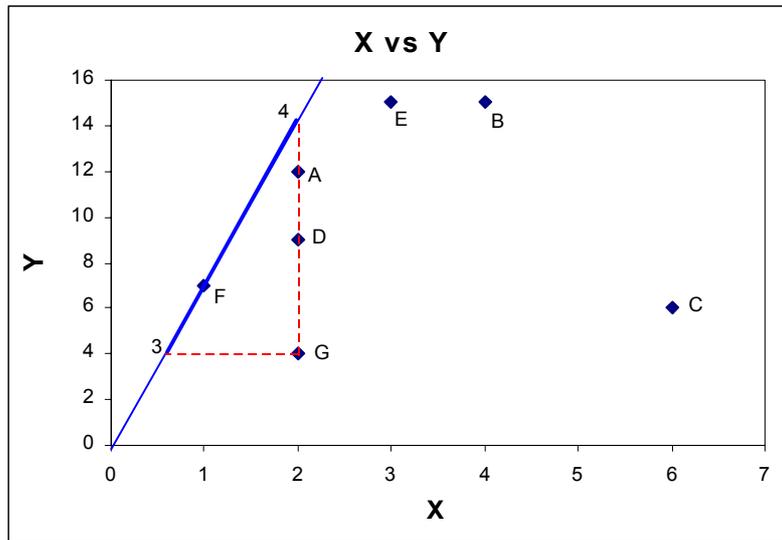


Figura 3. Fronteira CRS, projeções para a DMU G.

Adicionando a restrição de convexidade no modelo MORO-D, consideramos VRS. Todas as possíveis projeções para a DMU G encontram-se no segmento de reta F-A (figura 4). Pode-se observar que, do mesmo modo que nos resultados da comparação prévia, as projeções possíveis encontram-se na fronteira Pareto eficiente. Uma projeção no ponto 4 para a DMU G (na mesma figura) não é possível obter em nenhum dos modelos aqui analisados pois este ponto não é Pareto eficiente.

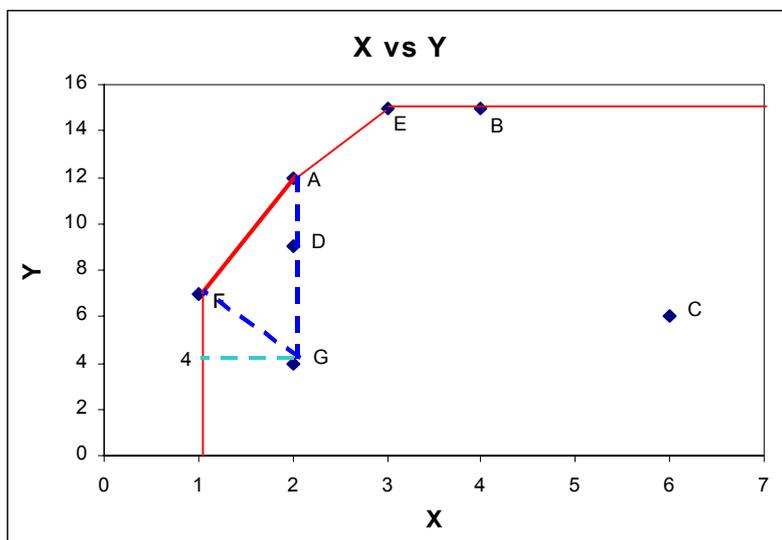


Figura 4. Fronteira VRS, projeções para a DMU G.

A tabela N° 4 fornece os resultados do modelo MORO-D para cada DMU; as razões  $\phi$  e  $\varphi$ , os alvos e os  $\lambda$ s diferentes de zero que definem o conjunto de referência para projeção na fronteira eficiente que interessa à DMU. Observemos também como a DMU B que esta na seção Pareto ineficiente na fronteira é projetada no ponto E da fronteira Pareto eficiente.



Tabela Nº 4. Modelo MORO-D (VRS)

DMU	Valor Atual		Valor da Função Objetivo		Valor Alvo		Lambdas		
	Y	X	Max $\phi$	Min $\varphi$	Y	X	$\lambda_A$	$\lambda_E$	$\lambda_F$
A	12	2	1	1	12	2	1		
B	15	4	1	0.75	15	3		1	
C	6	6	2	0.333333	12	2	1		
			2.5	0.5	15	3		1	
			1.166667	0.166667	7	1			1
D	9	2	1.333333	1	12	2	1		
			1	0.7	9	1.4	0.4		0.6
E	15	3	1	1	15	3		1	
F	7	1	1	1	7	1			1
G	4	2	3	1	12	2	1		
			1.75	0.5	7	1			1

Uma vantagem dos modelos DEA-MOLP, sobre os modelos mono objetivo é a obtenção de todas as soluções básicas não dominadas, através de algoritmos utilizados pelo software ADBASE.

### 3.2. Modelo Multiobjetivo para Otimização das Projeções (MOTO)

A seguir apresentamos o modelo multiobjetivo para Otimização das Projeções, no qual cada um dos objetivos representa, não a razão da variação para cada variável, mas o valor final projetado (alvo). Faz-se uma mudança nas funções objetivo do MORO ( 1 e 2 ) obtendo o modelo multiobjetivo para projeções ou alvos (MOTO):

$$(MOTO) \quad \max y_{1j_0} \phi_1 \quad (10)$$

.....

$$\max y_{sj_0} \phi_s$$

$$\min x_{1j_0} \varphi_1 \quad (11)$$

.....

$$\min x_{mj_0} \varphi_m$$

Sujeito a:

$$\phi_r y_{rj_0} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j, \quad \forall r = 1, \dots, s \quad (3)$$

$$\varphi_i x_{ij_0} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4)$$

O modelo MOTO apresenta, com relação ao modelo MORO:

- As mesmas variáveis e restrições.
- A possibilidade de impor restrições sobre  $\phi$  e  $\varphi$  ( 6 ) e ( 7 ) com o qual teríamos o modelo MOTO-D nas versões CRS e VRS (agregando a restrição ( 5 ).
- Se obtivermos como resultado  $\phi_r^* = \varphi_i^* = 1, \forall r, i$ , então a DMU  $j_0$  é uma DMU que encontra-se na fronteira, é Pareto eficiente ou não dominada.

Em qualquer caso, dado que  $\phi$  e  $\varphi$  não tem restrições, os alvos são:

$$y_{rj_0}^n = \phi_r^* y_{rj_0}, \quad r = 1 \dots s$$

$$x_{ij_0}^n = \varphi_i^* x_{ij_0}, \quad i = 1, \dots, m$$

A vantagem na utilização deste modelo é que as funções objetivo fornecem diretamente os valores projetados na fronteira, o que facilita a análise da região de indiferença (que será vista na seção 4) ao considerar os pesos dados aos valores projetados das variáveis. Na aplicação de métodos iterativos



de solução, a visualização do valor projetado da variável é mais informativa. Para o modelo MOTO – CRS temos a mesma situação que no modelo MORO – CRS (figura 1): qualquer ponto da reta pode servir como projeção eficiente para qualquer DMU na análise.

**4. Análise dos Resultados dos Modelos Propostos e Extensões**

Para resolver os modelos multiobjetivo tem-se vários enfoques, um destes enfoques é convertido estes modelo em modelo mono objetivo, utilizando uma ponderação de todas as funções objetivo. Então, dada uma solução eficiente X\*, podemos utilizar os pesos associados  $\theta^*$  para formar uma função ponderada  $\theta^*.C.x$  equivalente que fornece os mesmos resultados. Esta função linear é um exemplo de uma função de utilidade para o decisor onde  $\theta^*$  representa os trade-offs entre objetivos, sendo que  $x^*$  é a sua solução ótima.

Um dos resultados ao utilizarmos, é a definição de região de indiferença, definida como o intervalo no qual esses pesos definidos acima podem variar enquanto a solução permanece a mesma, portanto o decisor é indiferente com relação ao valor desses pesos nesse intervalo. As regiões de indiferença podem ser determinadas verificando as condições de otimalidade no simplex, isto é  $z_j - c_j \geq 0$ , o coeficiente da DMU j na função objetivo  $\theta^*.C.x$ , na forma canônica em relação a uma dada base, para que dita base continue sendo a ótima. Como  $\theta^*.C.x$  pode ser desdobrada em p funções objetivo, o coeficiente de cada DMU j é dado por:  $\theta_1(z_j^1 - c_j^1) + \theta_2(z_j^2 - c_j^2) + \dots + \theta_p(z_j^p - c_j^p)$ , sendo que a condição de otimalidade para que a solução seja não dominada é:

$$\theta_1(z_j^1 - c_j^1) + \theta_2(z_j^2 - c_j^2) + \dots + \theta_p(z_j^p - c_j^p) \geq 0, \text{ sendo } \theta_i \geq 0, i = 1, \dots, p \text{ e } \sum_{i=1}^p \theta_i = 1. \text{ Veja o tableau a seguir:}$$

		$x_1$	$x_2$	.....	$x_j$	.....	$x_n$	B
	$x_{n+1}$	$a_{11}$	$a_{12}$	.....	$a_{1j}$	.....	$a_{1n}$	$b_1$
	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	$x_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	.....	$a_{mj}$	.....	$a_{mn}$	$b_m$
p funções objetivo	$z_j^1 - c_j^1$	$z_1^1 - c_1^1$	$z_2^1 - c_2^1$	.....	$z_j^1 - c_j^1$	.....	$z_n^1 - c_n^1$	
	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	
	$z_j^p - c_j^p$	$z_1^p - c_1^p$	$z_2^p - c_2^p$	.....	$z_j^p - c_j^p$	.....	$z_n^p - c_n^p$	

No seguinte exemplo mostraremos o uso das regiões de indiferença, consideremos o modelo MORO versão VRS, utilizando a mesma base de dados das seções anteriores, aplicado à DMU C:

$$\begin{aligned} & \text{Max } \phi \\ & \text{Min } \phi = - \text{max } -\phi \\ \text{Sujeito a:} \\ & 6 \phi - 12 \lambda_1 - 15 \lambda_2 - 6 \lambda_3 - 9 \lambda_4 - 15 \lambda_5 - 7 \lambda_6 - 4 \lambda_7 = 0 \\ & -6 \phi + 2 \lambda_1 + 4 \lambda_2 + 6 \lambda_3 + 2 \lambda_4 + 3 \lambda_5 + \lambda_6 + 2 \lambda_7 = 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 = 0 \\ & \phi, \phi, \lambda_j \geq 0 \end{aligned}$$

Rodando este modelo no ADBASE obtivemos três soluções não dominadas apresentadas na tabela 5. Veja o resultado do ADBASE para a solução I a seguir, juntamente com os tableaus ótimos para cada solução (as sete primeiras colunas do tableau referem-se às variáveis não básicas e as três últimas referem-se a variáveis artificiais).

Tabela Nº 5. Modelo MORO (VRS)

DMU	Valor Atual		Valor da Função Objetivo		Valor Alvo	
	Y	X	Max $\phi$	Min $\phi$	Y	X
C	6	6	2.5	0.5	15	3
			2	.333333	12	2



			1.166667	0.166667	7	1
--	--	--	----------	----------	---	---

TABLEAU WITH C (J) -Z (J) REDUCED COSTS									
3	4	5	6	8	9	10	11	12	
.50000	.00000	1.50000	1.00000	1.33333	1.83333	.16667	.00000	2.50000	
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	.00000	.00000	1.00000	
.16667	-.16667	-.50000	.16667	.33333	.16667	.00000	-.16667	.50000	
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
-.50000	.00000	-1.50000	-1.00000	-1.33333	-1.83333	-.16667	.00000	-2.50000	
.16667	-.16667	-.50000	.16667	.33333	.16667	.00000	-.16667	.50000	
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Para que a solução do tableau seja ótima é preciso satisfazer a  $z_j - c_j \geq 0$ . Então temos o seguinte sistema de equações para determinar a região de indiferença da primeira solução não dominada:

$$\begin{aligned}
 0.5\theta_1 - 0.1667\theta_2 &\geq 0 \\
 0.1667\theta_2 &\geq 0 \\
 1.5\theta_1 + 0.5\theta_2 &\geq 0 \\
 \theta_1 - 0.16667\theta_2 &\geq 0 \\
 1.3333\theta_1 - 0.3333\theta_2 &\geq 0 \\
 1.8333\theta_1 - 0.16667\theta_2 &\geq 0 \\
 \theta_1 + \theta_2 &= 1
 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema de equações, obtemos  $0.25 \leq \theta_1 \leq 1$  (para verificar os valores destas equações veja o tableau ótimo para esta solução a seguir, levando em consideração que as duas últimas linhas de cada tableau ótimo correspondem às expressões  $c_j - z_j$  de cada função objetivo).

Utilizando o mesmo procedimento, determinamos as regiões de indiferença para as outras duas soluções não dominadas obtidas para a DMU C.

Para a solução 2 temos:  $0.166667 \leq \theta_1 \leq 0.25$ , e para a solução 3 temos:  $0 \leq \theta_1 \leq 0.16667$ . Logo podemos representar as regiões de indiferença dos  $\theta$ s para cada solução na figura 5:

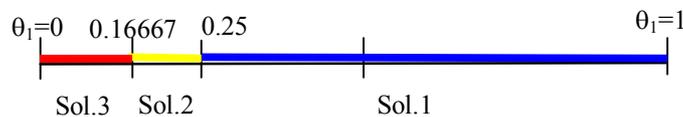


Figura 5

Obtendo-se as regiões de indiferença para todas as DMUs, temos uma informação completa sobre os pesos que podem ser atribuídos aos fatores  $\varphi$  e  $\phi$  de modo a obter as diferentes soluções.

Outro método de solução para os modelo multiobjetivo é a utilização de uma métrica ou distância a um ponto de referência ou ponto ideal.

Os métodos interativos de solução dos modelos multiobjetivos estão baseados em uma métrica ou distância a um ponto de referência. Neste caso utilizaremos o Pareto Race (Korhonen, 1988), implementado no software VIG, onde a visualização do valor da função objetivo é feita através de barras na tela do computador. A utilização do modelo MOTO permite visualizar a projeção da DMU ao invés do valor da razão do aumento fornecida pelo modelo MORO. A alteração proposta pelo especialista/usuário em uma função objetivo ocasiona mudanças nas outras funções objetivo, i.e. nas projeções das outras variáveis. Com este enfoque ele pode saber diretamente na tela do computador quais os valores de input e outputs que podem ser obtidos, dadas as mudanças propostas.

É importante notar que os valores entre pontos extremos, os pontos intermediários que também são eficientes ou não dominados para o problema multiobjetivo, podem ser obtidos através de uma combinação linear convexa dos inputs e outputs dos pontos extremo eficientes.

Veamos um exemplo utilizando o modelo MOTO – VRS para analisar a eficiência da DMU C (modelo formulado anteriormente). Na figura 2 vimos os possíveis alvos para C, pontos extremos eficiente A, E e F, e os pontos entre eles, retas entre as DMUs A e E ou entre as DMUs A e F. A



figura 6 mostra a interface do software VIG que implementa o Pareto Race, com a solução escolhida arbitrariamente para a DMU C no modelo mencionado.

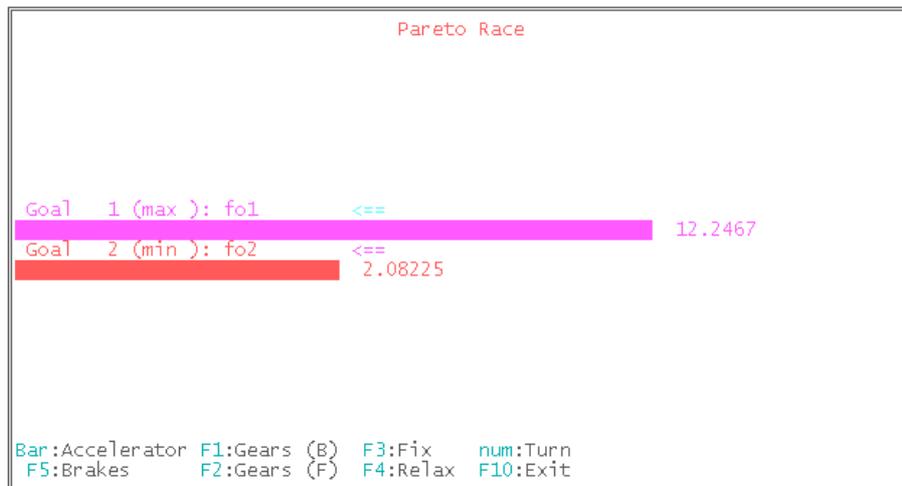


Figura 6

A solução apresentada aqui corresponde à uma DMU virtual que é uma mistura da DMU A ( $\lambda_A = 0.9177545$ ) e DMU E ( $\lambda_E = 0.0822455$ ). Sendo que o alvo para a DMU C para esta solução eficiente escolhida (arbitrariamente) é  $Y = 12.2467$  e  $X = 2.08225$  (no modelo MORO os resultados visualizados seriam para esta mesma solução  $\phi = 2.04112$  e  $\varphi = 0.347042$ ).

## 5. Conclusões

Este artigo propôs a utilização de modelos de programação linear multiobjetivo aplicados a projeções não radiais de DMUs ineficientes na fronteira Pareto-eficiente em problemas da Análise Envoltória de Dados. Estes modelos fornecem grande flexibilidade em termos gerenciais pois não fornecem um alvo, mas um conjunto de alvos eficientes, dentre os quais o decisor pode escolher o mais preferido ou o operacionalmente viável. Os modelos para otimização das razões entre inputs (ou outputs) projetados e observados – modelo MORO e MORO-D, e para otimização das projeções – modelo MOTO e MOTO-D, fornecem múltiplas vantagens sobre os modelos de Thanassoulis & Dyson (1992) e Zhu (1996). Os modelos multiobjetivo propostos aqui não requerem o arbítrio a priori dos pesos a serem atribuídos às razões dos inputs e outputs, e permitem uma visualização das regiões de indiferença que levam à obtenção de cada solução eficiente, que são obtidas utilizando o método das ponderações para resolver modelo multiobjetivo. Isto dá ao decisor uma visão do espaço de pesos que leva a cada solução eficiente, em especial às soluções básicas, permitindo analisar a robustez da solução observada.

No cálculo e representação gráfica das soluções básicas não dominadas podemos dizer que as soluções básicas adjacentes (estão ligadas por um ponto no caso de duas variáveis ou de uma aresta no caso de três variáveis) possuem regiões de indiferença contíguas.

Estas regiões foram obtidas utilizando-se o método das ponderações, com o qual encontra-se somente os pontos extremo-eficientes. Para um dado conjunto de pesos, o método das ponderações acha como um ponto eficiente o ponto de tangência da poligonal que define o conjunto eficiente como a família de retas para o caso com dois objetivos:  $\theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x) = \lambda$ . Em geral,

$$\sum_i \theta_i f_i(x) = \lambda.$$

Obviamente essa tangência tem que se produzir em um ponto extremo e não em um ponto interior (Romero, 1993). Isto mostra, devido a que a função objetivo pode ser vista como uma função de utilidade, que os modelos de Zhu e de Thanassoulis e Dyson somente fornecerão os pontos extremos do conjunto de soluções não dominadas.



Abordamos, ainda, neste artigo, o enfoque interativo aos modelos multiobjetivo propostos. Os métodos interativos permitem a aprendizagem do problema e da estrutura de preferências do decisor. Mostramos também as vantagens dos modelos MOTO sobre os MORO, quando o usuário/especialista precisa interpretar os resultados e interagir.

Aconselha-se a utilização de dois tipos de métodos de solução, primeiro os que determinam pontos extremos, como por exemplo o ADBASE, para saber quais as DMUs que conformam (ou determinam a fronteira eficiente) e logo após determinar a DMU ou DMUs que podem servir como alvos para a DMU que está sendo analisada, através da utilização de um método interativo de solução, que facilita a visualização e a expressão de preferências por parte do decisor.

Uma equivalência entre os modelos de Thanassoulis e Dyson (1993) e o modelo de Zhu(1996) com estes modelos apresentados pode ser achada em Angulo-Meza (2001).

## 6. Bibliografia

- Angulo-Meza, L., (1998), *Data Envelopment Analysis* na determinação da eficiência dos programas de Pós Graduação da COPPE/UFRJ, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Angulo-Meza, L. (2001), Um enfoque Multiobjetivo para determinação de alvos na Análise Envoltória de Dados (DEA). Exame de qualificação, Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, RJ, Brasil.
- Geoffrion, A. M. (1968). Proper efficiency and the theory of vector maximisation. *J. Math. Anal. Appl.*, **22**, 618.
- Golany, B. (1988). An interactive MOLP procedure for the extension of DEA to effectiveness analysis. *Journal of the Operational Research Society*, **39**, 725-734.
- Halme, M., Joro, T., Korhonen, P., Salo, S., & Wallenius, J. (1998). A value efficiency approach to incorporating preference information in data envelopment analysis. *Management Science*, **45**, 103-115.
- Joro, T. (1998). Models for identifying target units in data envelopment analysis: Comparison and extension, IIASA, Interim Report IR-98-055.
- Joro, T., Korhonen, P., & Wallenius, J., (1998). Structural Comparison of Data Envelopment Analysis and Multiple Objective Linear Programming. *Management Science*, **44**, 962-970.
- Korhonen, P., 1988, "A Visual reference direction approach to solving discrete multiple criteria problems", *European Journal of Operational Research*, v. 34, pp. 152-159.
- Korhonen, P., & Wallenius, J. (1988). A Pareto Race. *Naval Research Logistics*, **35**, 615-623.
- Kornbluth, J. S. H. (1974). Duality, Indifference and Sensitivity Analysis in Multiple Objective Linear Programming. *Operational Research Quarterly*, **25**, 33-41.
- Kornbluth, J. S. H. (1991). Analysing Policy Effectiveness using Cone Restricted Data Envelopment Analysis. *Journal of Operational Research Society*, **42**, 1097-1104.
- Li, X.-B. & Reeves, G. R. (1999). A multiple criteria approach to data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, **115**, 507-517.
- Romero, C., 1993, *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, técnicas y aplicaciones*. Alianza Editorial S.A., Madrid, Espanha.
- Steuer, R. E. (1977). An interactive multiple objective linear programming procedure. *TIMS Studies in the Management Sciences*, **6**, 225-239.
- Stewart, T. J. (1996). Relationships between data envelopment analysis and multicriteria decision analysis. *Journal of the Operational Research Society*, **47**, 654-665.
- Thanassoulis, E., & Dyson, R. G. (1992). Estimating preferred target input-output levels using Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, **56**, 80-97.
- Zadeh, L. A. (1963). Optimality and Non-scalar- Valued Performance Criteria. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **8**, 59-60.
- Zhu, J. (1996). Data Envelopment Analysis with Preference Structure. *Journal of the Operational Research Society*, **47**, 136-150.