



EFEITO DA VARIABILIDADE DO PROCESSO SOBRE A EFICIÊNCIA DOS PLANEJAMENTOS DE GRÁFICOS DE CONTROLE POR VARIÁVEIS

Osiris Turnes

Universidade de Brasília
Departamento de Estatística
Campus Universitário “Darcy Ribeiro” - Brasília- DF
Endereço eletrônico: osiris@unb.br

Linda Lee Ho

Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Produção
EPUSP São Paulo – SP
Endereço eletrônico: lindalee@usp.br

Resumo: Neste trabalho foi feito um estudo comparativo do poder do teste no planejamento do gráfico de controle \bar{X} obtido em duas situações: sem mudança na variabilidade do processo e com mudança na variabilidade do processo

Palavras chave: controle estatístico do processo, carta de controle \bar{X} , poder do teste

Abstract: In this paper, a comparative study of power tests in planning control chart \bar{X} was developed in two scenarios: no change in the variability of the process and with change in the variability of the process.

Key Words: statistical process control, \bar{X} -chart, power test.

1 INTRODUÇÃO

O planejamento econômico de gráficos de controle seleciona o tamanho da amostra (n), o intervalo interamostral (h) e o coeficiente dos limites de controle (k), com o objetivo de minimizar o custo do procedimento de monitoramento *on-line* da qualidade de produtos. Uma considerável atenção tem



gráfico de controle é o poder dos planos dado por $(1 - \beta)$ onde β é o erro do tipo II. O cálculo desta medida tradicionalmente não leva em conta o efeito da variabilidade do processo. No entanto, muito raramente, um processo não sofre desvios em sua variabilidade. Assim sendo, neste trabalho desenvolveu-se um estudo comparativo dos valores de eficiência de planejamentos de gráficos de controle \bar{X} em duas situações: considerando sem alteração e com alteração na variabilidade do processo. Na Seção 2 faz-se uma breve descrição teórica sobre os gráficos \bar{X} e a eficiência de planos. Os resultados foram ilustrados para um conjunto selecionado de parâmetros na mesma seção e na Seção 3 estão as conclusões.

2 EFICIÊNCIA DO PLANEJAMENTO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE \bar{X}

O uso de gráficos de controle \bar{X} para avaliar se o processo está sob controle estatístico prevê a retirada de uma amostra de n itens consecutivos durante a produção de determinado número de unidades; a estatística \bar{X} da amostra é calculada e registrada no gráfico. Os limites superior (LSC) e inferior (LIC) de controle do gráfico \bar{X} são:

$$LSC_{\bar{X}} = \mu_0 + k\sigma_0 / \sqrt{n} \quad \text{e} \quad LIC_{\bar{X}} = \mu_0 - k\sigma_0 / \sqrt{n}$$

onde μ_0 e σ_0 são respectivamente a média e o desvio padrão do processo sob controle e k é a distância dos limites de controle em relação à linha central, expressa em número de desvios padrões. Existe uma conexão estreita entre os gráficos de controle e os testes de hipótese e significância. Basicamente, um gráfico de controle é um teste cuja hipótese nula é: o processo está sob controle. Quando um ponto amostral é registrado dentro dos limites de controle, aceita-se a hipótese nula, caso contrário, deve-se rejeitá-la. Como no teste de hipótese pode-se pensar em erros do tipo I, representada por α e erro do tipo II, representada por β . Esses erros ocorrem, respectivamente, quando se rejeita a hipótese de que o processo está sob controle e, na realidade, está, ou quando se aceita a hipótese de que o processo está sob controle e, na realidade, não está. Dentro do contexto deste trabalho, α é conhecido como “risco do produtor” e β como “risco do consumidor”. Especificar os limites de controle (com base em k), o tamanho da amostra (n) a ser retirada e a duração dos tempos interamostrais (h) são decisões críticas que precisam ser feitas no planejamento de um gráfico. Se os limites determinados por k são estreitos, haverá muitos alarmes falsos. Se os limites determinados por k são largos, então o tamanho da amostra n e os custos de amostragem serão forçosamente altos, pois, caso contrário, o erro do tipo II ocorrerá muito freqüentemente. O problema consiste em encontrar, de alguma forma, o equilíbrio entre esses dois fenômenos que se movem em direções opostas. No presente artigo a medida de desempenho do gráfico \bar{X} é baseada no erro do tipo II. Considere, pois, um gráfico \bar{X} , com desvio padrão conhecido e constante σ_0 . Se a média do processo se desvia do valor alvo μ_0 para outro valor $\mu_0 + k\sigma_0$, a probabilidade de não se detectar o desvio, na primeira amostra após a ocorrência do mesmo ou o risco β do plano amostral será:

$$\beta = P\{LIC \leq \bar{x} \leq LSC / \mu = \mu_0 + k\sigma_0\}$$

Como $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$ e LSC e LIC são conhecidos, então

$$p_1 = 1 - \beta = 1 - [\Phi(k - \Delta\sqrt{n}) - \Phi(-k - \Delta\sqrt{n})] \quad (2.1)$$



onde $\Delta = |\bar{x} - \mu|/\sigma_0$ e $\Phi(\cdot)$ representa a função distribuição normal padronizada acumulada. Note que expressão (2.1) não considera uma mudança na variabilidade do processo no seu cálculo. No entanto, na sua grande maioria, os processos produtivos têm desvios em sua variabilidade. Esses desvios, negligenciados em (2.1) podem resultar em valores de β errôneos e levar a conclusões equivocadas em relação ao poder do plano amostral que está sendo adotado. Vamos considerar uma característica de qualidade normalmente distribuída com parâmetros μ_0 e σ_0 - enquanto o processo está operando sob controle - e também normalmente distribuída com parâmetros μ_1 e σ_1 - quando uma causa especial de valor esperado está presente, então o poder do teste em função destes quatro parâmetros será dado por:

$$p_2 = 1 - \beta_{\bar{x}} = 1 - \left[1 - 2\Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_1} \sqrt{n} - \frac{k \sigma_0}{\sigma_1}\right) \right] \quad (2.2)$$

Para analisar o efeito da variabilidade do processo sobre o planejamentos dos gráficos de controle, foram calculados os valores de (p_1 e p_2) segundo as expressões (2.1) e (2.2), respectivamente utilizando o seguinte conjunto de parâmetros:

- $n = 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 ;
- $\delta = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0} = 0,5; 1,5$ e $2,5$;
- $k = 2,0$ e $3,0$;
- $q = \sigma_0/\sigma_1 = 0,001; 0,05; 0,01; 0,05; 0,25; 0,5; 0,75$; e $1,0$.

Os valores de p_2 obtidos com os parâmetros acima especificados estão nas Tabelas 1 e 2 produzindo os gráficos 2.1 a 2.12. Os gráficos 2.1 a 2.6 analisam o comportamento dos valores de p_2 em função dos valores de q para cada tamanho da amostra e os gráficos 2.7 a 2.12 analisam o comportamento da razão p_1/p_2 versus q para cada tamanho de amostra. Note que $p_2 = p_1$ quando $q=1$.

Os valores das Tabelas 1 e 2 e os gráficos 2.1 a 2.6 evidenciam que, à medida que k aumenta, tanto o valor fixo do poder p_1 quanto os valores de p_2 diminuem, como era de se esperar. As curvas referentes às amostras de tamanho 2 a 20, revelam acentadamente esse resultado. O comportamento de p_2 é o esperado: quando os desvios σ_0 e σ_1 são extraordinariamente diferentes, ou seja $\sigma_1 \gg \sigma_0$, valores de p_2 revelam coerência com a realidade, pois, se o desvio padrão do processo fora de controle é muito superior ao do processo sob controle, qualquer gráfico \bar{X} é rápido na detecção de uma alteração no processo. Neste caso, p_2 sempre é maior que p_1 , revelando que a utilizando de gráficos \bar{X} levando em consideração a existência de desvios na variabilidade do processo é recomendável. Para valores de $q \geq 0,25$, ou seja, $\sigma_1 \leq 4,0 \sigma_0$ e amostras grandes, p_2 é menor que p_1 , convergindo para p_1 quando $\sigma_0/\sigma_1 = 1$. À medida que δ aumenta, a eficiência dos planos utilizados para os gráficos \bar{X} aumenta, e o comportamento das curvas se mantém inalterado. Para amostras de tamanho 2, nesse mesmo caso, as curvas passam a ter comportamento semelhante às de amostras maiores, especialmente quando $\delta \cong k$ (desvio do processo é semelhante ao número de desvios que separam os limites do gráfico de sua linha central). Para amostras de tamanho $n \geq 10$, quando a diferença entre os desvios padrões fora de controle e sob controle é pequena, tendendo para a igualdade, os valores de p_2 e p_1 são semelhantes conforme esperado. À medida que δ aumenta, os valores de p_2 aumentam e p_1 sempre maior que p_2 , para todos os tamanhos de amostras, exceto para $n=2$ quando o desvio do processo não é semelhante ao número de desvios padrões que separa o limites da linha central do gráfico. Outra maneira de comparar o poder dos planos é analisar o comportamento das curvas p_1/p_2 (ilustrados conforme gráficos 2.7 a 2.12). Essas curvas representam a razão entre o poder dos planos dos gráficos \bar{X} sem considerar a existência de desvios na variabilidade e considerando a existência de desvios. Todas as curvas convergem para $p_1/p_2=1$, à medida que $q \rightarrow 1$, o que vem de encontro ao esperado, pois, o desvio do processo fora de controle se iguala ao do processo sob controle. Observa-se ainda que, para pequenos valores de δ , p_2 é menor



que p_1 apenas amostras $n \geq 50$. À medida que δ aumenta, esse comportamento muda e as curvas passam a convergir mais rapidamente para p_1 , especialmente para amostras superiores a $n \geq 10$.

Tabela 1: Resultados para $\delta = 0,5$ e $k = 2,0$				$\delta = 1,5$ e $k = 2,0$			$\delta = 2,5$ e $k = 2,0$			
n	q	P_1	P_2	P_1/P_2	P_1	P_2	P_1/P_2	P_1	P_2	P_1/P_2
2	0,001	0,10142	0,9984	0,10158	0,5483	0,9984	0,54918	0,93767	0,9984	0,93917
	0,05	0,10142	0,92039	0,11019	0,5483	0,92079	0,59547	0,93767	0,92158	1,01746
	0,1	0,10142	0,84187	0,12047	0,5483	0,84496	0,64891	0,93767	0,85096	1,1019
	0,15	0,10142	0,76546	0,13250	0,5483	0,77548	0,70705	0,93767	0,79426	1,18056
	0,25	0,10142	0,62254	0,16291	0,5483	0,66353	0,82634	0,93767	0,73266	1,27982
	0,5	0,10142	0,34693	0,29234	0,5483	0,54385	1,00818	0,93767	0,78151	1,19982
	0,75	0,10142	0,18727	0,54157	0,5483	0,53725	1,02057	0,93767	0,87528	1,07128
	1	0,10142	0,10142	1	0,5483	0,5483	1	0,93767	0,93767	1
5	0,001	0,18981	0,9984	0,19011	0,91215	0,9984	0,91361	0,99983	0,9984	1,00143
	0,05	0,18981	0,92047	0,20621	0,91215	0,92145	0,98991	0,99983	0,92339	1,08278
	0,1	0,18981	0,84246	0,22530	0,91215	0,85004	1,07307	0,99983	0,86413	1,15704
	0,15	0,18981	0,76737	0,24735	0,91215	0,79143	1,15253	0,99983	0,83234	1,20123
	0,25	0,18981	0,63058	0,30101	0,91215	0,72288	1,26183	0,99983	0,84416	1,18441
	0,5	0,18981	0,38911	0,48781	0,91215	0,75453	1,2089	0,99983	0,96375	1,03744
	0,75	0,18981	0,26383	0,71944	0,91215	0,84511	1,07933	0,99983	0,99646	1,00338
	1	0,18981	0,18981	1	0,91215	0,91215	1	0,99983	0,99983	1
10	0,001	0,33783	0,9984	0,33837	0,99696	0,9984	0,99856	1	0,9984	1,0016
	0,05	0,33783	0,92059	0,36697	0,99696	0,92255	1,08066	1	0,92631	1,07955
	0,1	0,33783	0,84342	0,40055	0,99696	0,85814	1,16177	1	0,88354	1,13181
	0,15	0,33783	0,77053	0,43844	0,99696	0,81554	1,22245	1	0,88081	1,13532
	0,25	0,33783	0,64362	0,52489	0,99696	0,79951	1,24696	1	0,93672	1,06755
	0,5	0,33783	0,45374	0,74455	0,99696	0,9153	1,08922	1	0,99843	1,00157
	0,75	0,33783	0,38032	0,88828	0,99696	0,98018	1,01712	1	1	1
	1	0,33783	0,33783	1	0,99696	0,99696	1	1	1	1
20	0,001	0,59332	0,9984	0,59427	1	0,9984	1,0016	1	0,9984	1,0016
	0,05	0,59332	0,92084	0,64432	1	0,92469	1,08144	1	0,93183	1,07316
	0,1	0,59332	0,84534	0,70187	1	0,87304	1,14542	1	0,91445	1,09355
	0,15	0,59332	0,7767	0,7639	1	0,85571	1,16862	1	0,93977	1,06409
	0,25	0,59332	0,66833	0,88777	1	0,89515	1,11713	1	0,98963	1,01048
	0,5	0,59332	0,56407	1,05186	1	0,99072	1,00937	1	1	1
	0,75	0,59332	0,57101	1,03907	1	0,99979	1,00021	1	1	1
	1	0,59332	0,59332	1	1	1	1	1	1	1
50	0,001	0,93767	0,9984	0,93917	1	0,9984	1,0016	1	0,9984	1,0016
	0,05	0,93767	0,92158	1,01746	1	0,93076	1,07439	1	0,94603	1,05705
	0,1	0,93767	0,85096	1,1019	1	0,909	1,10011	1	0,96608	1,03511
	0,15	0,93767	0,79426	1,18056	1	0,93096	1,07416	1	0,99224	1,00782
	0,25	0,93767	0,73266	1,27982	1	0,9851	1,01513	1	0,99996	1,00004
	0,5	0,93767	0,78151	1,19982	1	0,99999	1,00001	1	1	1
	0,75	0,93767	0,87528	1,07128	1	1	1	1	1	1
	1	0,93767	0,93767	1	1	1	1	1	1	1
100	0,001	0,99865	0,9984	1,00025	1	0,9984	1,0016	1	0,9984	1,0016
	0,05	0,99865	0,92279	1,08221	1	0,93982	1,06403	1	0,96344	1,03795
	0,1	0,99865	0,85988	1,16138	1	0,94776	1,05512	1	0,99274	1,00731
	0,15	0,99865	0,8205	1,21712	1	0,9798	1,02062	1	0,99975	1,00025
	0,25	0,99865	0,81343	1,2277	1	0,99943	1,00057	1	1	1
	0,5	0,99865	0,93343	1,06987	1	1	1	1	1	1
	0,75	0,99865	0,98778	1,011	1	1	1	1	1	1
	1	0,99865	0,99865	1	1	1	1	1	1	1





Gráfico 2.1 – Valor do poder dos planos p_2 versus a razão q para $\delta=0.5$ e $k=2$ e tamanho diferentes de amostras.

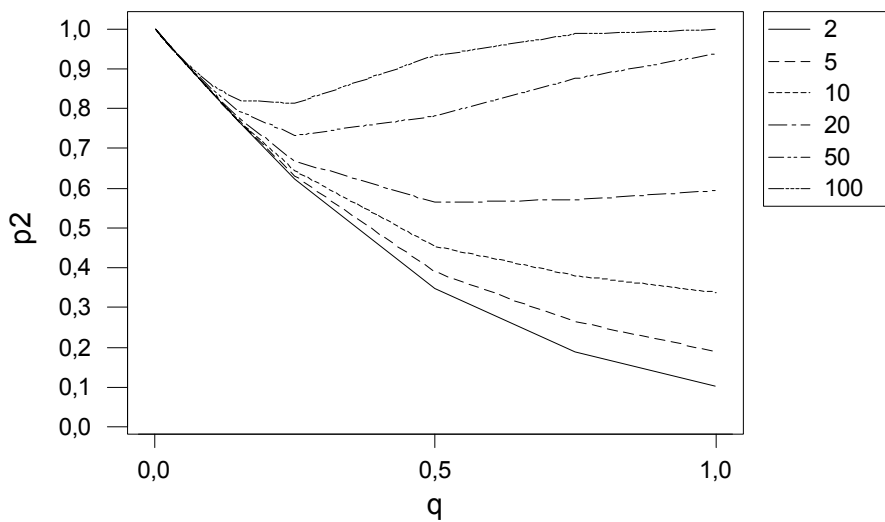


Gráfico 2.2 – Valor do poder dos planos p_2 versus a razão q para $\delta=0.5$ e $k=3$ e tamanho diferentes de amostras.

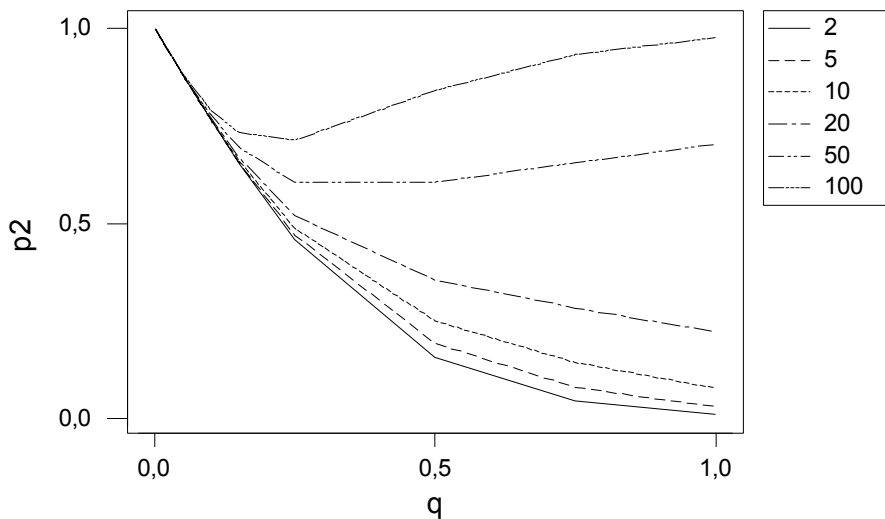




Gráfico 2.3 – Valor do poder dos planos p_2 versus a razão q para $\delta=1.5$ e $k=2$ e tamanho diferentes de amostras.

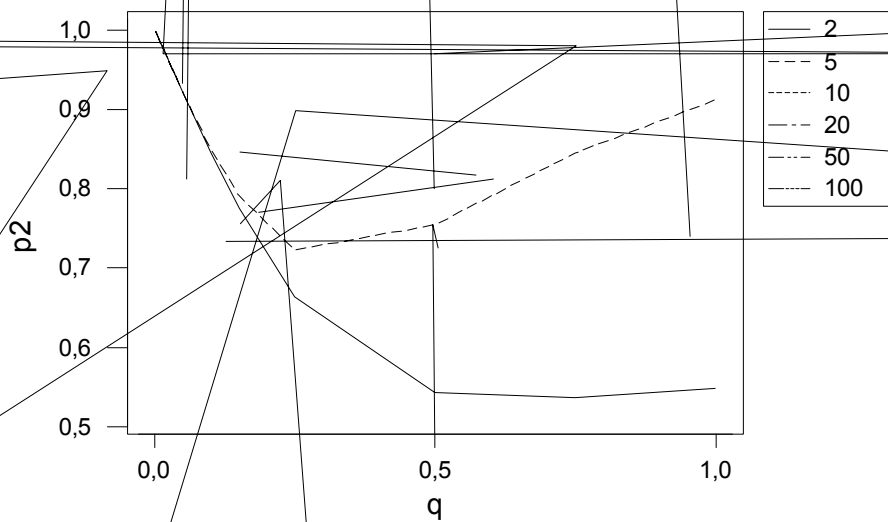




Gráfico 2.5 – Valor do poder dos planos p_2 versus a razão q para $\delta=2.5$ e $k=2$ e tamanho diferentes de amostras.

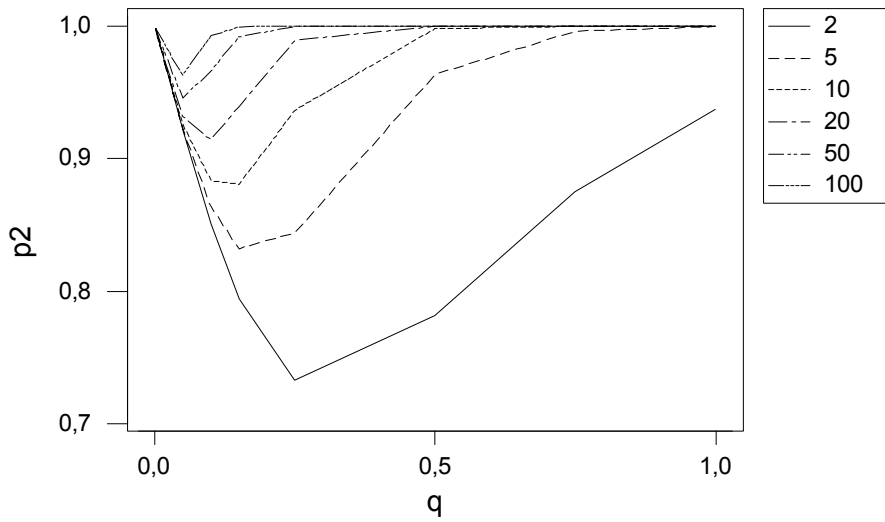
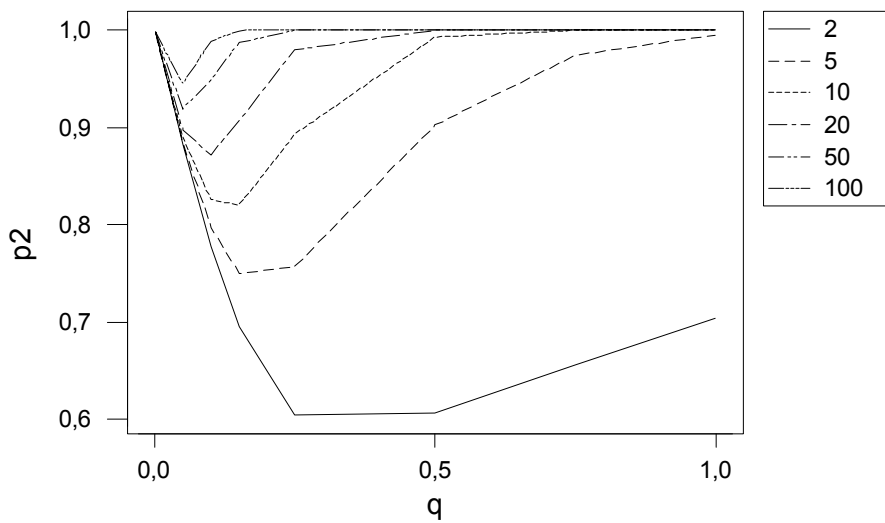


Gráfico 2.6 – Valor do poder dos planos p_2 versus a razão q para $\delta=2.5$ e $k=3$ e tamanho diferentes de amostras.





3 CONCLUSÃO : O planejamento econômico de gráficos de controle tem dado ênfase aos gráficos de controle \bar{X} usados isoladamente. Para calcular a eficiência desses planos, mais especificamente $(1-\beta)$ dos planos selecionados, tradicionalmente ignora os efeitos dos desvios na variabilidade do processo. No entanto, é possível calcular a probabilidade de detectar o desvio, tendo este acontecido, levando em consideração a existência de desvios na variabilidade do processo. O estudo, ora realizado, revela, que a desconsideração da existência de desvios na variabilidade do processo, quando se utiliza os gráficos de controle \bar{X} pode levar a resultados equivocados a respeito da eficiência dos gráficos. A análise dos resultados obtidos mostra que, quando os desvios na variabilidade do processo fora de controle são extraordinariamente maiores do que sob controle, o poder dos planos levando em conta os desvios apresenta resultados muito maiores do que o dos que não levam em conta a existência dos desvios. Este resultado vem de encontro ao esperado, pois, se o desvio padrão do processo fora de controle é muito superior ao do processo sob controle, qualquer gráfico \bar{X} é rápido na detecção de uma alteração no processo, independente do número de desvios padrões que separam os limites da linha central do gráfico. Neste caso, é recomendável utilizar p_2 que considera a existência dos desvios. Para amostras de tamanhos maiores, sempre que se toma valores razoáveis de desvios da média e da variabilidade, as curvas resultantes considerando desvios na variabilidade apresentam valores de poder mais razoáveis do que o poder calculado tradicionalmente principalmente quando o desvio do processo fora de controle $\sigma_1 \leq 4,0 \sigma_0$, o poder do plano considerando os desvios na variabilidade sempre menor daquele calculado tradicionalmente ($p_2 < p_1$), convergindo para p_1 quando $\sigma_0/\sigma_1=1$. Nestas situações também se recomenda o uso de p_2 que leva em conta a existência de desvios na variabilidade do processo. Apenas para $n=2$, quase sempre a consideração dos desvios na variabilidade apresenta valores do poder sempre maiores que o poder calculado tradicionalmente. Quando os desvios na variabilidade do processo fora de controle são extraordinariamente grandes, esse resultado é esperado, mas quando esses desvios se tornam menores, não. No entanto, amostras de tamanho 2, definitivamente, não são recomendáveis para controlar qualquer tipo de processo.

AGRADECIMENTOS: Os autores agradecem aos revisores anônimos pela valiosa contribuição prestada para melhoria da qualidade deste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAKER, K.R. Two processes in the economic design of an \bar{X} -chart. *AIIE Transactions*, 3(4): 257-263, 1971.
- CASTILLO, E. del; MONTGOMERY, D. C. Optimal design of control charts for monitoring short production runs. *Journal and Newsletter for Quality and Reliability*, 8 (4): 225-240. 1993.
- COLLANI, E. v., The economic design of \bar{X} -control charts. *Proceedings of IASTED International Symposium on Reliability and Quality Control*. Paris, 186-189, 1987.
- COLLANI, E. v., A Unified approach to optimal process control. *Metrika*, 35: 145-159, 1988.
- DUNCAN, A. J. The economic design of \bar{X} -charts used to maintain current control of a process. *J. Am. Stat. Assoc.*, 51: 228-242, 1956.
- GIBRA, I. N. Economically optimal determination of the parameters of \bar{X} control chart. *Management Science*, 17 (9): 635-646. 1969.
- LADANY, S.P. Optimal use of control charts for controlling current production. *Management Science*, 19(7): 763-772, 1973.
- LADANY, S.P.; ALPEROVITCH, Y. An optimal set-up policy for control charts. *Omega*, 3: 113-118, 1975.
- LADANY, S.P.; BEDI, D.N. Selection of the optimal set-up policy. *Naval Research Logistics Quarterly*, 23: 219-233, 1976.
- LORENZEN, T.J.; VANCE, L.C. The economic design of control charts: a unified approach. *Technometrics* 28 (1): 3-10, 1986.