QUAL É O MENOR CAMINHO? (CONCEITOS, APLICAÇÕES E EXPERIÊNCIAS NO ENSINO MÉDIO COM TEORIA DOS GRAFOS & ALGORITMOS)

Samuel Jurkiewicz
Politécnica e COPPE –UFRJ
Rio de Janeiro
jurki@pep.ufrj.br

Ivail Muniz Junior
PPECM/CEFET-RJ, Colégio Pedro II, FAETEC, Colégio Zaccaria
Rio de Janeiro
ivailmuniz@gmail.com

RESUMO

A partir da segunda Guerra Mundial, o advento dos computadores e das técnicas digitais vem promovendo profundas transformações, exercendo pressão inequívoca na sociedade e em particular na educação. Diante dessa nova realidade, que matemática não pode deixar de ser ensinada para uma geração que inexoravelmente tem (e terá) de usar o computador, minimizar custos e maximizar recursos cada vez mais escassos?

Neste trabalho apresentaremos sinteticamente uma proposta de Introdução à Teoria dos Grafos e Algoritmos no Ensino Médio. Relataremos algumas atividades realizadas com alunos da 3ª série do Colégio Pedro II, Unidade Centro - Rio de Janeiro, de Março a Agosto de 2006, que, divididas em três módulos, contemplaram assuntos como ciclos Eulerianos, Ciclos Hamiltonianos, o Problema do caminho mínimo (Algoritmo de Dijkstra), o Problema do Caminho Crítico, Teorema de Festinger, dentre outros

PALAVRAS CHAVE. Teoria dos Grafos, Ensino da Matemática

ABSTRACT

Since World War II the presence of computers and digital techniques had become a transformation power, being a pressure factor over society and in our particular case, over education agents. We should ask what mathematics could not be avoided in order to allow the next generations to use computers in max/minimizations problems in order to manage human and material resources.

In this work we propose an introduction to Graph Theory and Algorithms in pre-universitary school. We describe our experience in workshops with students of the 3rd grade of Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, between march and August of 2006. These activities include 3 modules including Eulerian Cycles and Paths, Hamiltonian Cycles, Minimum Path Problem (Dijkstra Algorithm), Critical Path Problem and the Festinger Theorem..

KEYWORDS. Graph Theory, Mathematics Teaching

1 – INTRODUÇÃO.

A partir da segunda Guerra Mundial, o advento dos computadores e das técnicas digitais vem promovendo profundas transformações na sociedade, exercendo pressão inequívoca na forma de se obter, tratar e interpretar a informação, onde a cultura dos procedimentos seqüenciais vem se tornando rapidamente um padrão. Acessar a Internet, pesquisar dados, decidir qual o caminho de menor custo, minimizar despesas, utilizar programas de computador, acessar terminais eletrônicos, decidir sobre a utilização recursos (das mais variadas fontes) baseados em sua escassez, são exemplos de situações onde as tomadas de decisão requerem procedimentos algorítmicos.

Diante dessa nova realidade, que matemática não pode deixar de ser ensinada para uma geração que inexoravelmente tem (e terá) de usar o computador, minimizar custos e maximizar recursos cada vez mais escassos?

Defendemos que, para contribuir com uma educação matemática que trate dessa realidade computacional, é necessário que a matemática ensinada contemple o estudo de ferramentas que propiciem o desenvolvido das novas habilidades necessárias à compreensão, análise e utilização de processos algorítmicos. Assim como a utilização de tecnologia para entender matemática é importante, se faz necessário, também, aprender matemática para entender a tecnologia. Conforme comenta (JURKIEWICZ, 2002, p.158):

> "O pensamento algorítmico pode e deve ser introduzido de forma educacionalmente pertinente de maneira a fornecer às sociedades do século XXI, não programadores (embora também), mas cidadãos aptos a viver num mundo onde a cultura dos procedimentos seqüenciais se torna rapidamente um padrão".

A teoria dos Grafos permite, de forma simples e contextualizada, a construção das idéias básicas que permeiam os processos algorítmicos, além de ser uma área riquíssima em aplicações, as quais nos remetem a problemas realmente contextualizados (e não "pretextualizados"), interessantes e atuais, tais como: Ciclos Eulerianos e Ciclos Hamiltonianos, o Problema do caminho mínimo, do caminho crítico, do carteiro chinês e do caixeiro viajante, dentre outros.

O próprio desenvolvimento da Teoria dos Grafos, cujos primeiros resultados derivaram de desafios despretensiosos (Problema das sete pontes e Problema das quatro cores) e jogos desafiadores (Hamilton), nos remete a problemas que, apesar de serem simples em sua compreensão, e, portanto, acessíveis e oportunos para o Ensino Médio, desencadeiam soluções e discussões complexas, envolvendo potencialidades e limitações computacionais, algumas das quais ainda não resolvidas.

Nesta comunicação científica apresentaremos sinteticamente uma proposta de Introdução à Teoria dos Grafos e Algoritmos no Ensino Médio. Relataremos algumas atividades realizadas com alunos da 3ª série do Colégio Pedro II, Unidade Centro - Rio de Janeiro, de Março a Agosto de 2006, que, divididas em três módulos, contemplaram assuntos como ciclos Eulerianos, Ciclos Hamiltonianos, o Problema do caminho mínimo (Algoritmo de Dijkstra), o Problema do Caminho Crítico, Teorema de Festinger, dentre outros.

2 – POR QUE TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO?

A primeira justificativa, não necessariamente a mais importante, já comentada na introdução, é que a teoria dos Grafos permite, de forma simples e contextualizada, a construção das idéias básicas que permeiam os processos algorítmicos. A importância disso decorre das transformações na sociedade comentadas anteriormente.

É importante ressaltar que não objetivamos em nosso trabalho ensinar o aluno a criar algoritmos e nem aprender programação de computadores. Buscar-se-á, nas atividades, que o discente entenda como um computador é instruído a resolver alguns problemas, isto é, que tipo de estratégia uma máquina previamente programada poderia usar, a partir de um conjunto de tarefas passo a passo, que a permitiria rapidamente testar, pesquisar ou exibir soluções do problema apresentado e de que modo teoremas e métodos podem interferir na forma dele (computador) trabalhar.

A articulação da Matemática ensinada no ensino médio com temas atuais da ciência e da tecnologia tem sido defendida e recomendada. Os problemas tratados neste trabalho, utilizando grafos, tais como o problema das pontes de Konigsberg, do Caixeiro Viajante e do caminho mínimo, apontam para essa articulação, na medida em que oferecem situações de natureza combinatória que estão intimamente ligadas às questões tecnológicas atuais. Um recente documento do MEC, inclusive, traz recomendações sobre a exploração de problemas combinatórios que não apenas os usuais, e importantes, problemas de contagem. É o que aponta (BRASIL, 2006, p.94):

> "No ensino médio, o termo "combinatória" está usualmente restrito ao estudo dos problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é problema da pontes de Konisberg, tratado por Euler... Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo – no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução... Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo de uma cidade".

A introdução da teoria dos grafos no Ensino Médio é apresentada neste trabalho como uma ferramenta poderosa para resolver problemas de minimização e maximização. O aluno já estuda no Ensino Médio alguns problemas de máximo e mínimo, que são geralmente modelados através de funções quadráticas ou modulares. Entretanto, existem problemas deste tipo que são modelados por meio de algoritmos, como o Problema do caminho mínimo, do caminho crítico dentre outros, que passam muito longe do Ensino Médio. Todavia, a matemática envolvida para se entender tais conceitos já é ensinada há muito tempo. Entendemos, portanto, que o aluno pode e deve ter contato com esse tipo de matemática já na Educação Básica. As atividades de Grafos desenvolvidas apresentam resultados matemáticos que permitem resolver problemas contextualizados, a maioria deles envolvendo a minimização ou maximização de distâncias, tempos, custos, dentre outras grandezas.

No campo da legislação vigente em nosso País, o ensino de Grafos converge para as três finalidades do Ensino Médio, apresentadas no art. 35 da LDB, quais sejam:

> "O Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidade:
> I – a consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento dos estudos;
> II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> III – a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos nos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina."[1]

De fato, desde os conceitos estudados em Grafos como ciclos eulerianos e hamiltonianos até a existência, necessidade, interpretação e utilização de algoritmos para

[1] Lei nº 9.394/96 – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Art.35.

resolver problemas envolvendo estes assuntos, o ensino de grafos colaboram para que as três finalidades acima descritas sejam atingidas.

Destacamos ainda que as atividades de Grafos realizadas em sala de aula não somente apontam, mas também contribuem potencialmente para a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos nos processos produtivos, terceira finalidade apontada pela LDB para o Ensino Médio.

O Planejamento, execução e avaliação de ações de intervenção na realidade são apontados nos PCN's do Ensino Médio como objetivos da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 1999. p.34). Temos aí mais uma justificativa para a abordagem deste assunto, na medida que ele fornece conhecimentos para a interpretação e análise e execução de ações do cotidiano.

Mais especificamente, como aponta o PCN+ (BRASIL, 2002, p. 113), a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias elegeu três grandes competências como metas a serem perseguidas durante essa etapa da educação básica: **representação e comunicação**, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento; **investigação e compreensão**, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências; **contextualização** das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das idéias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

No que diz respeito à <u>representação e comunicação</u>, temos na teoria dos grafos consideráveis potencialidades, das quais destacamos: 1) a existência de problemas que requerem análise, resolução e discussão das respostas obtidas, inserindo os alunos em situações onde precisam perceber que ter respostas para os problemas não significa ter a melhor solução para resolvê-los, como ocorrera nos problemas dos ciclos eulerianos, de dominação e de caminho mínimo, presentes na pesquisa; 2) a possibilidade de expressar sua estratégia para resolver o problema antes de conhecer uma técnica, o que não é possível sem a representação e comunicação.

A <u>investigação e compreensão</u> estão no cerne deste trabalho, onde a dinâmica já apresentada anteriormente em que o aluno tenta resolver e explica como o fez, seguida da apresentação dos teoremas e algoritmos utilizados para resolver os problemas e finalizada com uma discussão concluindo o trabalho, contribuem significativamente para o desenvolvimento desta habilidade.

Diversos problemas apresentados nas atividades são realmente <u>contextualizados</u>. A pesquisa operacional, por exemplo, utiliza diversas ferramentas aqui trabalhadas, para resolver problemas reais.

Um exemplo interessante é o método CPM (Critical Path Method), estudado no módulo 3 das atividades. Conforme aponta (SANTOS, 2002, p. 239), esse método, que tem como objetivo o planejamento e a execução de um projeto constituído por um conjunto de tarefas sujeitas a restrições de precedência, foi desenvolvido pela firma E.I. du Pont de Nemours Company, no final da década de 1950, para gerenciamento de projetos de construção e sua aplicação teve tanto sucesso que sua utilização por firmas que ganhassem contratos de licitação passou a ser uma exigência do governo americano.

A teoria dos grafos é um assunto que permite ao aluno estudar alguns princípios de matemática discreta que têm sido utilizados para a resolução de diversos problemas envolvendo minimização de distâncias, alocação de recursos e maximização de resultados, dentro de contextos reais. O estudo dos algoritmos são uma ótima oportunidade, dentro de grafos, para contribuir com a compreensão do aluno de como o conhecimento matemático, aliado à tecnologia, têm lidado com problemas importantes.

3 – ELABORAÇÃO & DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES E A METODOLOGIA ADOTADA.

A teoria dos Grafos tem, atualmente (2006), milhares de algoritmos, milhares de teoremas que têm contribuído para a resolução de problemas em dezenas de áreas do conhecimento. Uma pergunta imediata que surge é: diante de um ramo tão producente, e de uma proposta de ensino de Grafos para o Ensino Médio, que conteúdos escolher para que as idéias básicas de Grafos sejam ensinadas e que algoritmos selecionar? Os temas em Grafos foram selecionados para este trabalho de modo que:

1) fossem simples em sua apresentação;
2) despertassem a curiosidade e apresentassem resultados que pudessem ser demonstrados;
3) contemplassem os primórdios da Teoria dos Grafos – Problema das Pontes de Koningsberg;
4) apresentassem algoritmos que pudessem ser explicados e justificados convenientemente aos alunos;
5) contribuíssem para a apresentação das potencialidades e limitações do uso do computador, previamente programado, na resolução de problemas;
6) permitissem a interligação com outros assuntos presentes no Ensino Médio;

A Elaboração desse material didático, então, reuniu atividades já realizadas por Jurkiewicz, re-formatadas e modificadas com a inserção de diversos problemas, bem como novas atividades envolvendo o problema do caminho mínimo, o teorema de festinger, uma introdução sobre complexidade e o problema do caminho crítico, até então não aplicadas nas oficinas de Matemática Discreta[2].

Entendemos que muitos outros assuntos em Grafos podem ser explorados no Ensino Médio, e não foram contemplados nesse trabalho como o problema das quatro cores, algoritmos de busca como os de FLOYD, KRUSKAL, dentre outros. Neste trabalho fizemos uma opção que se mostrou producente e reveladora.

Além disso, a aplicação das atividades com os alunos de Ensino Médio, produzindo-se dois registros (um escrito – folhas de atividades dos alunos, e outro digital – filmes de trechos das aulas), nos auxiliaram na análise de dúvidas, questionamentos, estratégias de resolução e respostas dos alunos.

A metodologia adotada é a resolução de problemas, por meio da qual os alunos estabelecem relações e caminham na conclusão de resultados. A cooperação livre foi incentivada de modo que os alunos optassem por reunir-se em grupos para discutirem suas idéias.

A dinâmica das aulas foi composta, essencialmente de dois momentos, nem sempre disjuntos: 1) os alunos apresentam suas estratégias e soluções para os problemas, apresentando assim suas concepções prévias; 2) discussão das técnicas apresentadas pelos alunos, suas potencialidades e limitações, seguida de demonstração de teoremas e algoritmos, suas potencialidades e limitações.

As atividades foram dividas em oficinas distribuídas em três módulos: Módulo I - Ciclos e Caminhos Eulerianos; Módulo II – Problema do caminho mínimo; Módulo III – Problema do Caminho Crítico.(CPM – Critical Path Method), cujo distribuição mais detalhada é:

Módulo I

Oficina 1: Ciclos e caminhos eulerianos. Investigando relações.
Oficina 2: Resolução de problemas e atividades lúdicas utilizando teoria dos grafos.
Oficina 3: No mundo dos computadores: algoritmos, computadores e Combinatória.
Oficina 4: O problema do caixeiro viajante numa versão fluminense.
Oficina 5: Matrizes e Grafos: aplicando o Teorema de Festinger.

Módulo II

---

[2] Para maiores detalhes sobre oficinas de matemática discreta já realizadas por Jurkiewicz e Leventhal, ver: JURKIEWICZ, S & Leventhal, G. (2004); Oficinas de Matemática Discreta no Ensino Médio in II História e Tecnologia no Ensino de Matemática, Resumos estendidos, pp 1-6, Carvalho L. M.;(org.) 2004, IME-UERJ.

Oficina 6: Investigando caminhos mínimos.
Oficina 7: Qual é o menor caminho? O Algoritmo de Dijkstra.
Simulações com o Algoritmo de Dijkstra no Laboratório de Informática.

Módulo III

Oficina 8: O problema da fábrica do Samuel.
Oficina 9: O Método do Caminho Crítico. (Critical Path Metod – CPM).

O objetivo do módulo I é tratar dos ciclos eulerianos, apresentar problemas que podem ser modelados através desses resultados, discutindo de forma introdutória e pertinente a este nível de ensino a necessidade, bem como, potencialidades e limitações da utilização de algoritmos nestes problemas. A estrutura de dados matricial (através da matriz de adjacência) também foi abordada permitindo uma aplicação do produto de matrizes na determinação do número de caminhos em um grafo (teorema de Festinger).

A figura 1 mostra como um pequeno mapa, com alguns quarteirões, trabalhado com os alunos em uma das atividades, pode ser modelado por meio de um grafo, onde as esquinas são os vértices e as ruas as arestas.

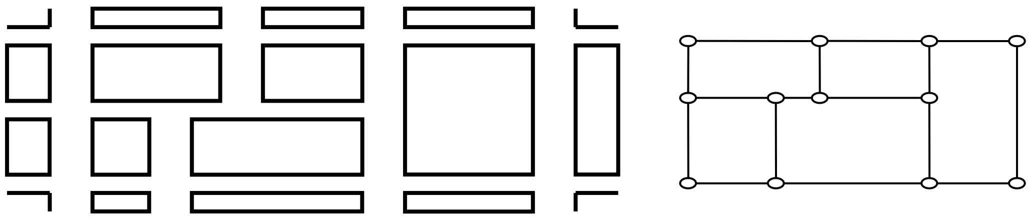


Figura 1.
Mapa com alguns quarteirões e grafo associado ao mapa

Neste problema, por exemplo, perguntamos aos alunos se era possível um carteiro, partindo de determinada esquina, passar por todas as ruas exatamente uma vez, entregando as cartas, e voltar ao ponto de partida. Exploramos também diante da impossibilidade deste percurso quantas e quais e as ruas seriam repetidas para que o trajeto fosse o mais econômico[3], isto é, neste caso, com o menor número de ruas repetidas.

Mas antes dos alunos atacarem problemas como o apresentado acima, atividades de investigação foram realizadas com o objetivo de identificar relações entre números de vértices e arestas, envolvendo inclusive a paridade dos vértices; convergir para a descoberta da condição geral de existência de um ciclo ou caminho eulerianos.

A figura 2 representa uma dessas atividades de investigação.

Nesta ficha os alunos investigaram cinco grafos diferentes, preenchendo informações sobre o grau de cada vértice, soma dos graus, o número de arestas, o número de vértices de grau ímpar, de forma que estabelecessem relações, algumas das quais, poderiam ajudar na construção de uma explicação de quando um grafo é euleriano.

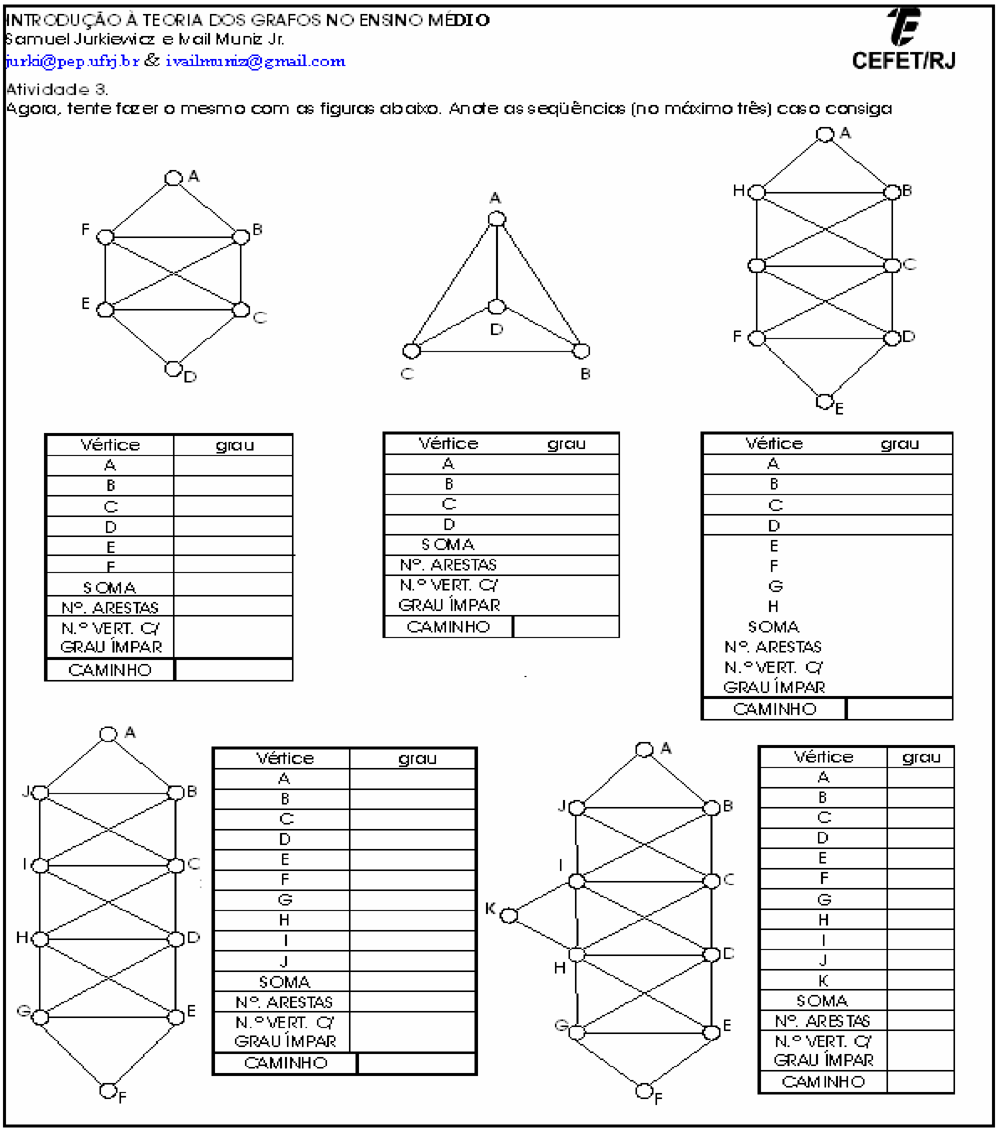
Foram explorados outros resultados elementares da Teoria de Grafos. O primeiro deles: "A soma dos graus dos vértices de um grafo qualquer é sempre o dobro do número de arestas"; bem como seu corolário:"Em qualquer grafo G=(V,E), o número de vértices de grau ímpar é par".

Na figura 3 apresentamos outra ficha onde os alunos, aproveitando a primeira atividade realizada, simulavam um procedimento realizado por uma máquina para verificar[4]

[3] Tratamos no módulo dois de um caminho mais econômico utilizando custos positivos para as arestas, que é conhecido como o problema do caminho mínimo.

[4] Poderíamos utilizar, neste caso, o algoritmo de Floyd para exibir caminhos eulerinos em um grafo, e, portanto, todas as seqüências que os representassem. Entretanto, nosso objetivo aqui foi simular um procedimento que testasse todas as seqüências, uma a uma, método conhecido como "força-bruta", para mostrarmos as idéias básicas de um algoritmo, e de como ele pode funcionar rodando em um computador, além de abordamos introdutoriamente o conceito de complexidade.

se uma dada seqüência era, ou não, solução do problema, isto é, se representava um caminho euleriano no grafo dado.


INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO
Samuel Jurkiewicz e Ivail Muniz Jr.
jurki@pep.ufrj.br & ivailmuniz@gmail.com
CEFET/RJ

Atividade 3.
Agora, tente fazer o mesmo com as figuras abaixo. Anote as seqüências (no máximo três) caso consiga

Vértice	grau
A	
B	
C	
D	
E	
F	
SOMA	
Nº. ARESTAS	
N.º VERT. C/ GRAU ÍMPAR	
CAMINHO	

Vértice	grau
A	
B	
C	
D	
SOMA	
Nº. ARESTAS	
N.º VERT. C/ GRAU ÍMPAR	
CAMINHO	

Vértice	grau
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
SOMA	
Nº. ARESTAS	
N.º VERT. C/ GRAU ÍMPAR	
CAMINHO	

Vértice	grau
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	
SOMA	
Nº. ARESTAS	
N.º VERT. C/ GRAU ÍMPAR	
CAMINHO	

Vértice	grau
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	
K	
SOMA	
Nº. ARESTAS	
N.º VERT. C/ GRAU ÍMPAR	
CAMINHO	

Figura 2

Figura 3

Fornecendo a lista de arestas para o computador estamos informando as ligações entre os vértices. Ótimo, **pois o que importa no grafo são as ligações entre os vértices**. Agora, como ele verificaria, por exemplo, que a seqüência ABECDBCDE é uma solução?

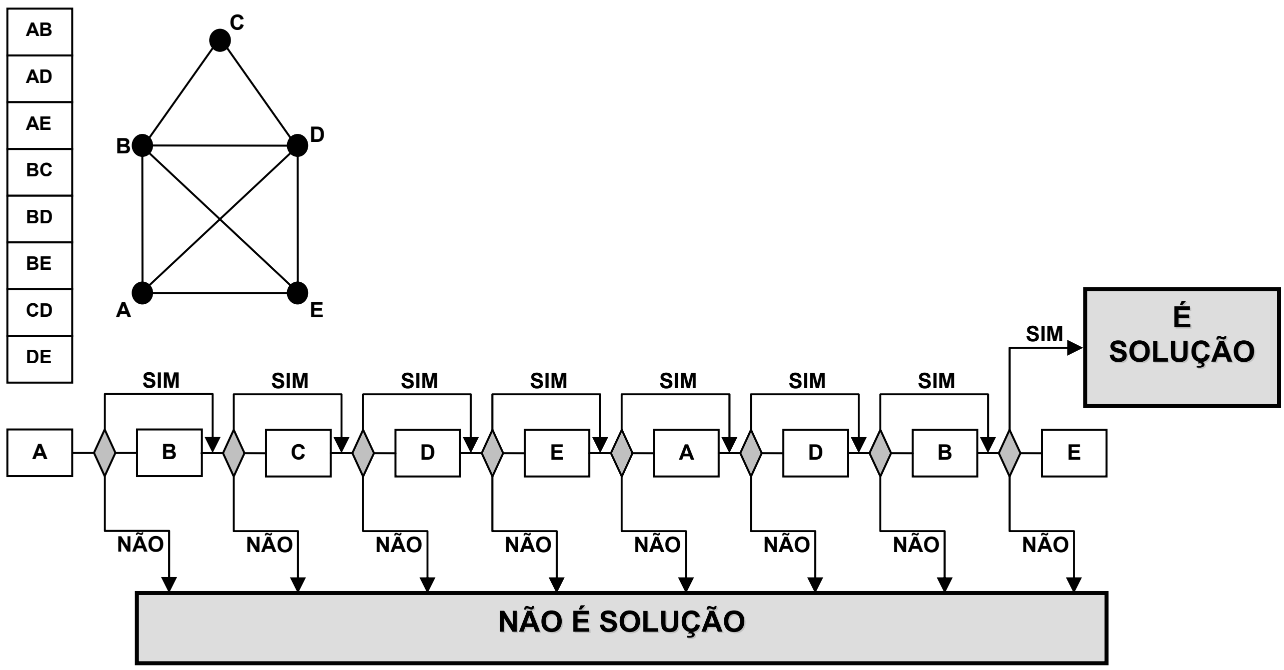
Após a entrada de dados o computador executará uma seqüência de instruções, que é traduzida para uma linguagem em que ele possa entender (linguagem de programação) onde basicamente ele verificará, passo a passo, se as arestas pertencem à lista na ordem que foi apresentada. Este processo é chamado de algoritmo.

Em nosso caso, depois da entrada dos dados, o primeiro passo seria verificar se AB é uma aresta, isto é se pertence à lista que você informou. Caso afirmativo, marcaria essa aresta como já usada e passaria para a próxima, que é BE, verificando se pertence à lista. Caso afirmativo, marcaria essa aresta como já usada e passaria para a próxima e assim por diante. Se, ao final, todas as verificações forem verdadeiras e todas as arestas da lista tiverem sido usadas, então a seqüência é uma solução.

Vamos simular esse procedimento, através do esquema apresentado abaixo.

Não esqueça de ir marcando (na tabela da esquerda) as arestas à medida que forem sendo utilizadas. No esquema, a opção **SIM** representa que a aresta pertence à lista e ainda não foi marcada, e a opção **NÃO** representa a negação desse fato, isto é, a aresta não pertence à lista ou já foi marcada. Bom trabalho

1ª Seqüência: **ABCDEADBE.**



No módulo II tratamos do problema do caminho mínimo, onde o objetivo era mostrar como o algoritmo de dijkstra permite encontrar o menor de caminho entre um vértice escolhido inicialmente, (vértice de partida), e outro vértice qualquer do grafo.

Após a investigação dos alunos, apresentamos e discutimos o algoritmo de Dijkstra, suas potencialidades e limitações. Constatamos que, apesar do grupo ter achado, em sua grande maioria, o menor caminho nos grafos apresentados, não havia a certeza de que o caminho encontrado era realmente o menor, sendo as explicações fragilmente organizadas e estruturadas. Assim, o aluno encontrava o caminho mínimo, mas não sabia explicar o porquê. A figura abaixo apresenta um dos problemas[5] trabalhados em sala de aula neste módulo.

[5] Este problema também foi trabalhado em um minicurso na III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006, Goiás, ministrado por MUNIZ, Ivail Junior. & JURKIEWICZ, Samuel.

Problema: **Qual é o menor caminho da casa de João até a Escola?**

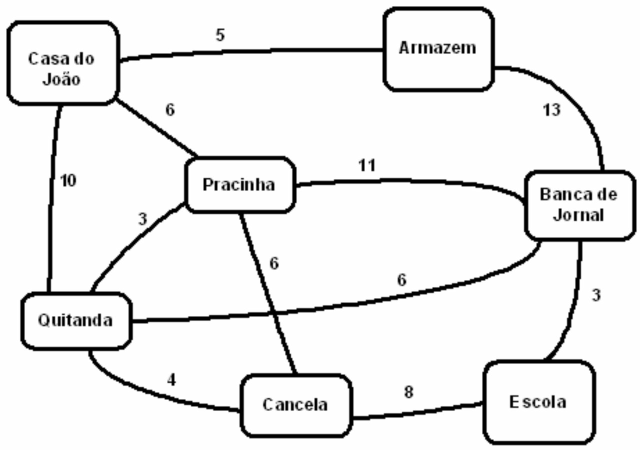


Figura 4

A apresentação do algoritmo de Dijkstra após a investigação gerou surpresa nos alunos. Apesar da simplicidade e eficiência do algoritmo de Dijkstra nenhum aluno chegara àquele procedimento para resolver o problema.

Simulações do algoritmo de Dijkstra foram realizadas no Laboratório de Informática do Colégio Pedro II. Tais simulações contribuíram para a aquisição das idéias que permeiam o processo algorítmico, e também para a constatação da velocidade de execução deste algoritmo, que é considerado como eficiente[6].

No módulo III o problema do caminho crítico foi abordado. Neste problema, através da técnica conhecida como CPM (Critical Path Method), deseja-se modelar, utilizando um grafo orientado (digrafo), o planejamento da execução de um projeto constituído por um conjunto de tarefas sujeitas a restrições de procedências.

As atividades realizadas nas oficinas estavam focadas para determinação do tempo mínimo[7] necessário para o cumprimento da tarefa, identificação das atividades mais críticas, ou seja, que não poderiam atrasar dentro do processo, bem como das atividades com folga, isto é, que dispunham, dentro do processo, de um tempo maior que o necessário para serem realizadas. Discutimos também questões a respeito da alocação de recursos, número de caminhos críticos e tomadas de decisão, de forma introdutória, dentro do processo.

4 – RESULTADOS PRELIMINARES.

Os resultados das atividades apontam positivamente para a possibilidade, importância, relevância, e potencialidade deste assunto no Ensino Médio. Os problemas apresentados foram de fácil compreensão e a proximidade com as aplicações contribuíram para a atenção, interesse e envolvimento nas atividades.

A metodologia adotada facilitou a exposição dos conhecimentos prévios, a troca de informações e, conseqüentemente, a elaboração de estratégias e soluções dos alunos para os problemas apresentados.

Destacamos algumas características observadas durante a realização das atividades que se referem ao desenvolvimento dos alunos e receptividade dos conteúdos:

- Desenvolvimento gradual da habilidade de modelar os problemas propostos construindo grafos;

---

[6] Conforme aponta CARVALHO, entendemos como eficiente, um algoritmo em que o número de passos seja limitado por um polinômio no número de vértices do grafo. Para maiores detalhes, ver: Carvalho, Paulo César Pinto. Eureka 1, 1998, SBM, Brasil, p.53.

[7] É importante destacar que na determinação deste tempo mínimo, era necessário olhar para o tempo máximo requerido para cada tarefa.

- Domínio do conceito de grafos eulerianos, respondendo satisfatoriamente às questões propostas;
- Discussão sobre as potencialidades e limitações computacionais do método da “força bruta”, e compreensão dos algoritmos estudados.
- Domínio da técnica de eulerização de grafos nas questões presentes nas atividades;
- Aparecimento de algumas conjecturas, resultados e demonstrações pelos alunos a partir das idéias apresentadas;
- Utilização gradual da linguagem de grafos para discutirem as questões, empregando ao final, termos como vértices, arestas, circuitos, caminhos, grafos eulerianos, soma dos graus, paridade, etc;
- Utilização dos resultados a respeito da soma dos graus e do número de vértices de grau ímpar em um grafo, em problemas contextualizados, mesclada com conhecimentos anteriores;
- Utilização da estrutura do grafo para facilitar a visualização e investigação do problema, bem como na simulação de possibilidades;
- Obtenção de soluções prévias sem a utilização dos algoritmos, mas sem justificativas generalizadas no caso do problema do caminho mínimo;
- Domínio na utilização do método do caminho crítico nos problemas propostos, com o surgimento de questões levantadas pelos próprios alunos a respeito da alocação e redistribuição de recursos.
- Entendimento dos algoritmos pelos alunos, mas com manutenção de algumas estratégias anteriores. Convívio da concepção prévia com a nova concepção.

Tais características foram analisadas a partir do registro escrito das atividades realizadas pelos alunos. Elas são parciais, pois a análise ainda se encontra em fase de conclusão. O registro áudio-visual da maioria das aulas também contribuiu para essa análise, permitindo a visualização de argumentos que não apareceram no papel, aumentando, assim, a riqueza das informações e concepções que os alunos tinham e construíam ao longo das aulas.

5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.

O ensino de teoria dos grafos oferece uma excelente oportunidade de contribuir para um ensino que contribua para a articulação da Matemática estudada no ensino médio com temas atuais da ciência e da tecnologia.

Permite também, quer de forma contextualizada, quer de forma lúdica, abordar problemas de natureza combinatória presentes em questões importantes, reais e interdisciplinares, com as quais a sociedade tem lidado, além dos usuais, e importantes, problemas de contagem presentes no ensino médio.

É nessa direção que caminha este trabalho. Apresentar uma proposta em que o aluno, posicionado no centro de gravidade do processo de aprendizagem, investigue situações-problema ou exercícios que permitam a aquisição de conceitos em grafos, bem como, entenda as idéias básicas que permeiam a utilização de ferramentas computacionais na resolução destes problemas – utilizando matemática para entender a tecnologia. Caminhamos assim na contribuição da matemática que precisa ser ensinada para quem tem que lidar com os procedimentos algorítmicos.

Reforçamos que os resultados das atividades apontam positivamente para a possibilidade, importância, relevância, e potencialidade deste assunto no Ensino Médio.

Concluímos afirmando que este trabalho tem um caráter introdutório, apesar do enfoque formativo. Estamos certos de que os assuntos de teoria dos grafos aqui tratados e aplicados não permitirão ao aluno mais aplicado resolver um problema real de roteamento ou de transporte, mas o permitirão entender os princípios básicos que um profissional da área utilizaria na resolução do problema real; contribuirão para o entendimento do funcionamento das tecnologias que o cercam, baseadas em processos algorítmicos e para a compreensão, parcial é claro, das características computacionais das técnicas matemáticas utilizadas na resolução de problemas reais, de diferentes naturezas e áreas.

Temos, portanto, no ensino de grafos, mais uma oportunidade de contribuir para um ensino de matemática que seja experimental, sem ser superficial; contextualizado sem ser pretextualizado ou banalizado; mediado, atual e relevante para o século XXI.

6 – BIBLIOGRAFIA.

BALAKRISHNAN, R & RANGANATHAN, K. A textbook of graph theory. New York, Springer-Velarg, 1999.

BARNES, Douglas. **From Communication to Curriculum**, Penguin, Middlesex, 1976.

BOAVENTURA, Netto, P.O., Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos, 2ª Edição. Rio de Janeiro, Editora Blucher Ltda, 2001.

BRASIL. Lei nº 9.394/96 – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Art.35. 1996

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília, MEC, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais+ (PCN+) – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio; Volume 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

CARAÇA, Bento de Jesus; Conceitos fundamentais da matemática, 9ª edição. Lisboa. Ed. Livraria Sá da Costa, 1989.

CARVALHO, Paulo César Pinto. Eureka 1, 1998, SBM, Brasil, p.53.

DA PONTE, João Pedro et all; Investigar em Matemática. Coleção: Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte. Ed. Autêntica, 2003.

JURKIEWICZ, S.; "Matemática Discreta em Sala de Aula". In História e Tecnologia no Ensino de Matemática, volume 1, pp 115-161, Carvalho L. M.; Guimarães, L. C. (org.) 2002, IME-UERJ.

JURKIEWICZ, Samuel; LEVENTHAL, Gilda; "Oficinas de Matemática Discreta no Ensino Médio". In II História e Tecnologia no Ensino de Matemática, Resumos estendidos, pp 1-6, Carvalho L. M.;(org.) 2004, IME-UERJ.

JURKIEWICZ, S.;MUNIZ, Ivail Junior. Oficina de Teoria dos Grafos. In: III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006, Goiania. III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática - Resumo das Oficinas. Goiania: UFG, 2006.

LOPES, Alice Ribeiro Casimiro; Conhecimento escolar: ciência e cotidiano, 1ª edição. Rio de Janeiro. Ed. UERJ, 1999.

SANTOS, José Plínio de Oliveira, et al, Introdução à análise combinatória, 3ª edição. Campinas, SP, Editora da Unicamp, 2002.