COTAS PRIMALES Y DUALES PARA EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN CAPACITADO EN DOS ETAPAS

Edith L. Ozuna
Universidad Autónoma de Nuevo León
San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México
lucero@yalma.fime.uanl.mx

Igor Litvinchev
Universidad Autónoma de Nuevo León
San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México
igor@yalma.fime.uanl.mx

Miguel Mata
Universidad Autónoma de Nuevo León
San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México
miguel@yalma.fime.uanl.mx

RESUMEN
En el problema de localización capacitado en dos etapas un conjunto de clientes son abastecidos desde un conjunto de almacenes que a su vez reciben el producto desde un conjunto de plantas. Si una planta o un almacén serán empleados entonces se incurrirá en un costo fijo, además de los costos de envío entre las plantas y los almacenes y entre los almacenes y los clientes. El objetivo consiste en colocar las plantas y almacenes de un conjunto potencial de localizaciones de tal manera que el costo total (costos fijos y costos de envío) sea mínimo. Por su relevancia en la práctica y su complejidad han sido desarrollados para este problema varios enfoques de aproximación. En este trabajo presentamos dos formulaciones matemáticas basadas en programación entera mixta y un análisis de varias relajaciones lagrangianas a ambos modelos, y presentamos también soluciones factibles del problema en base a las soluciones lagrangianas.

PALABRAS CLAVE. Problema de localización capacitado en dos etapas, Relajación lagrangiana, Solución factible. Programación Matemática.

ABSTRACT
In the two-stage capacitated facility location problem a single product is produced at some plants in order to satisfy customer demands. The product is transported from these plants to some depots and then to the customers. The capacities of the plants and depots are limited. The aim is to determine suitable locations from a set of potential plants and depots, such that the total cost is minimal. This cost includes fixed cost associated with open plants and open depots, and variable cost associated with both transportation stages. Due to the importance of location decisions for many organizations, facility location has been widely studied in the literature. Several approaches and approximations have been proposed. In this work we consider two different formulations in mixed integer linear programming and several lagrangian relaxations are analyzed, and we present feasible solutions to the problem based on lagrangean solutions.

KEYWORDS. Two-stage capacitated facility location problem, Lagrangian Relaxation, Feasible solution. Mathematical programming.

1. Introducción

El problema de localización capacitado en dos etapas consiste en un único producto que es producido en un conjunto de plantas con capacidades conocidas y enviado a un conjunto de almacenes también con capacidades conocidas, desde los cuales se enviará el product hacia un conjunto de clientes para finalmente abastecer sus demandas. Usar una determinada planta o almacén incurre en un costo fijo, además del costo por transportar cada unidad de producto entre las plantas y los almacenes y entre los almacenes y los clientes.

El objetivo del problema es determinar cuáles plantas deben utilizarse y cuáes almacenes, así como las rutas que seguirán los productos hasta los clientes de tal forma que las demandas sean satisfechas a un costo mínimo.

Dada su relevancia, el problema de localización en dos etapas ha cobrado mayor importancia debido a la aparición de importantes problemas en la industria que lo involucran. En Barros y Labbé(1994) se propone una relajación lagrangiana para el problema no capacitado, en Beasley(1994) son probadas varias relajaciones, en Gao y Robinson(1994) se implementa un procedimiento dual ascendente para el problema de dos etapas no capacitado, en Marín y Pelegrín(1999) son analizadas varias relajaciones lagrangianas en 2 diferentes formulaciones.

Es conocido que la formulación de un problema es de gran importancia para su resolución. En el presente trabajo se estudian dos formulaciones al problema y se busca comparar varias relajaciones lagrangianas para cada formulación. Además de obtener, en base a estas soluciones lagrangianas, la solución factible del problema.

2. Formulaciones al problema

Para formular el problema se describen unconjuno *I* de plantas potenciales, un conjunto *J* de posibles almacenes y un conjunto *K* de clientes.

Sean $c_{ij} \geq 0$ el costo por transportar una unidad de producto desde la planta $i \in I$ hasta el almacén $j \in J$; análogamente, $d_{jk} \geq 0$ el costo por transportar una unidad de producto desde el almacén $j \in J$ hasta el cliente $k \in K$. Sean $f_i \geq 0$ el costo fijo por emplear la planta $i \in I$ y $g_j \geq 0$ el costo fijo por emplear el almacén $j \in J$.

Sean $b_i > 0$ la capacidad de la planta $i \in I$, $p_j > 0$ la capacidad de la planta $j \in J$ y $q_k > 0$ la demanda del cliente $k \in K$. Sean y_i variables binarias, $y_i = 1$ si y sólo si la planta $i \in I$ es empleada y z_j variables binarias, $z_j = 1$ si y sólo si el almacén $j \in J$ es empleado. Sean x_{ij} variables no negativas, la cantidad de producto enviado de la planta $i \in I$ al almacén $j \in J$ y s_{jk} variables no negativas, la cantidad de producto enviado del almacén $j \in J$ al cliente $k \in K$.

Primera formulación

El problema puede ser formulado mediante el siguiente problema de programación lineal entero mixto (formulación A).

$$z = mín \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} + \sum_{jk} d_{jk} s_{jk} \qquad (1)$$

$$s.a: \quad \sum_j x_{ij} \le b_i \qquad ; i \in I, \qquad (2)$$

$$\sum_i x_{ij} \le p_j \qquad ; j \in J, \qquad (3)$$

$$\sum_j s_{jk} \ge q_k \qquad ; k \in K, \qquad (4)$$

$$\sum_i x_{ij} \ge \sum_k s_{jk} \qquad ; j \in J, \qquad (5)$$

$$x_{ij} \le m_{ij} y_i \qquad ; i \in I, j \in J, \qquad (6)$$

$$s_{jk} \le l_{jk} z_j \qquad ; j \in J,\ k \in K, \qquad (7)$$

$$x_{ij}, s_{jk} \in R^+, y_i, z_j \in \{0,1\} \qquad (8)$$

Las restricciones (2) y (3) aseguran que no sean excedidas las capacidades de las plantas y los almacenes respectivamente. La restricción (4) asegura que las demandas de los clientes sean satisfechas. La restricción (5) impide que los almacenes envíen producto no recibido mientras que (6) y (7) impiden que una planta o un almacén envíen producto si no han sido elegidos. Las restricciones (8) son conocidas como restricciones lógicas, en ellas R^+ representa el conjunto de números reales no negativos. Las cantidades m_{ij} y l_{jk} en las restricciones (6) y (7) son cotas superiores conocidas a las variables x_{ij} y s_{jk}, por ejemplo $m_{ij} = mín\{b_i, p_j\}, l_{jt} = mín\{p_j, q_t\}$.

Segunda formulación

En el siguiente modelo se combinan las restricciones (2) con (6) y (3) con (7) resultando un modelo más compacto (formulación B).

$$z = mín \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} + \sum_{jk} d_{jk} s_{jk} \qquad (9)$$

$$s.a: \quad \sum_j s_{jk} \ge d_k \qquad ; k \in K, \qquad (10)$$

$$\sum_i x_{ij} \ge \sum_k s_{jk} \qquad ; j \in J, \qquad (11)$$

$$\sum_j x_{ij} \le b_i y_i \qquad ; i \in I, \qquad (12)$$

$$\sum_i x_{ij} \le p_j z_j \qquad ; j \in J, \qquad (13)$$

$$x_{ij}, s_{jk} \in R^+, y_i, z_j \in \{0,1\} \qquad (14)$$

3. Relajaciones lagrangianas

Se proponen cinco relajaciones para la formulación A y cinco más para la B, las cuales se describen a continuación:

RA1: Se relajan las restricciones (5) en el modelo A. La relajación resultante se puede descomponer en 2 problemas, uno para cada etapa.

RA2: Se relajan las restricciones (6) en el modelo A. el problema lagrangiano se descompone en un subproblema simple para las variables binarias y_i y en un subproblema para (x, s, z).

RA3: Se relajan las restricciones (7) en el modelo A. El problema lagrangiano se descompone en un subproblema con respecto a las variables binarias z_j y u subproblema para (x, s, y).

RA4: Se relajan las restricciones (2) y (4) en el modelo A. La relajación resultante se descompone en un subproblema para cada $j \in J$.

RA5: Se relajan las restricciones (3) y (5) en el modelo A. Similar a RA1, pero además el subproblema correspondiente a las plantas se separa para cada $i \in I$.

RB1: Se relajan las restricciones (11) en el modelo B. La relajación resultante se puede descomponer en 2 problemas, uno para cada etapa.

RB2: Se relajan las restricciones (12) en el modelo B. El problema lagrangiano se descompone en un subproblema simple para las variables binarias y_i y en un subproblema para (x, s, z).

RB3: Se relajan las restricciones (13) en el modelo B. El problema lagrangiano se descompone en un subproblema con respecto a las variables binarias z_j y u subproblema para (x, s, y).

RB4: Se relajan las restricciones (10) y (12) en el modelo B. La relajación resultante se descompone en un subproblema en y_i y $j \in J$ subproblemas independientes en (x, s, z).

RB5: Se relajan las restricciones (11) y (13) en el modelo B. Similar a RB1, pero además el subproblema correspondiente a las plantas se separa para cada $i \in I$.

4. Recuperar factibilidad de la relajación lagrangiana

Además de encontrar buenas cotas duales se busca también obtener cotas primales del problema de localización capacitado en dos etapas. Para esto, se utiliza el siguiente algoritmo que recupera factibilidad a partir de las soluciones lagrangianas en cada iteración.

Algoritmo

Sean $\overline{y}_i, \overline{z}_j$ de la relajación lagrangiana para cada iteración.

Paso 0: Hacer $\overline{y}_i \leftarrow \dfrac{\sum_j x_{ij}}{b_i}, \overline{z}_j \leftarrow \dfrac{\sum_k s_{jk}}{p_j}$.

Sean $y_i = 0, \forall i, I_1 = \varnothing, I_0 = I$;

$z_j = 0, \forall j, J_1 = \varnothing, J_0 = J$.

Paso 1: Sean $i^* = \arg máx\left\{\overline{y}_i \middle| i \in I_0\right\}$.

Paso 2: Hacer $y_{i^*} \leftarrow 1, I_1 \leftarrow I_1 \cup \left\{i^*\right\}, I_0 \leftarrow I_0 - \left\{i^*\right\}$.

Paso 3: Si $\sum_{i \in I_1} b_i \geq \sum_k q_k$ ir al paso 4, en caso contrario, volver al paso 1.

Paso 4: Sean $j^* = \arg máx\left\{\overline{z}_j \middle| j \in J_0\right\}$.

Paso 5: Hacer $z_{j^*} \leftarrow 1, J_1 \leftarrow J_1 \cup \left\{j^*\right\}, J_0 \leftarrow J_0 - \left\{j^*\right\}$.

Paso 6: Si $\sum_{j \in J_1} p_j \geq \sum_k q_k$ ir al paso 7, en caso contrario, volver al paso 4.

Paso 7: Resolver linealmente con los valores y_i fijos.

5. Experimentación computacional

Para poner a prueba el desempeño de las relajaciones lagrangianas propuestas, se generaron los siguientes conjuntos de instancias de acuerdo con los valores (I,J,K): A(3,5,9), B(5,7,30), C(7,10,50), D(10,10,100), E(10,20,200). En todos los casos, los datos fueron generados de la siguiente manera:

$$c_{ij}, d_{jk} \in U[10,20],\ \mathrm{q}_k \in U[1,10],$$
$$b_i \in \left\lceil 10\frac{J+K}{I} \right\rceil + U[0,10],\ p_j \in \left\lceil 10\frac{K}{J} \right\rceil + U[0,10]$$

Se propusieron dos maneras distintas de generar los costos fijos del problema. Para las primeras instancias de cada clase, los costos fijos fueron generados independientemente del número de clientes, plantas y almacenes, como sigue:

$$f_i, g_j \in U[100,200]$$

Para las siguientes instancias de cada clase los costos fijos f_i para cada planta son proporcionales al número de almacenes y clientes, y los costos fijos g_j de los almacenes son proporcionales al número de clientes:

$$f_i \in \left\lceil 100\frac{T+J}{I} \right\rceil + U[0,100]; p_j \in \left\lceil 100\frac{T}{J} \right\rceil + U[0,100]$$

Se trabajó con 2 conjuntos de instancias, una para cada forma de generar los costos fijos. Se obtuvieron 10 instancias para cada caso, con un total de 100 instancias del problema de localización capacitado en dos etapas. Todos los casos fueron resueltos con CPLEX 10.0.

6. Resultados

Para todas las instancias calculamos los siguientes valores:

z_{ip} - Valor objetivo óptimo del problema original.

z_{lag} - Valor de la cota lagrangiana del problema.

z_f - Valor de la solución factible.

Las cotas lagrangianas del problema se calcularon por médio del método de Benders para poder obtener el valor exacto de cada cota y realizar uma mejor comparación. La calidad de la cota lagrangiana con respecto al valor óptimo del problema original se calcula:

$$\varepsilon_1 = \frac{z_{ip} - z_{lag}}{z_{ip}} * 100\%$$

La calidad de la solución factible con respecto al valor óptimo del problema original se calcula:

$$\varepsilon_2 = \frac{z_{ip} - z_f}{z_{ip}} * 100\%$$

La diferencia entre la cota lagrangiana y la solución factible se calcula como sigue:

$$\varepsilon_3 = \frac{z_f - z_{lag}}{z_f} * 100\%$$

Los resultados se presentan en las siguientes tablas. En la primera tabla se presentan los resultados para el primer conjunto de instancias, donde los costos fijos de las plantas y alamacenes son independientes del número de clientes que se tienen. En la primera columna aparece el tamaño de instancia, en las columnas 2,3 y 4 se presenta el porcentaje de veces que las relajaciones RB1, RB2 y RB3, respectivamente, aparecieron entre las mejores cotas lagrangianas del problema. En las últimas 3 columnas vemos el porcentaje de veces que estas 3 reelajaciones aparecen como la mejor cota obtenida. Se eligieron estas 3 relajaciones (RB1, RB2 y RB3) debido a que son las que aparecen entre las mejores un mayor número de veces.

Tamaño	**RB1**	**RB2**	**RB3**	**RB1**	**RB2**	**RB3**
A	70%	80%	40%	10%	0%	20%
B	70%	80%	70%	10%	20%	60%
C	90%	80%	50%	20%	40%	30%
D	70%	80%	10%	40%	10%	0%
E	10%	90%	20%	0%	80%	10%

Tabla 1. Cotas lagrangianas

En la segunda tabla observamos los porcentajes para las relajaciones lagrangianas que proporcionaron las mejores soluciones factibles del problema. En la primera columna se tiene el tamaño de las instancias, en las columnas 2, 3 y 4 tenemos el porcentaje en que las relajaciones RA2, RA3 y RB4, respectivamente, proporcionan las mejores cotas factibles y en las columnas 4, 5 y 6 podemos observar el porcentaje en que cada una de ellas aparece como la mejor solución factible (podemos observar que, sobre todo para casos pequeños, varias relajaciones obtienen el mismo resultado, por lo tanto, más de una aparece en primer lugar).

Tamaño	**RA2**	**RA3**	**RB4**	**RA2**	**RA3**	**RB4**
A	70%	90%	90%	70%	90%	80%
B	20%	90%	80%	10%	80%	50%
C	20%	80%	90%	10%	60%	40%
D	20%	90%	90%	20%	40%	50%
E	90%	40%	20%	50%	10%	10%

Tabla 2. Soluciones factibles

A continuación se presentan las tablas correspondientes al segundo conjunto de casos generados donde los costos fijos no son independientes del número de clientes. La descripción es igual a las dos tablas anteriores.

Tamaño	RB1	RB2	RB3	RB1	RB2	RB3
A	80%	90%	100%	0%	10%	90%
B	100%	100%	100%	10%	10%	80%
C	100%	100%	100%	20%	20%	60%
D	100%	100%	100%	40%	20%	40%

Tabla 3. Cotas lagrangianas

Tamaño	RA2	RA3	RB4	RA2	RA3	RB4
A	90%	90%	60%	90%	90%	60%
B	90%	50%	50%	60%	40%	20%
C	80%	70%	70%	40%	30%	40%
D	90%	40%	90%	70%	10%	40%

Tabla 4. Soluciones factibles

Enseguida se muestra una tabla que contienen algunos de los resultados para el primer conjunto de instancias generadas. En la primera columna aparece el nombre de la instancia, en la segunda columna aparece cuál de las 10 distintas relajaciones dió un mejor resultado, en la tercera columna vemos, en porcentaje, la calidad de la mejor cota lagrangiana en la cuarta columna vemos la calidad, en porcentaje, de la mejor solución factible con respecto al valor óptimo del problema original, en la última columna se prsenta la diferencia también en porcentaje, entre la mejor cota lagrangiana y la mejor solución factible del problema.

Casos	Mejor Cota	ε_1 (%)	ε_2 (%)	ε_3 (%)
A1	RA2	0.78	0	0.78
A2	RA2	0.6	0	0.6
A3	RB2	4.09	0	4.09
B1	RB3	3.25	0	3.25
B2	RB3	1.93	0	1.93
B3	RB3	2.75	0.68	3.43
C1	RB3	2.81	0	2.81
C2	RB2	1.5	0	1.5
C3	RB2	1.65	0	1.65
D1	RA1	0.64	0.52	1.16
D2	RA1	0.6	0	0.6
D3	RA3	0.91	0	0.91

Tabla 5. Resultados para el primer conjunto de instancias generadas

La siguiente tabla muestra los mismos resultados que la anterior pero para el segundo conjunto de instancias generadas.

Casos	Mejor Cota	ε_1 (%)	ε_2 (%)	ε_3 (%)
A1	B3	7.86	0	7.86
A2	B3	1.92	0	1.92
A3	B2	2.06	0	2.06
B1	B3	4.19	0	4.19
B2	B3	2.91	0	2.91
B3	B1	2.94	0	2.94
C1	B1	1.27	0	1.27
C2	B2	4.74	0.06	4.8
C3	B3	1.42	0	1.42
D1	B3	2.02	0.17	2.19
D2	B3	1.69	0.32	2.01
D3	B3	2.72	0	2.72

Tabla 6. Resultados para el segundo conjunto de instancias generadas

7. Conclusiones

Pudimos observar que el gap relativo entre la mejor cota lagrangiana y la solución óptima del problema original es, en promedio menor a un 2% para el primer conjunto de instancias generadas y menos a un 3% en promedio para el segundo grupo de instancias generadas. Las mejores soluciones factibles obtenidas presentaron un gap relativo con respecto al valor óptimo del problema original en promedio menor a un 2% en ambos casos.

En base a los resultados que obtuvimos, podemos ver que existe una relajación que es fácil de calcular (RB4) pero que al final resulta en una muy mala cota lagrangiana, por lo que normalmente se ignoraría. Sin embargo, la solución factible que aporta está entre las mejores y su calidad no es muy diferente a la de la mejor encontrada.

También pudimos observar que la cota dada por la relajación RB1, que es mas sencilla de calcular que la RB3 (que es la que aporta la mejor cota lagrangiana) está entre las mejores y la calidad de esta cota no es muy diferente a la de la mejor encontrada.

Como trabajo futuro se pretende construir un método que utilice las relajaciones que recomendamos (RB1 y RB4) para ir calculando tanto la cota lagrangiana como la primal en cada iteración. Así como realizar comparaciones con las instancias de los trabajos existentes en la literatura.

Referencias

Barros A. y Labeé M. (1994)**.** A general model for the uncapacitated facility and depot location problem, *Location science 2*. 173-191.

Beasley J.,(1994) On the coordination of product and by-product flows in two-level distribution networks: Model formulation and solution procedure, *European Journal of Operation Research*, 325-339.

Gao L. y Robinson E.P. (1994)**.** Uncapacitated facility location: General solution procedure and computacional experience, *European Journal of Operation Research*, 3410-427.

Guignard M. (2003), Lagrangian Relaxation, *Top*, 151-228.

Litvinchev I., Mata, M y Ozuna E. (2009), Estudio de cotas lagrangianas para el problema de localización capacitado, en Memorias del VII Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, México.

Marín A. y Pelegrín B. (1999) Applying lagrangian relaxation to the solution of two-stage location problems, *Annals of Operation Research*, 179-1.

Wolsey L.A. (1999)**,** Integer programming, John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, NY.

Martin R. (1999), Large scale linear and integer optimization: A united approach, Kluwer Academic Publishers, Boston.