Um modelo com variáveis indexadas no tempo para a integração do dimensionamento de lotes e sequenciamento em uma máquina com tempos de preparação

R. S. Henriques[1] **, C. R. V. Carvalho**[1] **, A. S. Cunha**[1]

[1]Universidade Federal de Minas Gerais

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma nova formulação de Programação Inteira para o Problema Integrado de dimensionamento de lotes e sequenciamento de produção em uma máquina, com tempos de preparação dependentes da sequência. O modelo proposto, por empregar variáveis indexadas no tempo, é capaz de fornecer limites de Relaxação Linear muito mais fortes que os modelos disjuntivos da literatura. Em particular, para todos os casos testados aqui, o valor da relaxação linear coincide com o valor ótimo. Os tempos de computação envolvidos, entretanto, são muito elevados devido ao elevando número de restrições e variáveis envolvidas. Pretendemos investigar o uso de técnicas de decomposição para acelerar a resolução da Relaxação Linear do modelo proposto.

PALAVRAS CHAVE: programação inteira (PI), indexação no tempo, problema integrado.

ABSTRACT

In this paper, we introduce a new Integer Programming formulation for the Integrated Lot sizing and One Machine Scheduling Problem with sequence dependent setup times. The model presented here uses time indexed variables and, thus, is capable of providing Linear Programming (LP) bounds much sharper than those given by disjunctive models from the literature. For all test instances considered in this study, the LP bounds matched optimal solution values. However, due to the large number of constraints and variables, a Branch-and-bound algorithm based on the proposed model requires too much computing times to solve the problem. In order to go around that, we plan to investigate the use of decomposition techniques to speed up the resolution of the LP relaxation of the proposed model.

KEYWORDS: integer programming (IP), time indexing, integrated problem.

1. Introdução

Este artigo modela um problema de integração de dimensionamento de lotes e sequenciamento de produção em uma máquina com tempos de preparação, que é alternativo aos modelos disjuntivos da literatura. Para um problema de dimensionamento de lotes acoplado com o sequenciamento de produção em uma máquina, foi formulado um modelo matemático baseando-se na indexação do tempo. Nele, considera-se um horizonte de planejamento dividido em períodos, sendo que, o primeiro desses é discretizado em subperíodos para a realização do sequenciamento de produção. Consequentemente, as variáveis de decisão são indexadas em cada um dos subperíodos empregados, visando indicar o início e término de produção. Além disso, são abordadas considerações como taxa de produção, estoque mínimo e data de ruptura. Isso decorre da origem do problema: o caso real de uma empresa que atua no mercado de produtos químicos de limpeza.

Este trabalho está organizado numa primeira seção, na qual o problema geral é apresentado, seguida por uma breve revisão da literatura sobre problemas afins. Logo após, o modelo proposto é então apresentado. As duas seções posteriores mostram um gerador de instâncias do problema e os resultados computacionais obtidos ao testar os modelos, tanto o da literatura e como o proposto. Por fim, as conclusões e perspectivas futuras são apresentadas.

2. Definição do Problema

O problema integrado de dimensionamento de lotes e sequenciamento aqui proposto foi definido a partir das dificuldades surgidas no planejamento de produção de uma empresa que fabrica produtos químicos para o mercado a varejo. Este problema foi definido por Carvalho e Santos (2006) e melhor detalhado por Santos (2006). O problema consiste em definir o tamanho de lotes de produção e o sequenciamento dos mesmos em uma linha de engarrafamento de produtos de limpeza. A não existência de estoques intermediários ao longo da linha permite sua modelagem como sendo um problema de uma única máquina onde, em um extremo da linha, entra o produto já preparado quimicamente à granel e, na outra extremidade, sai o produto engarrafado, embalado e pronto para ser entregue ao cliente. Esta linha fabrica um único tipo de produto onde um item se diferencia de outro pela sua cor. Dentre as cores fabricadas existem algumas mais contaminantes e outras menos. Existe até mesmo restrição à fabricação de uma determinada cor logo em seguida de outra. Mudar de uma cor para outra implica na paralização da linha para a limpeza completa das máquinas que compõem a mesma, surgindo assim uma matriz de tempo de preparação da linha com um valor específico para cada par de cor de produto, o que acabou de ser produzido e o que iniciará sua produção. O número de cores do produto fabricado é relativamente pequeno, quando estudada, a empresa produzia 5 cores diferentes do produto.

A maior parte da produção da fábrica é destinada ao mercado local, onde a empresa entrega seus produtos diretamente às prateleiras de grandes supermercados. Essa entrega é feita em pequenos lotes, por veículos de pequena capacidade de transporte e com uma grande frequência de carregamento. Já que os caminhões têm que circular dentro de regiões metropolitanas durante o dia, é necessário que esses sejam de pequeno porte.

Um determinado perfil da demanda se repete a cada mês, motivada principalmente por questões fiscais. Geralmente a demanda é pequena no início do mês, bem menor que a

capacidade de produção, e maior no fim do mês, bem maior que a capacidade de produção. Para satisfazer a demanda mensal de seus produtos, a empresa necessita de produzir uma quantidade de produtos maior que a demanda no início do mês, estocar esses produtos e recupera-los para satisfazer a demanda do fim do mês. Dado esse perfil de demanda, geralmente a empresa necessita planejar sua produção de maneira que mantenha sempre um estoque mínimo de cada cor do produto. Isso é feito com o objetivo de sempre poder carregar um determinado caminhão quando ele chega para atender um grupo de clientes cujos estoques estão em nível baixo. Não é possível definir com devida antecedência a hora exata que determinado cliente necessita de produtos. A não reposição imediata do estoque de um cliente implica no prejuizo da não venda de produtos, bem como na perda de mercado para seus concorrentes.

A metodologia usualmente adotada na literatura para o planejamento da produção consiste em modelar o problema de dimensionamento de lotes de produção separadamente do problema de sequenciamento da produção. O problema do dimensionamento de lotes é determinar as quantidades a produzir e estocar em cada período de um horizonte de planejamento. O objetivo aqui geralmente é econômico, buscando minimizar custos de produção e estoque. Uma vez definida a quantidade a ser produzida no primeiro período do horizonte de planejamento, define-se então o problema de sequenciamento da produção . Tal problema consiste basicamente em determinar as sequências de operações que cada máquina deve realizar com suas respectivas horas de início, respeitando o tempo de preparação de máquina necessário a troca de operações. A maior limitação desta metodologia é garantir a viabilidade do plano de produção, obtido pelo dimensionamento de lotes, no sequenciamento da produção, uma vez que a capacidade do sistema de produção não é suficientemente tratada no primeiro poblema. Esta fragilidade da metodologia é minimizada quando os sistemas de produção são suficientemente complexos. Sendo assim, existem um número elevado de máquinas para produzir um número muito grande de produtos e, suas demandas são definidas no horizonte de planejamento com devida antecedência. Neste contexto o problema de dimensionamento de lotes é um problema agregado, em que os produtos são reunidos em famílias e a capacidade de produção é estimada pelos dados acumulados de planejamentos passados.

No caso específico da empresa estudada, a incerteza da demanda cresce muito com o horizonte de tempo e a dimensão do problema de sequenciamento de produção é relativamente pequena (somente 5 produtos). Este dois aspectos motivaram o estudo do problema integrado de dimensionamento de lotes e sequenciamento de produção.

3. Revisão da literatura

O problema de dimesionamento de lotes de produção inicialmente proposto por Harris (1913), reformulado dinamicamente por Wagner e Whitin (1957) e Wagner (1958) e considerado capacitado por Manne (1958) é a referência na literatura. Dada a complexidade dos sistemas produtivos atuais e as ferramentas computacionais cada vez mais eficazes, muito se tem estudado sobre esse problema. Uma revisão atual da literatura para as variações deste problema e suas modelagem em programação matemática são apresentadas por Pochet e Wolsey (2006). Por outro lado, o problema de sequenciamento de produção foi modelado por programação matemática inicialmente por Wagner (1959), onde as variáveis binárias de decisão são variáveis de alocação e cada operação é alocada e uma posição da máquina que a executa. Manne (1960) apresenta um modelo em que as variáveis

binárias de decisão estão associadas ao sequenciamento das máquinas gerando restrições disjuntivas. Inspirados em proplemas reais, outros problemas e modelos sugiram na literatura. Baker (1974) apresenta desenvolvimentos na teoria de sequenciamento e Błazewicz *at al.* (1996) mostra uma atualização da literatura sobre problemas de sequenciamento.

Estudos de modelos que integram o problema de dimensionamento de lotes com o sequenciamento de produção tem motivado pesquisadores principalmente com o avanço de tecnologias computacionais. Vários trabalhos entre modelagem e métodos de resolução tem sido propostos na literatura como, por exemplo, Fleishmann (1994) que apresenta uma reformulação do DLSP (*Discrete Lot Sizing and Scheduling Problem*) como um Problema do Caxeiro Viajante com janelas de tempo e propõe um método aproximado para resolvê-lo; e Drexl e Haase (1995) que formula o PLSP (*Proportional Lot Sizing and Scheduling Problem*) e propõe um método baseado em programação dinâmica para resolvê-lo. Numa perspectiva acadêmica, destaca-se aqui a modelagem do problema integrado proposto por Lasserre (1992) no qual um problema do tipo *jobshop* modelado por restrições disjuntivas é integrado ao problema de dimensionamento de lotes de produção. Neste modelo o autor introduz variáveis de ruptura de estoque em cada período do problema de Dimensinamento de Lotes para garantir sempre uma solução viável. Observa-se que o autor propõe a integração destes dois problemas com o sequenciamento de produção em todo o horizonte de planejamento. Dada a dificuldade de resolução do modelo proposto, o autor introduz um metodologia de resolução aproximada em que cada problema, o do Dimensionamento do Lote e o de sequenciamento de produção, são resolvidos separadamente. O modelo proposto não considera tempos de preparação de máquina e a metodologia proposta não converge para uma solução ótima do problema integrado. Carvalho (1998) mostra que o Algoritmo de Benders pode resolver o problema, além de propor políticas mais consistentes para a integração destes problemas. Utilizando das proposições e da metodologia original de Lasserre (1992), outros autores modelam outros problemas relacionados (1998; 1999). Mais rescentemente e utilizando de outra concepção de modelos, Toso, Morabito e Clark (2009) define um problema de integração de dimensionamento de lotes e sequenciamento para o planejamento de uma empresa produtora de ração animal. Este problema foi modelado por uma combinação e adaptação dos modelos de Meyr (2000) e Hax e Candea (1984). Neste modelo, os autores consideram, como no modelo de Lasserre (1992), o sequenciamento de produção em todo o horizonte de planejamento. Entretanto, o modelo estudado não utiliza restrições disjuntivas no sequenciamento, e sim uma discretização em subperíodos de todos os períodos do horizonte de planejamento. O número de subperíodos de cada período é fixado, a priori, e o valor do intervalo de tempo que corresponde à um subperíodo é definido por uma varável de decisão do modelo. Algumas dificuldades, como por exemplo o problema da triangulação na modelagem do tempo de preparação de máquinas e eliminação de subrotas, são analizados pelos autores. Enfim, os autores resolvem o problema utilizando o *software* GAMS/CPLEX.

Não raro, modelos de Programação Matemática para problemas de sequenciamento garantem que duas atividades não serão executadas simultaneamente pela mesma máquina durante um mesmo instante tempo através da introdução de restrições disjutivas. Esta foi a alternativa empregada, por exemplo, em Carvalho e Santos (2006) e Santos (2006), para modelar a parte de sequenciamento do problema aqui em estudo.

Modelos indexados no tempo Sousa e Wolsey (1992) são uma alternativa aos modelos disjuntivos. Nos modelos indexados no tempo, o horizonte de tempo é dividido em

subperíodos e, consequentemente, as variáveis de decisão são também indexadas em cada um dos subperíodos empregados. Ao assim proceder, torna-se mais fácil escrever restrições lineares que garantem que apenas uma atividade poderá ser executada em cada subperíodo por uma mesma máquina (em substituição às restrições disjuntivas). Se por um lado os modelos indexados no tempo empregam normalmente um número muito maior de restrições e variáveis de decisão que os modelos disjuntivos, as suas relaxações lineares fornecem limitantes duais muito mais fortes que os associados aos modelos disjuntivos. Talvez por este motivo, tem havido crescente interesse no emprego de técnicas de decomposição (por exemplo, Decomposição de Dantzig-Wolfe) para tratar esta aparente dificuldade associada aos modelos indexados no tempo (veja van Den Akker et al. (2000), por exemplo).

Neste trabalho, apresentamos uma formulação indexada no tempo para o Problema de Determinação de Lotes Econômicos e sequenciamento de uma máquina. Como ficará evidente, o modelo proposto fornece limites de relaxação linear mais fortes que aqueles proporcionados pelos modelos introduzidos em Carvalho e Santos (2006) e Santos (2006). Faz parte de nossos planos de pesquisa investigar como aplicar técnicas de decomposição para mitigar o efeito adverso (nos tempos de computação) decorrentes do elevado número de variáveis e restrições no modelo aqui apresentado. Este assunto, entretanto, será tratado em uma fase posterior a esta pesquisa.

4. Formulação matemática

O problema proposto por Carvalho e Santos (2006) para a integração do dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção considera um horizonte de tempo de planejamento de um mês discretizado em quatro períodos, que correspondem a cada semana do mês. São considerados as previsões das demandas no fim de cada semana e o estoque inicial de cada produto. O dimensionamento de lotes de produção é feito então por produto e por semana. Nesse sentido, determina-se o quanto produzir e estocar de cada produto em cada semana do planejamento. Para o primeiro período é considerada uma taxa de demanda de cada produto, assim, conhecendo o estoque inicial, sabe-se a data exata da ruptura de estoque de cada produto. O sequenciamento da produção é feito somente para o primeiro período. O número máximo de vezes que se pode produzir cada produto na primeira semana é pré fixada pelo modelo. Os autores estudam a possibilidade de produzir uma, duas ou três vezes um mesmo produto na primeira semana. Baseado em dados reais, os autores mostram que o modelo com somente uma possibilidade de produção é insuficiente para atender o planejamento. Este é o caso, por exemplo, de situações em que o estoque inicial de produtos é reduzido. Por outro lado, em grande parte dos problemas testados, a solução ótima propunha produzir, no máximo, duas vezes o mesmo produto, mesmo o modelo permitindo produzí-lo até três vezes.Esse fato já era esperado, pois, produzir mais que duas vezes implicaria em grande perda na capacidade de produção por exigir muitas paradas para a preparação da linha de produção.

As restrições de sequenciamento de produção são formalizadas no modelo pelos autores através de restrições disjuntivas. Para a situação real modelada, o modelo proposto obteve soluções satisfatórias quando resolvido pelo CPLEX. Entretanto algumas dificuldades foram ainda destacadas pelos autores, entre elas está a qualidade da solução do problema relaxado.

Como uma alternativa a essa modelagem anteriormente descrita, foi formulado um

modelo integrado com indexação no tempo, proposto aqui:

Dados do problema:

- I: conjunto de produtos a serem produzidos ($i \in I$ denota um produto);
- H: conjunto de períodos do horizonte de planejamento ($h \in H$ denta um período);
- B: conjunto de subperíodos do primeiro período ($h = 1$) do horizonte de planejamento ($b \in B$ denota uma destes subperíodos);
- D_i^h: demanda do produto i no período h;
- e_i^0: estoque inicial do produto i;
- Q^h: tempo total disponível da máquina para fabricação de produtos no período h;
- f_i: nível mínimo de estoque do produto i;
- P_i: tempo unitário de processamento do produto i;
- s_{ij}: tempo de preparação da máquina para produzir o produto j logo após a produção de i;
- v_i: taxa de produção do produto i, expressa pela quantidade que a máquina produz do produto i em um subperíodo b;
- r_i: taxa de demanda do produto i no primeiro período do planejamento, dada pela quantidade de produto entregue por unidade de subperíodo;
- T_i: data de ruptura de estoque do item i no primeiro período do horizonte de planejamento, calculado por $T_i = e_i^0/r_i$;
- c_i: custo de manutenção do estoque do produto i.

Variáveis de decisão:

- x_i^h: quantidade a ser produzida do produto i no período h;
- e_i^h: estoque do produto i ao final do período h;
- $z_i^b \in \{0, 1\}$: define se a máquina inicia a fabricação do produto i no início do subperíodo b ($z_i^b = 1$) ou não ($z_i^b = 0$);
- $w_i^b \in \{0, 1\}$: define se a máquina conclui a fabricação do produto i no final do subperíodo b ($w_i^b = 1$) ou não ($w_i^b = 0$).

A solução do primeiro período de um problema onde três produtos foram sequênciados é representado pelo diagrama de barras mostrado na Figura 1.

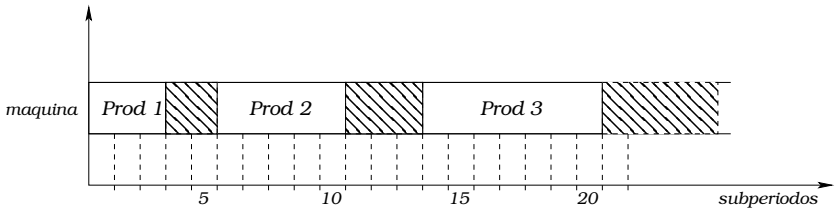

Figura 1. Uma solução do primeiro período

Na solução apresentada na Figura 1, tem-se os valores das variáveis: $z_1^1 = 1$, $w_1^3 = 1$, $z_2^6 = 1$, $w_2^{10} = 1$ e $z_3^{14} = 1$, $w_3^{20} = 1$.

Modelo proposto:

minimizar

$$Z = \sum_{i \in I} \sum_{h \in H} c_i e_i^h \tag{1}$$

sujeito a

$$e_i^{h-1} + x_i^h = D_i^h + e_i^h \qquad \forall\, i \in I, h \in H \tag{2}$$

$$e_i^h \geq f_i \qquad \forall\, i \in I, h \in H \tag{3}$$

$$\sum_{i \in I} P_i x_i^h \leq Q^h \qquad \forall\, h \in H \tag{4}$$

$$x_i^1 = v_i \left(\sum_{b \in B} b w_i^b - \sum_{b \in B} b z_i^b + \sum_{b \in B} z_i^b \right) \qquad \forall\, i \in I \tag{5}$$

$$\sum_{b \in B} w_i^b = \sum_{b \in B} z_i^b \qquad \forall i \in I \tag{6}$$

$$w_i^{b_1} + \sum_{b=b_1}^{b_2 - s_{ij}} z_j^b = 1 \qquad \forall\, i \neq j, b_1, b_2 \in B, b_2 > b_1 + s_{ij} \tag{7}$$

$$\sum_{b=b_1}^{b_2-1} w_i^b \geq z_i^{b_1} + z_j^{b_2} - 1 \qquad \forall\, i, j \in I, \forall b_1, b_2 \in B, b_2 > b_1 + 1 \tag{8}$$

$$\sum_{b=b_1}^{b_2-1} z_i^b \geq w_j^{b_1} + w_i^{b_2} - 1 \qquad \forall\, i, j \in I, \forall\, b_1, b_2 \in B, b_2 > b_1 + 1 \tag{9}$$

$$\sum_{i \in I} (z_i^b) \leq 1 \qquad \forall\, b \in B \tag{10}$$

$$\sum_{i \in I} (w_i^b) \leq 1 \qquad \forall\, b \in B \tag{11}$$

$$\sum_{b \leq T_i} z_i^b = 1 \qquad \forall\, i \in I \tag{12}$$

$$x_i^h \geq 0,\ e_i^h \geq 0,\ \ z_i^b \in \{0,1\} \text{ e } w_i^b \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I, h \in H \text{ e } b \in B \tag{13}$$

A função objetivo (1) minimiza o custo total de estoque durante todo o horizonte de planejamento. As restrições de (2) a (4) são de dimensionamento de lotes de produção. As restrições (2) asseguram a satisfação da demanda de cada produto i em cada período do horizonte; as restrições (3) garantem o estoque mínimo de cada produto no fim de cada período e, as restrições (4) limitam o tempo total utilizado na produção ao tempo disponível em cada período. As restrições de (5) a (13) são relacionadas ao sequenciamento de Produtos no primeiro período do horizonte de planejamento. As restrições (5) calculam a quantidade produzida de cada produto em função das variáveis binárias de início e fim de fabricação: a quantidade produzida x_i^1 é igual ao produto da taxa de produção v_i da máquina pelo número de subperíodos utilizados para a produção do produto i. Note que o índice b multiplica suas respectivas variáveis binárias nos dois primeiros somatórios, isso garante que sejam contabilizados somente os subperíodos em que ocorre a produção do produto i. Já o terceiro somatório contabiliza cada subperíodo de produção de i perdido na subtração dos dois primeiros somatório. Por exemplo, para o *Prod 1* da solução mostrada na Figura 1, considerando somente as variáveis não nulas, a quantidade de subperíodos utilizados para a produção é obtido: $3 \times w_1^3 - 1 \times z_1^1 + z_1^1 = 3$. As restrições (6) asseguram

que, para cada produto, o número de vezes que se inicia sua produção deve ser iqual ao número de vezes que se finaliza. As restrições (7) garantem que, se houve término de produção do produto i, só haverá início de produção do produto j após passado o tempo de preparação de máquina de i para j. As restrições (8) e (9) asseguram que entre dois inícios de produção existe sempre um término e entre dois términos existe sempre um início, respectivamente. As restrições (10) e (11) garatem que em qualquer subperíodo existirá no máximo um início e no máximo um término de produção, respectivamente. As restrições (12) asseguram que não ocorre ruptura do estoque do produto i, pois até a data de ruptura T_i haverá um início de produção de i. O domínio das variáves estão representados nas restrições (13).

5. Acréscimos ao modelo

Visando dar maior flexibilidade e fazer com que o modelo seja uma ferramenta de apoio a decisão, propõe-se aqui a introdução de variáveis de ruptura de estoque. Essa variável no modelo, penalizada na funão objetivo, permite não atender a demanda de um determinado período, quando nele não houver capacidade de produção suficiente. Entretanto, a demanda não atendida de um período será atendia no período seguinte, se capacidade deste período não comportar tal produção, ou ainda poderá ser atendida nos outros períodos subsequentes. Se a capacidade de produção de todo o horizonte de planejamento não for suficiente para ateder toda a demanda do horizonte, o modelo apresenta como resposta uma ruptura do estoque no último período do horizonte. Caso não haja ruptura de estoque inicial no primeiro período, o problema com essa nova variável garante sempre viábilidade do problema.

Para a introdução da possibilidade de ruptura de estoque em uma solução, introduz-se ao modelo:

- cn_i: parâmetro dado para que define o custo de estoque negativo do produto i;
- en_i^h: variável não negativa para calcuar a quantidade da demanda do produto i no período h que não foi atendida.

O problema é então reeescrito:

$$\text{minimizar} \quad Z = \sum_{i \in I} \sum_{h \in H} c_i e_i^h + cn_i en_{ih} \tag{14}$$

$$e_i^{h-1} - en_i^{h-1} + x_i^h = D_i^h + e_i^h - en_i^h \qquad \forall i \in I, h \in H \tag{15}$$

$$e_i^h \geq f_i - en_i^h \qquad \forall i \in I, h \in H \tag{16}$$

$$\text{Restrições (4) a (13)}$$

$$en_i^h \geq 0 \qquad \forall i \in I, h \in H \tag{17}$$

6. Gerador de instâncias

Com o objetivo de testar os modelos segundo alguns aspectos específicos, propõe-se aqui um gerador que produz dois tipos de instâncias: o primeiro tipo contém dados somente para o problema sem a ruptura de estoque, já o segundo, além dos dados do primeiro, possui também os parâmetros cn_i para o modelo com ruptura de estoque. A construção deste gerador foi motivado principalmente pela necessidade de testar o modelo

sem ruptura de estoque. Assim, se a instância gerada não for viável para o problema sem ruptura de estoque, ela será testada no problema com ruptura. Desse modo, é garantida sempre uma solução viável para o problema testado. Para os dois problemas, sem e com ruptura de estoque, utiliza-se como entrada o número de períodos, de subperíodos e de produtos. Esses dados são lidos e, então, são gerados os demais parâmetros. Este cálculo é feito em função dos dados fornecidos e também de vetores gerados aleatoriamente segundo uma distribuição uniforme. Limites inferiores e superiores são fornecidos para a geração dos vetores aleatórios.

A seguir, há uma breve explicação da idéia utilizada para gerar os parâmetros:

- c_i: o custo de estoque é gerado a partir de um limite inferior de 100 e um superior de 1000 utilizando o gerador de números aleatórios;
- cn_i: o custo de estoque negativo é gerado somente para a segunda intância utilizando o inverso de c_i multiplicado por 1000000 (valor que deixa qualquer cn_i maior que qualquer c_i). Essa decisão considera que o produto com maior c_i deverá ter mais facilidade de não ser produzido (menor cn_i), caso não haja capacidade suficiente num determinado período;
- e_i^0 e f_i: o estoque inicial e o estoque mínimo são gerados a partir de um limite inferior de 1 e um superior de 7 utilizando o gerador de números aleatórios;
- v_i: a taxa de produção é gerado a partir de um limite inferior de 0.01 e um superior de 3.0 utilizando o gerador de números aleatórios;
- P_i: o tempo unitário de produção é gerado a partir o inverso de v_i;
- s_{ij}: os tempos de preparação da linha são gerados a partir de várias chamadas do gerador de números aleatórios, começando com o limite inferior de 1 e superior de 10. Ao decorrer das iterações, o primeiro tem seu valor acrescido e o segundo decrescido, para aumentar a aleatoriedade dos números obtidos, tendo em visto que o gerador trabalha com limites inferior e superior para obtê-los;
- D_i^h: a demanda é obtida através da multiplicação de v_i por um número inteiro aleatório que vai de 1 até o número de subperíodos dividido pelo número de produtos;
- T_i: é calculada considerando que a demanda gerada D_i^1 é constante durante todo o primeiro período. Assim calcula-se a data de ruptura por: $T_i = e_i^0 \times |B|/D_i^1$;
- Q^1: a capacidade dos períodos é considerada igual a quantidade de subperíodos;
- Q^h para $h = 2, \ldots, H$: é iqual a Q^1 menos um valor médio histórico de tempo total de preparação em um período.

7. Testes e Resultados

O modelo proposto foi testados para 5 grupos de instâncias. Em todos os casos, o horizonte de planejamento considerado foi de um mês, divididos em períodos de uma semana. O primeiro destes é subdividido em um número de subperíodos que varia para cada um dos 5 grupos considerados. O número de subperíodos considerados em cada um dos grupos foi de 24, 36, 48, 64 e 72 (todos divisores de 144, que equivale ao número de horas produtivas em uma semana: 6 dias de 24 horas). Assim sendo, instâncias em um mesmo grupo possuem o mesmo número de subdivisões, diferenciando-se pelo número de produtos a serem produzidos em cada uma. Nas três primeiras colunas da Tabela 1, apresentamos a identificação de cada instância em cada grupo, seguido do número de subperíodos empregados e do número de produtos.

Na situação considerada nestes testes, o perfil de demanda para os períodos 2,3 e 4 obriga que no primeiro período seja produzido para estoque. Apesar disto, as demandas foram escolhidas para não haver quebra de estoques. Assim sendo, na Tabela 1, comparamos os resultados computacionais obtidos pelo Modelos 1 (que não permite quebra de estoque) com o modelo da literatura em Carvalho e Santos (2006). As demais colunas da Tabela 1 respectivamente indicam: o tempo (em segundos) necessário para se resolver a relaxacão linear do modelo em questão, o tempo necessário para se resolver o problema à otimalidade e o gap de dualidade da relaxação linear do modelo. Todos os resultados aqui apresentados foram obtidos através do pacote comercial CPLEX, rodando em uma máquina Intel Xeon Core 2 Quad 2.00GHz, 8Gb de memória RAM e sistema operacional Linux. Para cada instância, consideramos um tempo limite de 3 horas (10800s). Quando o algoritmo Branch-and-bound pré implementado pelo CPLEX não resolve uma instância à otimalidade, relatamos nas colunas de tempo e gap de dualidade, com um símbolo "*".

			Modelo da Literatura			Modelo Proposto		
Prob.	Subp.	Prod.	T. Relax.	T. Ótimo	GAP(%)	T. Relax.	T. Ótimo	GAP(%)
01	24	3	0,0	0,1	13	0,0	0,1	0
02	24	4	0,0	1,0	7	0,0	0,3	0
03	24	5	0,0	0,0	2	0,2	14,8	0
04	24	6	0,0	868,8	7	0,4	5,8	0
05	36	3	0,0	0,1	15	0,0	0,6	0
06	36	4	0,0	2,6	25	0,2	2,9	0
07	36	5	0,0	0,1	0,2	0,6	410,0	0
08	36	6	0,0	147,6	20	1,0	437,0	0
09	48	3	0,0	0,0	2	0,0	1,8	0
10	48	4	0,0	3,3	16	0,5	48,4	0
11	48	5	0,0	0,3	2	0,6	541,9	0
12	48	6	0,0	1816,2	5	3,9	*	*
13	64	3	0,0	0,1	85	0,3	5,5	0
14	64	4	0,0	2,0	18	0,2	33,9	0
15	64	5	0,0	81,8	6	2,0	1559,2	0
16	64	6	0,0	2300,0	4	6,1	*	*
17	72	3	0,0	0,1	23	0,0	8,9	0
18	72	4	0,0	2,6	25	2,6	1360,4	0
19	72	5	0,0	0,0	03	9,0	*	*
20	72	6	0,0	102,9	11	15,3	*	*

Tabela 1. *Instâncias justas no primeiro período para os dois modelos*

Os resultados computacionais apresentados na Tabela 1, de certa forma, confirmam nossas expectativas. Conforme pode ser observado, o modelo indexado no tempo (Modelo 1) produz limites de Relaxação Linear muito mais fortes que o modelo disjuntivo introduzido em Carvalho e Santos (2006) . Em todos os casos para os quais a solução ótima pode ser avaliada dentro do tempo máximo estabelecido, o limite de Relaxação Linear coincidiu com o valor ótimo do programa. Em contra partida, o modelo da literatura apresentou gaps de dualidade bastante expressivos. Em alguns casos, estes gaps alcançaram a marca de 85%.

Por outro lado, o tempo necessário para se resolver a Relaxação Linear do modelo proposto é, em geral, bastante superior ao tempo requerido para se obter a Relaxação Linear do modelo disjuntivo. O tempo total necessário para se resolver o problema à otimalidade através de um algoritmo *branch-and-bound* baseado no Modelo Proposto é, de modo geral, também superior ao tempo necessário para se resolver o problema pelo algoritmo baseado no modelo disjuntivo.

8. Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, apresentamos um novo modelo de Programação Matemática para o Problema Integrado de Determinação de Lotes de produção e sequenciamento com tempos

de preparação. O modelo aqui proposto, por empregar indexação no tempo, produz limites de Relaxação Linear muito mais fortes que os da literatura, baseados em restrições disjuntivas. Apesar disto, os tempos de computação necessários para se resolver o problema com o novo modelo não dominam os tempos da literatura. Isto ocorre pelo elevado número de restrições e variáveis envolvidos no modelo introduzido aqui.

Pretendemos investigar o uso de técnicas como Relaxação Lagrangeana e Decomposição de Dantzig-Wolfe para acelerar a resolução da Relaxação Linear do modelo apresentado. Ao assim proceder, esperamos torná-lo mais competitivo e capaz de resolver instâncias de maiores dimensões.

Agradecimentos
Esta pesquisa é financiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais, FAPEMIG, por meio do contrato de número 14016*1.

Referências

K. R. Baker. *Introduction to Sequencing and Scheduling*. Wiley, 1974.

J. Błazewicz, K. H. Ecker, E. Pesch, G. Schmidt, and J. Węglarz. *Scheduling Computer and Manufacturing Processes*. Springer-Verlag Berlin, 1996.

S. Dauzère-Pérès, W. Roux, and J.-B. Lasserre. Multi-resource shop scheduling with resource flecibility. *European Journal of Operational Research*, 107:289–305, 1998.

C. R. V. de Carvalho. *Une Proposition d'Integration de la Planification et l'Ordonancement de Production: Application de la Métode de Benders*. PhD thesis, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, França, 1998.

C. R. V. de Carvalho e A. M. dos Santos. Dimensionamento de lote de produção em um problema de sequenciamento de sequenciamento de uma máquina com tempo de preparação dependente da sequência. In *XXXVIII SBPO*, Goiânia, 2006.

A. M. dos Santos. Dimensionamento de lote de produção em um problema de sequenciamento de sequenciamento de uma máquina com tempo de preparação: uma aplicação a uma indústria química. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Eng. de Produção, UFMG, 2006.

A. Drexl and K. Haase. Proportional lot sizing and scheduling. *International Journal of Production Economics*, 40(1):73–87, 1995.

B. Fleischmann. The discrete lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup-costs. *European Journal of Operational Research*, 75(2), 1994.

F. W. Harris. How many parts to make at once. *Factory, The Magazine of Management*, 2 (10):135–136, 1913. reprinted(1990), Operations Research, Vol.38, pp.947-950.

A. C. Hax and D. Candea. *Production and Inventory Management*. Printice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1984.

J.-B. Lasserre. An integrated model for job-shop planning and scheduling. *Management Science*, 38(8):1201–1211, 1992.

A. S. Manne. Programming of economic lot sizes. *Management Science*, 14:115–135, 1958.

A. S. Manne. On the job-shop scheduling problem. *Operations Research*, 8, 1960.

H. Meyr. Simultaneous lot sizing and scheduling by combining local serch whit dual reoptimization. *European Journal of Operational Research*, 120:311–326, 2000.

Y. Pochet and L. A. Wolsey. *Production Planning by Mixed Interger Programming*. Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, 2006.

W. Roux, S. Dauzère-Pérès, and J-B. Lasserre. Planning and scheduling in a multi-site environment. *Production Planning & Control*, 10(1):19–28, 1999.

J.P. Sousa and L. Wolsey. "A time indexed formulation for non-preemptive single machine scheduling problems". *Mathematical Programming*, 54:353–367, 1992.

E. Toso, R. Morabito, and A. R. Clark. Lot sizing and sequencing optimisation at an animal-feed plant. *Computers & Industrial Engineering*, 57:813–821, 2009.

J.M. van Den Akker, C.A.J. Hurkens, and M.W.P. Savelsberg. " Time indexed formulations for Machine Scheduling Problems: column generation". *INFORMS Journal on Computing*, 12(2):111–124, 2000.

H. W. Wagner. A linear programming solution to dynamic leontief type models. *Management Science*, 3(3):234–254, 1957.

H. W. Wagner and T.M. Whitin. Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, 1(5):88–96, 1958.

H.W. Wagner. An integer linear-programming model for machine scheduling. *Naval Research Logistic Quarterly*, 6(2):131–140, 1959.