MEDIDAS DE IRREGULARIDADE EM GRAFOS

Joelma Ananias de Oliveira
Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT/Rondonópolis
Rodovia Rondonópolis-Guiratinga, KM 06 - Sagrada Família - MT
jo.ananias@gmail.com

Carla Oliveira
Escola Nacional de Ciências e Estatística-ENCE/IBGE
Rua André Cavalcanti, 106 - Centro - RJ
carla.oliveira@ibge.gov.br

Claudia Justel
Instituto Militar de Engenharia - IME
Praça General Tibúrcio, 80 - Praia Vermelha - RJ
cjustel@ime.eb.br

Nair Maria Maia de Abreu
Universidade Federal do Rio de Janeiro- COPPE- ufrj
Rua João Lira, 106/401- Leblon -RJ
nair@pep.ufrj.br

RESUMO

Entende-se por *grafo irregular* aquele cuja sequência de graus é constituída por, pelo menos, um par de elementos distintos. O problema de avaliar o quão irregular é um grafo ainda é muito pouco estudado. No entanto, trata-se de um problema útil, dado que há interesse em, a partir de um grafo qualquer G, determinar supergrafos regulares H, que contenham o grafo dado G como subgrafo, por inserir em G, o menor número de arestas necessário à obtenção do grafo H. Além disso, há propriedades de grafos regulares que podem ser ajustadas a grafos *pouco* irregulares. Para nos ajudar a decidir se um grafo é *pouco* ou muito *irregular*, alguns pesquisadores introduziram invariantes capazes de medir a irregularidade de um grafo. Considerando serem tais invariantes pouco familiares aos pesquisadores da área de grafos e pesquisa operacional, achamos importante reunirmos, em um só documento, os parâmetros encontrados na literatura utilizados para este fim.

E, de fato, há disponível na literatura quatro medidas para a irregularidade de um grafo. Para um dado grafo G, essas medidas são, em geral, determinadas em função da sequência de graus dos vértices do grafo, da média dos graus e do índice do grafo. Este último é um invariante espectral que corresponde ao maior autovalor da matriz de adjacência do grafo. A primeira das medidas foi introduzida, em 1957, por Collatz-Sinogowitz e denotada por $\varepsilon(G)$. É definida como a diferença entre o índice e a média dos graus dos vértices de G. Uma segunda medida, proposta por Bell em 1992, toma a variância dos graus, $\sigma(G)$, para definir o quão irregular G pode ser. Mais recentemente, em 1997, Albertson introduziu o somatório do valor absoluto das diferenças dos graus dos vértices que são extremidades de arestas de G como medida de sua irregularidade e a denotou por $irr(G)$. Finalmente, em 2006, Nikiforov introduziu, para este fim, o invariante $s(G)$, como sendo o somatório do valor absoluto das diferenças entre o grau dos vértices e a média dos graus de G.

Neste trabalho, além de reunirmos as medidas de irregularidades conhecidas e descritas acima, também apresentamos os resultados da literatura que as envolvem, alguns limites para elas que

são dados em função de invariantes conhecidos de grafos e as comparações entre elas já realizadas para decidir quais delas deveriam ser utilizadas.

PALAVRAS_CHAVE. Índice do grafo. Matriz de Adjacência. Irregularidade. Área de Classificação (Teoria e Algoritmos em Grafos).

ABSTRACT

The term *irregular graph* is usually used to characterize a graph whose degree sequence has, at least, a pair of distinct elements. The problem of determine how irregular is a graph, has been less studied than others, but, this is an important problem. Given an arbitrary graph G, is interesting to determine a regular supergraph H of G in such a way that the smallest number of edges are added to G to obtain H. Moreover, there are some properties for regular graphs that can be used in irregular graphs when the graph is "lowly" irregular.
In order to obtain a measure of how irregular a graph is, some invariants have been introduced in the literature. This invariants are less known for the researchers of graph theory and operations research. And this situation justifies to include in a survey the invariants that measure the irregularity of a graph.

Four measures of irregularity exists in the literature. Given a graph G, this measures are defined by using different invariants: degree sequence of the graph, average degree and index. The last one, the index, is a spectral invariant defined as the greatest eigenvalue of the adjacency matrix of the graph. The first measure, $\varepsilon(G)$, that was defined by Collatz-Sinogowitz in 1957, is the difference between the index and the average degree of the graph. The second one, introduced by Bell in 1992, consider the variance of the vertex degrees of the graph, $\sigma(G)$, as a measure of irregularity. Albertson, in 1997, defined the measure $irr(G)$, as sum of all differences, in absolute value, of the degrees of the two extremal vertices of the edges of the graph. Finally in 2006, Nikiforov considered the measure $s(G)$ as the sum, in absolute value, of the difference between the degree of the vertex and the average degree of the graph.

In this work, some results about the four measures are presented, the extremal graphs determined in the literature for every measure are included and some comparisons between the measures are related.

KEYWORDS. Index of graph. Adjacency Matrix. Irregularity. Main Area (Theory and Algoritms in Graphs).