ITERAÇÕES CONTINUADAS APLICADAS AO MÉTODO DE PONTOS INTERIORES PREDITOR CORRETOR

Lilian Ferreira Berti
Depto de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP
13083-859, Campinas, SP
E-mail: lilian@ime.unicamp.br

Aurelio Ribeiro L. Oliveira
Depto de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP
13083-859, Campinas, SP
E-mail: aurelio@ime.unicamp.br

RESUMO

O método preditor corretor entre todas as variações de método de pontos interiores é um dos que mais se destacam devido a sua eficiência e convergência. No entanto, existe neste método uma etapa crítica em relação ao desempenho computacional que é a fatoração de Cholesky em cada iteração necessária para resolver os sistemas lineares. Neste trabalho é apresentada uma modificação do método, aplicação de iterações continuadas, na busca da redução do números total de iterações. Foram realizados alguns testes númericos preliminares, demonstrando a viabilidade da proposta.

PALAVRAS CHAVE: método preditor corretor, programação linear, iterações continuadas.

Programação Matemática

ABSTRACT

The predictor corrector method from all interior point methods variations is one of mostly used due to its efficiency and convergence properties. However, there is a critical step in the method with respect to the computational performance, that is, the Cholesky factorization in each iteration needed to solve the linear systems. This paper presents a modified version of the method, applying continued iterations, aiming to reduce the computacional effort. We perform preliminary numerical tests, demonstrating the viability of the proposed approach.

KEYWORDS: predictor corrector method, linear programming, continued iterations.

Mathematical Programming

1 Introdução

O estudo dos métodos de pontos interiores tem sido uma das mais interessantes área de pesquisa em otimização na última década, devido aos grandes avanços nesta área. Entre as variações de método de pontos interiores para a resolução de problemas de programação linear, o método preditor corretor destaca-se entre todos, devido a sua eficiência e convergência. (Wright, 1997). Este método apresenta uma etapa crítica em seu desempenho computacional, o cálculo da fatoração de Cholesky em cada iteração. Assim apresentaremos brevemente o método preditor corretor e uma forma de evitar a fatoração de Cholesky em cada iteração realizando iterações subsequentes, chamadas iterações continuadas. Nestas iterações são realizadas eliminações sucessivas das componentes de bloqueio da direção preditora corretora, sendo utilizada essa direção caso seja descendente, no sentido de reduzir o *gap* de dualidade.

Problemas de programação linear (PPL) têm como objetivo determinar uma solução que minimiza uma função sujeita a um conjunto de equações e/ou inequações lineares. (Chvátal, 1983). O problema de programação linear na forma padrão é dado por Wright (1997):

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, posto$(A) = m,\ x \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

O problema acima é denominado problema primal, o qual é associado o problema dual na forma padrão:

$$\begin{array}{ll} \max & b^t y \\ \text{s.a} & A^t y + z = c \\ & z \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

onde $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de variáveis duais livres e $z \in \mathbb{R}^n$ representa as variáveis de folga.

As condições de otimalidade de primeira ordem (Karush-Kuhn-Tucker) do problema (1) e (2) são dadas por Wright (1997):

$$\begin{cases} Ax - b = 0 \\ A^t y + z - c = 0 \\ XZe = 0 \\ (x, z) \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

sendo $X = diag(x),\ Z = diag(z)$ e $e \in \mathbb{R}^n$, tal que $e = (1, 1, ..., 1)^t$.

2 O Método Preditor Corretor

Os métodos de pontos interiores do tipo primal-dual consistem em aplicar o método de Newton às condições de otimalidade (3) do PPL, partindo de um ponto interior e mantendo interior a cada iteração. O método preditor corretor desenvolvido por Mehrotra (1992) consiste em utilizar uma direção composta por três componentes: direção afim-escala (direção de

Newton), direção de centragem e direção de correção não-linear. (Monteiro, Adler, e Resende, 1990). Então, aplicando o método de Newton às condições de otimalidades obtém-se:

$$\begin{cases} A\tilde{\Delta}x = r_p \\ A^t\tilde{\Delta}y + \tilde{\Delta}z = r_d \\ Z\tilde{\Delta}x + X\tilde{\Delta}z = r_a \end{cases} \tag{4}$$

onde

$$\begin{bmatrix} r_p \\ r_d \\ r_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - Ax \\ c - A^t y - z \\ -XZe \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Eliminando variáveis podemos resolver o sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}y &= (ADA^t)^{-1}[r_p + AD(rd + X^{-1}r_a)] \\ \tilde{\Delta}x &= D(A^t\tilde{\Delta}y - r_d + X^{-1}r_a) \\ \tilde{\Delta}z &= X^{-1}(r_a - Z\tilde{\Delta}x) \end{aligned} \tag{6}$$

onde $D = XZ^{-1}$, a matriz ADA^t é simétrica e definida positiva, pois A tem posto completo e D é uma matriz diagonal definida positiva.

Como $x = x + \tilde{\alpha}_p\tilde{\Delta}x > 0,\ z = z + \tilde{\alpha}_d\tilde{\Delta}z > 0,\ \tilde{\alpha}_p \in (0,1]$ e $\tilde{\alpha}_d \in (0,1]$. Então:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_p &= \min\{1, \tau \min\{-\tfrac{x_i}{\tilde{\Delta}x_i} | \tilde{\Delta}x_i < 0\} \\ \tilde{\alpha}_d &= \min\{1, \tau \min\{-\tfrac{z_i}{\tilde{\Delta}z_i} | \tilde{\Delta}z_i < 0\} \end{aligned} \tag{7}$$

onde $\tau \in (0,1)$.

No método primal dual afim escala (Monteiro et al. 1990) os produtos $x_i z_i$ podem convergir para zero com velocidades diferentes, assim o método pode falhar ou progredir lentamente. Para evitar isto cria-se um parâmetro (μ) nas condições de otimalidade de forma que $x_i z_i = \mu$ sendo este parâmetro atualizado a cada iteração e tendendo a zero à medida que o método aproxima da solução, este é o método seguidor de caminho. No método preditor corretor determinamos o valor μ de acordo com progresso da direção afim escala, de modo que se ocorrer melhora suficiente, então μ é pequeno, caso contrário μ é uma pertubação maior.

Sejam:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= (x + \tilde{\alpha}_p\tilde{\Delta}x)^t(z + \tilde{\alpha}_d\tilde{\Delta}z), \\ \gamma &= x^t z \end{aligned} \tag{8}$$

representando o *gap* de dualidade. (Wright, 1997). Definimos,

$$\mu = \begin{cases} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{\gamma}{n}\right)\ \gamma < 1; \\ \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma}\right)^p\left(\frac{\gamma}{n}\right),\ \gamma \geq 1. \end{cases} \tag{9}$$

Quando tomamos o tamanho do passo igual a 1, ou seja, $\alpha_p = \alpha_d = 1$, obtemos um ponto primal e dual factível, $r_p = r_d = 0$, e na restrição de complementariedade, $r_a = -\tilde{D_x}\tilde{D_z}e$, sendo $\tilde{D_x} = diag(\tilde{\Delta}x)$ e $\tilde{D_z} = diag(\tilde{\Delta}z)$.

Fazendo a correção não-linear acima e introduzindo a perturbação, temos o sistema,

$$\begin{cases} A\bar{\Delta}x = 0 \\ A^t\bar{\Delta}y + \bar{\Delta}z = 0 \\ Z\bar{\Delta}x + X\bar{\Delta}z = \mu e - \tilde{D_x}\tilde{D_z}e. \end{cases} \tag{10}$$

Desse modo, a direção preditora corretora é dada pela soma das duas direções encontradas, ou seja, $\Delta = \tilde{\Delta} + \bar{\Delta}$. Portanto, Δ é determinada pelo sistema:

$$\begin{cases} A\Delta x = r_p \\ A^t\Delta y + dz = r_d \\ Z\Delta x + X\Delta z = r_s \end{cases} \tag{11}$$

onde

$$r_s = r_a + \mu e - \tilde{D}_x\tilde{D}_z e. \tag{12}$$

Podemos resolver o sistema acima de forma similar a (4).

$$\begin{aligned} \Delta y &= (ADA^t)^{-1}[r_p + AD(rd + X^{-1}r_s)] \\ \Delta x &= D(A^t\Delta y - r_d + X^{-1}r_s) \\ \Delta z &= X^{-1}(r_s - Z\Delta x). \end{aligned} \tag{13}$$

Observe que assim como (6), o passo mais caro consiste em resolver um sistema linear com a mesma matriz ADA^t.

Algoritmo 1 Método Preditor Corretor

Dados (x^0, y^0, z^0) com $x^0, z^0 > 0$ e $\tau \in (0, 1)$
1. Repita
   2. Calcule os resíduos por (5)
   3. $D = XZ^{-1}$
   4. Calcule a direção $\tilde{\Delta}$ por (6)
   5. Calcule o tamanho do passo por (7)
   6. Calcule $\tilde{\gamma}$ por (8)
   7. Calcule μ por (9)
   8. Calcule r_s por (12)
   9. Calcule a direção Δ por (13)
   10. Calcule o tamanho do passo (7)
   11. Atualize o ponto
      $x = x + \alpha_p\Delta x$;
      $y = y + \alpha_d\Delta y$;
      $z = z + \alpha_d\Delta z$;
12. até convergir

Observe que em cada iteração deste método são resolvidos dois sistemas lineares adicionais, os passos 4 e 6, com a matriz ADA^t, que pode ser fatorada uma única vez usando a fatoração de Cholesky.

O critério de convergência é baseado nas condições de otimalidade.

$$\begin{pmatrix} \frac{\|b-Ax\|}{1+\|b\|} \\ \frac{\|c-A^ty-z\|}{1+\|c\|} \\ \frac{|c^tx-b^ty|}{1+|c^tx+b^ty|} \end{pmatrix} \leq \epsilon \tag{14}$$

3 Iterações Continuadas

No método preditor corretor a etapa de esforço computacional crítica consiste no cálculo da fatoração de Cholesky de ADA^t em cada iteração. Dessa maneira, na busca de economia de esforços, realizaremos nesta etapa iterações subsequentes e após somente estas iterações uma nova fatoração de Cholesky é necessária, estendendo os resultados apresentados em Oliveira, Lyra e Correia (1988) para o método dual afim escala. (Adler, Resende, Veiga e Karmarkar, 1989).

As iterações continuadas realizam uma busca pelas componentes responsáveis pelo bloqueio nas direções $(\Delta x, \Delta z)$, ou seja, encontra i e j, tais que:

$$\begin{array}{l} i = \arg\min_t\{-\frac{x_t}{\Delta x_t}|\Delta x_t < 0\} \\ j = \arg\min_t\{-\frac{z_t}{\Delta z_t}|\Delta z_t < 0\} \end{array}$$

Seja $h = \min\{-\frac{x_i}{\Delta x_i}, -\frac{z_j}{\Delta z_j}\}$. Se $h = -\frac{x_i}{\Delta x_i}$ então na nova direção $\hat{\Delta} x_i = 0$, caso contrário, $\hat{\Delta} z_i = 0$. Adicionalmente a direção afim escala continuada $\hat{\Delta}$ deve satisfazer o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} A\hat{\Delta} x = r_p \\ A^t\hat{\Delta} y + \hat{\Delta} z = r_d \\ X\hat{\Delta} z + Z\hat{\Delta} x = r_a. \end{array} \right. \tag{15}$$

Inicialmente determinamos $\hat{dx}$ que satisfaz a primeira equação do sistema (15). Este cálculo é feito resolvendo o problema abaixo que minimiza a alteração na direção Δx ao anular uma componente, de forma similar à idéia de Dikin (1967) ao desenvolver o método primal afim escala. Considere $\bar{\Delta} x = \Delta x$, a solução do sistema (13).

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\|D^{-\frac{1}{2}}\hat{\Delta} x - D^{-\frac{1}{2}}\bar{\Delta} x\|^2 \\ \text{s.a} & A\hat{\Delta} x = r_p \\ & \hat{\Delta} x_i = \beta_a \end{array} \tag{16}$$

onde $\beta_a = \left\{ \begin{array}{c} 0, \ se \ \hat{\Delta} x_i = 0; \\ (Z^{-1}r_a)_i, \ se \ \hat{\Delta} z_i = 0, \end{array} \right.$
cuja solução é:

$$\hat{\Delta} x = \bar{\Delta} x - \lambda d_{ii} e_i + DA^t v \tag{17}$$

onde d_{ii} é os elementos da diagonal da matriz D,

$$\lambda = \frac{\bar{\Delta} x_i - \beta_a}{d_{ii}(1 - d_{ii}A_i^t(ADA^t)^{-1}A_i)} \ e \ v = \lambda d_{ii}(ADA^t)^{-1}A_i.$$

Pelo sistema (15), temos:

$$\begin{array}{l} \hat{\Delta} z = X^{-1}(r_a - Z\hat{\Delta} x), \\ \hat{\Delta} y = (ADA^t)^{-1}AD(r_d - \hat{\Delta} z). \end{array} \tag{18}$$

Observações:

- O cálculo das direções $\hat{\Delta} x$ e $\hat{\Delta} y$ implica na resolução de dois sistemas lineares com ADA^t.

- Para determinar $\hat{\Delta}y$, acima estamos realizando uma projeção no espaço coluna de ADA^t.

Desta forma para evitar erros de arredondamento, é conveniente atualizar $\hat{\Delta}z$:

$$\hat{\Delta}z = r_d - A^t\hat{\Delta}y. \tag{19}$$

Como mencionado anteriormente para determinar a direção preditora corretora continuada, fazemos o cálculo de μ e a correção não-linear, obtendo o sistema (11). Este sistema é resolvido de forma similar ao sistema (15), descrito acima, sendo utilizado o problema auxiliar

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\|D^{-\frac{1}{2}}\Delta x - D^{-\frac{1}{2}}\bar{\Delta}x\|^2 \\ \text{s.a} & A\Delta x = r_p \\ & \Delta x_i = \beta_s \end{array} \tag{20}$$

onde $\beta_s = \begin{cases} 0, \ se \ \hat{\Delta}x_i = 0; \\ (Z^{-1}r_s)_i, \ se \ \hat{\Delta}z_i = 0. \end{cases}$

Observe que neste caso para resolver o sistema (11) é necessário encontrar a solução de apenas um sistema linear para determinar Δy, pois no cálculo de v para determinar Δx o sistema linear envolvido já foi utilizado em (17).

Algoritmo 2 Iterações Continuadas

1. Para $p = 0$ até p_{max}
   2. Calcule o tamanho do passo primal e dual:
      $\rho_x = \min\{-\frac{x_i}{\Delta x_i}|\Delta x_i < 0\}$; $\rho_z = \min\{-\frac{z_i}{\Delta z_i}|\Delta z_i < 0\}$
      $\alpha_p = \min\{1, \tau\rho_x\}$; $\alpha_d = \min\{1, \tau\rho_z\}$
   3. Atualize o ponto
   4. Atualize os resíduos
   5. Escolha da componente de bloqueio
      $h = \min(\rho_x, \rho_z)$
   6. Se $h = \rho_x$ então
      7. $i = \arg\min_t\{-\frac{x_t}{\Delta x_t}|\Delta x_t < 0\}$
      8. $\hat{\Delta}x_i = 0$
   9. Caso contrário
      10. $i = \arg\min_t\{-\frac{z_t}{\Delta z_t}|\Delta z_t < 0\}$
      11. $\hat{\Delta}z_i = 0$
   12. Fim se
   13. Resolva o sistema (15), usando o problema auxiliar (16)
   14. Atualize $\hat{\Delta}z$
   15. Calcule μ por (9)
   16. Calcule r_s
   17. Resolva o sistema (11), usando o problema auxiliar (20)
   18. Atualize Δz
   19. Se $(x + \Delta x)^t(z + \Delta z) < x^t z$ pare
20. Fim Para

Definidas as novas direções no Algoritmo (1) substituímos os passos (10-11) pelo Algoritmo (2).

Assim, com as iterações continuadas o método passa a interagir em dois níveis. No nível externo é fixada uma fatoração de Cholesky para ADA^t e calculada a direção preditora corretora. Já no nível interno, são realizadas atualizações da direção através da eliminação de algumas de suas componentes. Ao término destas atualizações é necessário verificar se a nova direção permanece descendente.

Observe que a matriz dos sistemas lineares adicionais envolvidos nas iterações continuadas é ADA^t que já foi fatorada anteriormente. O número máximo de iterações continuada foi limitado em $\log_{10}(n)$.

3.1 Iterações continuadas com váriaveis canalizadas

Assim como desenvolvido anteriormente as iterações continuadas podem ser aplicadas no método preditor corretor com variáveis canalizadas. O problema de programação linear com variáveis canalizadas na forma padrão primal é dado por:

$$\begin{array}{rc} \min & c^t x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x + s = u \\ & x \geq 0,\ s \geq 0 \end{array} \tag{21}$$

onde $s \in \mathbb{R}^n$ representa as variáveis de folga e $u \in \mathbb{R}^n$ representa o limitante superior de x. E o problema dual associado na forma padrão:

$$\begin{array}{rc} \max & b^t y - u^t w \\ \text{s.a} & A^t y + z - w = c \\ & z \geq 0,\ w \geq 0 \end{array} \tag{22}$$

onde $w \in \mathbb{R}^n$ representa as variáveis de folga.

Neste caso, as condições de otimalidade são dadas por Wright (1997):

$$\begin{cases} Ax - b = 0 & (x, z) \geq 0 \\ x + s - u = 0 & \\ A^t y + z - w - c = 0 & (z, w) \geq 0 \\ XZe = 0 & \\ SWe = 0 & \end{cases} \tag{23}$$

sendo $S = diag(s)$ e $W = diag(w)$.

Neste caso, a abordagem das iterações continuadas realiza uma busca pelas componentes de bloqueio nas direções $(\Delta x, \Delta s, \Delta z, \Delta w)$, e elimina uma delas, de forma similar à realizada na versão sem as váriaveis canalizadas. Desse modo, na nova direção $\hat{\Delta}$ ocorre um dos seguintes casos: $\hat{\Delta} x_i = 0,\ \hat{\Delta} z_j = 0,\ \hat{\Delta} s_k = 0$ ou $\hat{\Delta} w_l = 0$, onde i, j foram definidos anteriormente e

$$\begin{array}{l} k = \arg\min_t \{-\frac{s_t}{\Delta s_t} | \Delta s_t < 0\} \\ l = \arg\min_t \{-\frac{w_t}{\Delta w_t} | \Delta w_t < 0\}. \end{array}$$

Adicionalmente $\hat{\Delta}$ satisfaz o sistema:

$$\begin{cases} A\hat{\Delta}x = r_p \\ \hat{\Delta}x + \hat{\Delta}s = r_u \\ A^t\hat{\Delta}y + \hat{\Delta}z - \hat{\Delta}w = r_d \\ X\hat{\Delta}z + Z\hat{\Delta}x = r_a \\ S\hat{\Delta}w + W\hat{\Delta}s = r_b. \end{cases} \tag{24}$$

Por (16), determinamos $\hat{\Delta}x$, sendo que neste caso:

$$\beta_a = \begin{cases} 0, \ se \ \hat{\Delta}x_i = 0; \\ (r_u)_i, \ se \ \hat{\Delta}s_i = 0; \\ (r_u)_i - (W^{-1}r_b)_i, \ se \ \hat{\Delta}w_i = 0; \\ (Z^{-1}r_a)_i, \ se \ \hat{\Delta}z_i = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (24), temos:

$$\begin{aligned} &\hat{\Delta}s = r_u - \hat{\Delta}x \\ &\hat{\Delta}z = X^{-1}(r_a - Z\hat{\Delta}x) \\ &\hat{\Delta}w = S^{-1}(r_b - W\hat{\Delta}s) \\ &\hat{\Delta}y = (ADA^t)^{-1}AD(r_d - \hat{\Delta}z + \hat{\Delta}w) \end{aligned} \tag{25}$$

onde $D = XZ^{-1} + SW^{-1}$.

Novamente dz é recalculado para evitar erros de arredondamento como no caso sem canalização:

$$\hat{\Delta}z = r_d - A^t\hat{\Delta}y + \hat{\Delta}w. \tag{26}$$

Fazendo o cálculo de μ e da correção não-linear, para determinar a direção preditora corretora, obtemos a nova direção, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} A\Delta x = r_p \\ \Delta x + \Delta s = r_u \\ A^t\Delta y + \Delta z = r_d \\ X\Delta z + Z\Delta x = r_s \\ S\Delta w + W\Delta s = r_t \end{cases} \tag{27}$$

onde

$$\begin{aligned} r_s &= r_a + \mu e - \hat{D}_x\hat{D}_z e \\ r_t &= r_b + \mu e - \hat{D}_s\hat{D}_w e. \end{aligned} \tag{28}$$

Este sistema é resolvido de forma similar ao sistema (24), descrito acima, sendo que no problema auxiliar (20) temos:

$$\beta_s = \begin{cases} 0, \ se \ \hat{\Delta}x_i = 0; \\ (r_u)_i, \ se \ \hat{\Delta}s_i = 0; \\ (r_u)_i - (W^{-1}r_t)_i, \ se \ \hat{\Delta}w_i = 0; \\ (Z^{-1}r_s)_i, \ se \ \hat{\Delta}z_i = 0. \end{cases}$$

No método preditor corretor com variáveis canalizadas, o algoritmo das iterações continuadas é dado por:

Algoritmo 3 Iterações continuadas com variáveis canalizadas

1.Para $p = 0$ até p_{max}
  2.Calcule o tamanho do passo primal e dual:
    $\rho_x = \min\{-\frac{x_i}{\Delta x_i}|\Delta x_i < 0\}$; $\rho_s = \min\{-\frac{s_i}{\Delta s_i}|\Delta s_i < 0\}$;
    $\rho_z = \min\{-\frac{z_i}{\Delta z_i}|\Delta z_i < 0\}$; $\rho_w = \min\{-\frac{w_i}{\Delta w_i}|\Delta w_i < 0\}$
    $\alpha_p = \min\{1, \tau\rho_x, \tau\rho_s\}$; $\alpha_d = \min\{1, \tau\rho_z, \tau\rho_w\}$
  3. Atualize o ponto
  4. Calcule γ
  5. Atualize os resíduos
  6. $h = \min(\rho_x, \rho_s, \rho_z, \rho_w)$
  7. Caso $h = \rho_x$ então
    8. $i = \arg\min_t\{-\frac{x_t}{\Delta x_t}|\Delta x_t < 0\}$
    9. $\hat{\Delta} x_i = 0$
  10. Caso $h = \rho_s$ então
    11. $i = \arg\min_t\{-\frac{s_t}{\Delta s_t}|\Delta s_t < 0\}$
    12. $\hat{\Delta} s_i = 0$
  13. Caso $h = \rho_w$ então
    14. $i = \arg\min_t\{-\frac{w_t}{\Delta w_t}|\Delta w_t < 0\}$
    15. $\hat{\Delta} w_i = 0$
  16. Caso $h = \rho_z$ então
    17. $i = \arg\min_t\{-\frac{z_t}{\Delta z_t}|\Delta z_t < 0\}$
    18. $\hat{\Delta} z_i = 0$
  19. Fim
  20. Resolva o sistema (24), usando o problema auxiliar (16)
  21. Atualize $\hat{\Delta} z$
  22. Calcule $\hat{\gamma}$
  23. Calcule μ por (9)
  24. Atualize os resíduos, por (28)
  25. Resolva o sistema (27), usando o problema auxiliar (20)
  26. Atualize dz
  27. Se $(x + \Delta x)^t(z + \Delta z) + (s + \Delta s)^t(w + \Delta w) < x^t z + s^t w$ pare
28. Fim Para

Como no problema sem váriaveis canalizadas, basta resolver dois sistemas adicionais, realizando o mesmo esforço computacional e o critério de convergência é baseado nas condições de otimalidade.

4 Resultados Numéricos

Para realizar os testes preliminares do método preditor corretor (MPC) com as iterações continuadas (IC) foram selecionados alguns problemas da Netlib, de acordo com o número de colunas

da matriz, foram tomados problemas com número de colunas consideravelmente pequeno, médio e grande. A implementação realizada na linguagem de programação MATLAB 7.9 (R2009b) em um computador com processador AMD Turion(tm) TL-60, com 2 GB de memória e sistema operacional Windows Professional. O número de iterações obtido foi comparado com o obtido pelo método MPC.

Tabela 1: Resultados numéricos

Problema	N.o de colunas (n)	MPC		MPC com IC	
		Iter.	Tempo	Iter.	Tempo
25fv47	1876	27	4.6349	26	7.1237
bnl1	1586	28	2.0174	27	2.7880
bnl2	4486	38	17.0397	35	23.1756
czprob	3562	44	12.5830	40	18.2632
fffff800	1028	39	2.6932	32	3.6485
forplan	492	28	0.3831	25	0.5361
scagr7	185	21	0.0375	22	0.0687
scagr25	671	22	0.2805	22	0.3927
scrs8	1275	30	1.0238	31	1.3251
sctap1	660	15	0.2030	14	0.2587
sctap2	2500	14	2.8054	14	4.7963
sctap3	3340	14	5.2517	15	9.7292
share1b	251	26	0.0718	33	0.1597
share2b	162	22	0.0350	19	0.0661
ship04l	2166	21	1.9555	20	2.3376
ship08l	4363	25	7.9079	21	7.4967
ship08s	2467	21	1.7375	18	2.0874
stocfor2	3045	21	13.6232	22	19.3404
wood1p	2595	16	5.9363	16	6.7332
woodw	8418	38	51.8681	38	55.3059
Total		510		490	

Os resultados apresentados na Tabela 1 mostram que na maioria dos vinte problemas testados obteve-se uma redução do número de iterações. Assim redução do número de cálculo da fatoração de Cholesky, embora em quatro problemas ocorreu um aumento e nos restantes testado quatro não houve alteração. Verificando o ganho total houve uma redução média de uma iteração por problema.

5 Conclusões

Neste trabalho as iterações continuadas foram desenvolvidas para o método de pontos interiores preditor corretor com e sem variáveis canalizadas. Nestas iterações é determinada uma direção preditora corretora continuada para cada eliminação de componente de bloqueio. Desta forma o novo método passa a ser realizado em dois níveis, sendo que no nível externo tem-se o cálculo da fatoração de Cholesky e o cálculo da direção preditora corretora tradicional. No nível interno são aplicadas as iterações continuadas com o objetivo de reduzir o número total de ite-

rações do método de pontos interiores. Essa redução é realizada atualizando a direção preditora corretora através de eliminações de componentes de bloqueio sucessivamente enquanto a direção determinada reduz o *gap* de dualidade. Desta forma evitando que ocorra o cálculo da fatoração de Cholesky até uma nova iteração. O esforço de cada iteração continuada é dominado pela solução de três sistemas lineares com uma matriz já fatorada. Os resultados computacionais preliminares aqui apresentados mostram que esta abordagem é promissora. Embora o tempo computacional na nova abordagem seja maior, espera-se que para problemas de grande porte em outra linguaguem computacional, essa abordagem obtenha resultados melhores cuja fatoração de Cholesky seja muito mais cara em relação ao tempo de solução dos sistemas lineares adicionais. Pretende-se em um trabalho futuro incorporar estas idéias ao código PCx (Czyzyk, Mehrotra,Wagner e Wright, 1999), inclusive considerando variáveis canalizadas e realizar experimentos numéricos com problemas de grande porte.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, e pela CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal e Nível Superior.

Referências

Adler, I. Resende, M.G.C., Veiga, G. e Karmarkar, N. (1989), An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming, *Mathematical Programming* 44: 297-335.

Chvátal, V.V., *Linear Programming*, W. H. Freeman and Company, New York, USA,1983.

Czyzyk, J., Mehrotra, S., Wagner, M. e Wright, S.J. (1999), PCx an interior point code for linear programming, *Optimization Methods δ Software* 11-2(1-4): 397-430.

Dikin, I.I. (1967), Iterative solution of problems of linear and quadratic programming, *Soviets Math. Doklady* 8:674-675.

Mehrotra, S. (1992), On the implementation of a primal-dual interior point method, *SIAM Journal on Optimization* 2(4):575-601.

Monteiro, R. D. C., Adler, I. e Resende, M. G. C. (1990), A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension, *Mathematics of Operations Research* 15:191-214.

Oliveira, A. R. L., Lyra, C. e Correia, P.B. (1988), Implementação computacional de algoritmo polinomial de programação linear: aplicação ao planejamento de operação de sistemas hidrotérmicos, *Anais do VII Congresso Brasileiro de Automática - CBA*: 928-929.

Wright, S.J, *Primal-Dual Interior-Point Methods*, SIAM Publications, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1997.