ALGORITMOS *BRANCH-AND-BOUND* E DSATUR PARA O NÚMERO CROMÁTICO DE UMA COLORAÇÃO COM RESTRIÇÕES

Flávio José Mendes Coelho[1], **Clarice de Souza Santos**[1],
Simone Ingrid Monteiro Gama[1], **Rosiane de Freitas Rodrigues**[2]
[1]Programa de Pós-Graduação em Informática - PPGI
[2]Instituto de Computação - IComp
Universidade Federal do Amazonas - UFAM, Manaus, AM, Brasil
{flavio, clarice, simone.gama, rosiane}@icomp.ufam.edu.br

RESUMO

Em teoria cromática dos grafos, uma coloração própria de vértices de um grafo $G = (V,E)$ é uma atribuição de cores aos vértices do grafo de forma que vértices adjacentes sejam assinalados com cores distintas, isto é, uma função $c : V \to \mathbb{N}$, tal que $c(u) \neq c(v)$ para quaisquer aresta $\{u,v\} \in E$. Define-se o número cromático de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, como o número mínimo de cores para o qual G admite uma coloração própria. O problema de se determinar χ é alvo de pesquisas contínuas e ampla aplicabilidade (alojamento de itens incompatíveis, alocação de canais, programação de horários, alocação de registros em compiladores, e variações), e por pertencer à classe NP-difícil requer métodos de enumeração implícita tais como programação dinâmica e *branch-and-bound*, métodos de aproximação, ou heurísticas. A combinação do algoritmo DSATUR, um dos algoritmos mais utilizados para coloração própria de grafos, e da técnica *branch-and-bound* garante a determinação de χ em tempo exponencial, sendo na prática, mais eficiente do que qualquer abordagem de enumeração explícita direta (força bruta).

Uma coloração com restrições (ou especial), agrega um conjunto de restrições sobre como as cores devem ser atribuídas aos vértices, arestas ou ambos. Dentre as colorações com restrições, destaca-se a lista-coloração (*list coloring*) que é uma coloração própria em que cada vértice $v \in V$ está associado à sua própria lista de cores $\mathcal{L}(v) \subset \mathbb{N}$, atribuíveis ao vértice v. Seja $(S_v)_{v \in V}$ uma família de conjuntos representando as listas de cores atribuíveis. Um grafo G é dito ser k-lista-colorível (ou *k-choosable*), se, para cada família $(S_v)_{v \in V}$ com $|L(v)| = k$ para todo $v \in V$, há uma lista-coloração de G com respeito às listas S_v. O menor inteiro k para o qual G é k-lista-colorível é o número lista-cromático $\chi_L(G)$, ou *choice number* $Ch(G)$ de G. Este problema mostra-se computacionalmente tão difícil quanto χ, e também requer métodos de enumeração implícita, de aproximação ou heurísticas. Este trabalho defende a hipótese de que pode-se combinar o algoritmo DSATUR com o método *branch-and-bound*, adaptados para a lista-coloração, com o objetivo de encontrar o número lista-cromático de um grafo, em tempo não pior do que o tempo exponencial obtido pela abordagem de enumeração explícita.

PALAVRAS CHAVE: algoritmos, colorações restritas em grafos, lista-coloração.
Área principal: Otimização Combinatória.

ABSTRACT

In chromatic graph theory, a proper coloring of vertices of a graph $G = (V,E)$ is an assignment of colors to the vertices of the graph such that adjacent vertices are marked with different colors, i.e., a function $c : V \to \mathbb{N}$ such that $c(u) \neq c(v)$ for any edge $\{u,v\} \in E$. The chromatic number of a graph G, denoted by χ, may be defined as the minimum number of colors for which G admits a proper coloring. The problem of determining χ is frequent subject of research and has broad applicability (accommodation of conflicting items, channel allocation, scheduling, allocation of registers in compilers, and variations), and, belongs to the class NP-hard which requires implicit enumeration methods such as dynamic programming and branch-and-bound, approximation methods, or heuristics. The combination of the algorithm DSATUR, one of the most widely used algorithms for graph coloring itself, and technique branch-and-bound ensures the determination of χ in exponential time, and in practice, more efficient that any direct approach to explicit enumeration (brute force).

A coloring with constraints (or special), adds a set of restrictions on how the colors should be assigned to the vertices, edges, or both. Among the colorings with restrictions, there is the *list coloring* which is a proper coloring such as each vertex $v \in V$ is associated with its own list of colors $\mathcal{L}(v) \subset \mathbb{N}$, attributable to the vertex v. Let $(S_v)_{v \in V}$ be a family of sets representing the lists of colors attributable. The graph G is called k-list-colorable (or k-*choosable*), if, for every family $(S_v)_{v \in V}$ with $|L(v)| = k$ for all $v \in V$, there is a list coloring de G from the lists S_v. The least integer k for which G is k-list-colorable is the list-chromatic number $\chi_L(G)$, ou *choice number* $Ch(G)$ of G. This problem shows up computationally as difficult as χ, and also requires implicit enumeration methods, or heuristic approach. This work supports the hypothesis that it is possible combine the DSATUR algorithm with the *branch-and-bound* method, both adapted for list coloring, in order to find the list chromatic number of a graph, reaching a not worse time than the exponential time obtained by a explicit enumeration approach.

KEYWORDS: algorithms, restricted colorings of graphs, list coloring.
Main area: Combinatorial Optimization.