

Implementação eficiente da heurística de reordenamento de Cuthill-McKee Reversa

Raniere Gaia Costa da Silva

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651 – Cidade Universitária “Zeferino Vaz”
Distr. Barão Geraldo – Campinas – São Paulo – Brasil CEP 13083-859
ra092767@ime.unicamp.br

Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651 – Cidade Universitária “Zeferino Vaz”
Distr. Barão Geraldo – Campinas – São Paulo – Brasil CEP 13083-859
aurelio@ime.unicamp.br

Resumo

Neste trabalho revisitou-se a heurística de reordenamento Cuthill-McKee Reversa, proposta em 1969, que busca um reordenamento para matrizes esparsas que reduza a largura de banda destas. O autor deste trabalho implementou a heurística revisitada, testou várias bibliotecas entre as quais a “Netlib LP” e concluiu, pelo menos para os problemas testados, que a heurística Cuthill-McKee Reversa é inferior a heurística de mínimo grau múltiplo por gerar mais elementos não nulos na decomposição de Cholesky.

Palavras-chaves: Métodos de pontos interiores, decomposição de Cholesky, reordenamento de matrizes esparsas.

Área principal: Programação Matemática.

Abstract

In this work we revisited the reordering heuristic Reverse Cuthill-McKee, proposed in 1969, that search for a sparse matrices reordering that reduces the bandwidth. The author of this paper has implemented the revisited heuristic, tested it with many libraries including the “Netlib LP” library and concluded, at least for the tested problems, that the heuristic Cuthill-McKee Reverse is worse than the multiple minimum degree heuristic because it generates more non-zero entries in Cholesky decomposition.

Keywords: Interior point method, Cholesky decomposition, Sparse Matrix Reordering.

Main area: Mathematical Programming.

1 Métodos de Pontos Interiores Primal-Dual

Consideremos o Problema de Programação Linear na forma primal e o na forma dual associado:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } c^T x & \text{maximizar } b^T y \\ \text{sujeito a } Ax = b & \text{e} \quad \text{sujeito a } A^T y + z = c \\ x \geq 0 & z \geq 0, \end{array}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz de posto completo m e c , b , x , y e z são vetores colunas de dimensão apropriada. O *gap* dual é dado por $\gamma = c^T x - b^T y$ que se reduz a $\gamma = x^T z$ para pontos primais e duais factíveis.

Os Métodos de Pontos Interiores Primais-Duais para resolver os problemas na forma primal consistem em, a partir de uma tripla inicial (x^0, y^0, z^0) , construir uma sequência de triplas, (x^i, y^i, z^i) , dada por $x^{i+1} = x^i + \alpha^i \Delta x^i$, $y^{i+1} = y^i + \alpha^i \Delta y^i$, $z^{i+1} = z^i + \alpha^i \Delta z^i$, onde $i \geq 0$ e $\alpha^i \in (0, 1]$, que convirja para a tripla (x^*, y^*, z^*) que é solução da forma primal e dual. A constante α^i deve ser escolhida tal que $x^i, z^i > 0$.

A direção afim nos Métodos de Pontos Interiores Primais-Duais, $(\Delta x^i, \Delta y^i, \Delta z^i)$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^i \\ \Delta y^i \\ \Delta z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d \\ r_p \\ r_a \end{bmatrix}, \quad (1)$$

onde $X = \text{diag}(x^i)$, $Z = \text{diag}(z^i)$, $r_p = b - Ax^i$, $r_d = c - A^T y^i - z^i$, $r_a = -XZe$ e e representa o vetor de uns.

Por meio da eliminação de variáveis é possível reduzir (1) para

$$AD^{-1}A^T \Delta y^i = AD^{-1}r_1 - r_2, \quad (2)$$

tal que $\Delta x^i = D^{-1}(r_1 - A^T \Delta y^i)$ e $\Delta z^i = X^{-1}(r_a - Z \Delta x^i)$.

Para resolver (2) costuma-se utilizar a fatoração de Cholesky pois $AD^{-1}A^T$ é uma matriz simétrica definida positiva. Durante a construção da sequência de triplas (x^i, y^i, z^i) apenas D se altera na matriz e por esse motivo a estrutura esparsa de $AD^{-1}A^T$ é mantida durante todas as iterações do Método de Pontos Interiores Primal-Dual.

2 Matrizes Esparsas

Como visto na seção anterior, um dos passos dos Métodos de Pontos Interiores Primal-Dual consiste em resolver um sistema linear simétrico definido positivo, cuja estrutura esparsa é mantida inalterada durante todo o método, utilizando a fatoração de Cholesky. A fatoração de Cholesky possui algumas propriedades interessantes relacionadas com a banda e o envelope de matrizes.

Mudando a notação, considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica definida positiva genérica com entradas A_{ij} . Para cada linha i de A , $i = 1, \dots, n$, seja $f_i(A) = \min \{j \mid A_{ij} \neq 0\}$, isso é, $f_i(A)$ corresponde a primeira coluna cujo elemento na linha i é diferente de zero.

Segundo Cuthill e McKee [1], definimos $\beta_i(A) = i - f_i(A)$, $1 \leq i \leq n$ e $\beta(A) = \max \{\beta_i(A) \mid 1 \leq i \leq n\}$ em que $\beta_i(A)$ é a largura de banda da i -ésima linha de A e $\beta(A)$ é a largura de banda da matriz A . A banda da matriz A é definida como $\text{Band}(A) = \{\{i, j\} \mid 0 < i - j \leq \beta(A)\}$.

O envelope da matriz A é definido como $\text{Env}(A) = \{\{i, j\} \mid 0 < i - j \leq \beta_i(A)\}$.

A fatoração de Cholesky preserva a banda da matriz e o envelope da matriz.

3 Método Cuthill-McKee Reverso

Considere a matriz A e seu fator de Cholesky G dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 1,0 & 3,0 & 0,0 & 0,0 \\ 1,0 & -0,3 & 2,9 & 0,0 \\ 1,0 & -0,3 & -0,3 & 2,9 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que vários elementos nulos na parte triangular inferior de A são não nulos em G . A perda de elementos nulos ao realizar a fatoração de Cholesky é denominada de preenchimento e deve ser evitada sempre que possível.

Na seção anterior verificou-se que a fatoração de Cholesky preserva a banda e envelope da matriz. Por esse motivo, ao utilizar matrizes de banda e envelope pequenos o preenchimento da matriz também será pequeno. Vamos verificar que dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva existe uma matriz $A' = PAP^T$, onde P é uma matriz de permutação, tal que a banda e/ou envelope de A' é menor que o de A .

Exemplo 1. Considere a matriz A e G dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifica-se que a largura da banda de A e G é 5 e o envelope é 19.

Agora, considere a matriz $A' = PAP^T = G'G'^T$, em que P é uma matriz de permutação, dada por

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad G' = \begin{bmatrix} 1,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,70 & 1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,70 & 0,40 & 0,57 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,70 & 0,40 & 0,57 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,70 & 0,40 & 0,57 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifica-se que a largura da banda de A' e G' é 4 e o envelope é 15.

Na próxima subseção apresentamos algumas definições da Teoria de Grafos que serão utilizadas no algoritmo estudado para obter uma permutação que busca reduzir a largura de banda e envelope.

3.1 Grafos e matrizes esparsas

Um grafo é, fundamentalmente, um modo de representar uma relação binária entre objetos. Para o propósito deste trabalho, considere um grafo $G = (V, E)$ como um conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ e um conjunto de arestas $E = \{e_1, e_2, \dots\}$, que são representadas por pares não ordenados, por exemplo, $e_1 = \{v_1, v_2\}$.

Assim como um grafo, uma matriz também descreve uma relação binária entre objetos através de seus elementos não nulos. Uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ induz um grafo $G(A)$, onde os vértices

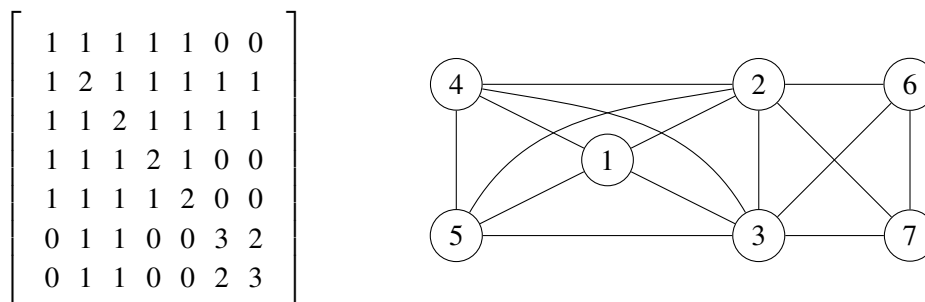


Figura 1: Ilustração do grafo (a direita) correspondente a uma matriz (a esquerda).

do grafo correspondem as dimensões da matriz e a aresta $e = \{i, j\}$ existe se e somente se $A_{ij} \neq 0$. Na Figura 1 é ilustrado a relação entre uma matriz e um grafo.

É importante destacar que permutar, simetricamente, linhas e colunas de uma matriz corresponde a renumerar os vértices do grafo. Na Figura 2 é ilustrado uma permutação da matriz presente na Figura 1 e a renumeração dos vértices do grafo.

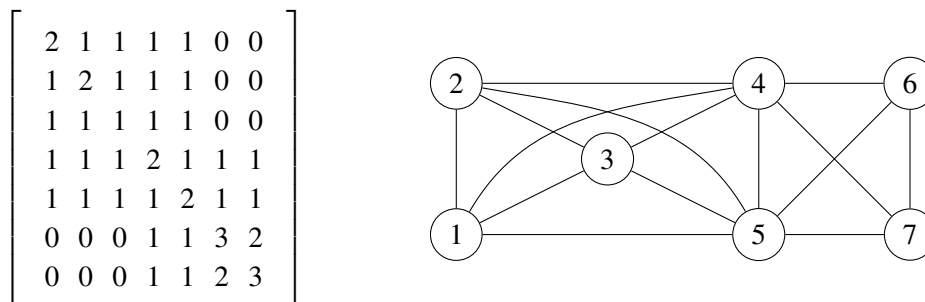


Figura 2: Ilustração da permutação simétrica de uma matriz e a renumeração dos vértices do grafo correspondente.

Além dos conceitos básicos da Teoria de Grafos, temos:

Distância entre vértices ou $d(v_1, v_2)$, número de arestas que formam o menor caminho ligando os vértices v_1 e v_2 .

Excentricidade ou $l(v)$, maior distância do vértice v a qualquer outro.

Diâmetro maior excentricidade dentre os vértices de um grafo.

Pseudo-diâmetro corresponde a uma alta excentricidade, porém não necessariamente a maior de todas.

Vértices periféricos são vértices cuja excentricidade é igual ao diâmetro do grafo.

Vértices pseudo-periféricos são vértices que apresentam altas excentricidades, mas não necessariamente a maior.

Estrutura de nível com raiz no vértice v é uma partição do conjunto V em níveis $L_0, L_2, \dots, L_{l(v)}$ tal que $L_0 = \{v\}$, e para $i > 0$, L_i é o conjunto de vértices adjacentes aos vértices presentes no nível L_{i-1} e ainda não pertencentes a nenhum nível.

Na Figura 3 é ilustrado uma estrutura de nível, dentre as várias possíveis, para um grafo.

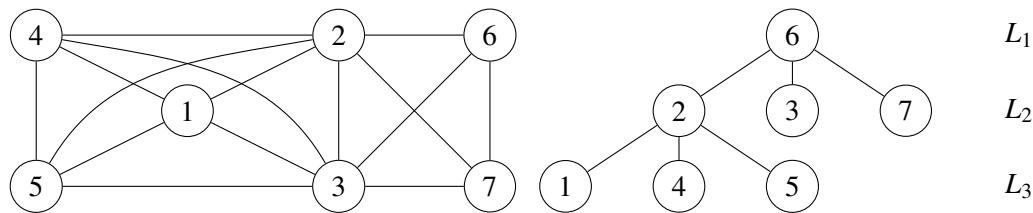


Figura 3: Grafo (esquerda) e sua estrutura de nível com raiz no vértice 6 (direita).

3.2 Método Cuthill-McKee Reverso

Cuthill e McKee [1] propuseram uma heurística de reordenação cujo objetivo principal é reduzir a largura de banda de uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cujo grafo é conexo.

A heurística proposta por Cuthill e McKee consiste em utilizar para o reordenamento a sequência em que os vértices do grafo correspondente a uma matriz são visitados ao realizar uma busca em largura na estrutura de nível do grafo sendo que os vértices de cada nível encontram-se ordenados em ordem crescente de grau. Um resumo da heurística é apresentado abaixo.

Algoritmo 1 Pseudo-código de Cuthill-McKee

Entrada: Grafo $G(A)$ e um vértice inicial v .

Saída: o , novo ordenamento dos vértices de $G(A)$.

- 1: Marca todos os vértices como não visitados.
 - 2: $o \leftarrow$ vetor de zeros
 - 3: $i \leftarrow 1$
 - 4: $f \leftarrow$ fila vazia
 - 5: Adicionar v na fila f .
 - 6: Marca v como visitado.
 - 7: **enquanto** f não for vazia **faça**
 - 8: Desenfileira f em v .
 - 9: $o_i \leftarrow v$
 - 10: $i \leftarrow i + 1$
 - 11: **para todo** vértice w adjacente a v , em ordem crescente de grau, **faça**
 - 12: **se** w ainda não foi visitado **então**
 - 13: Adicionar w na fila f .
 - 14: Marca w como visitado.
 - 15: **fim**
 - 16: **fim**
 - 17: **fim**
-

Para o caso de uma matriz A cujo grafo não é conexo, Cuthill e McKee propõe aplicar a mesma heurística para cada uma das componentes conexas.

George [4] verificou experimentalmente que ao reverter o ordenamento obtido pelo Algoritmo Cuthill-McKee, *i.e.*, trocando o_i por o_{n-i+1} para $i = 1, 2, \dots, n$, o novo ordenamento mantém a mesma banda mas diminui o envelope da matriz (essa modificação nunca aumenta o envelope da matriz). Essa versão do algoritmo é conhecida como Método Cuthill-McKee Reverso (RCM).

Uma dos parâmetros de entrada do Método Cuthill-McKee (Reverso) é o vértice inicial sendo que experimentos computacionais [1] sugerem que vértices pseudo-periféricos são bons candidatos.

Uma heurística para encontrar vértices pseudo-periféricos foi proposto por Alan George e Joseph W. H. Liu [2] e é baseado na observação que $y \in L_{l(x)}(x) \implies l(x) \leq l(y)$, *i.e.*, se y pertence ao nível mais elevado da estrutura de níveis com raiz em x então a excentricidade de x é menor ou

igual a x . Essa observação é verificada com maior facilidade em grafos que são uma árvore, ver Figura 4.



Figura 4: Grafo e sua estrutura de níveis com raiz em 1 (à esquerda) e sua estrutura de níveis com raiz em 5 (à direita).

A heurística proposta por George e Liu consiste em dada uma estrutura de nível com raiz no vértice r , escolher um nó x do último nível e enquanto $l(x) > l(r)$ fazer $r = x$ e escolher um novo nó x . Um resumo da heurística é apresentado abaixo.

Algoritmo 2 Pseudo-código para encontrar vértice pseudo-periférico, x .

Entrada: Grafo $G(A)$.

Saída: x .

- 1: $r \leftarrow$ Nó arbitrário em $G(A)$
 - 2: Construir estrutura de nível a partir de r , $L(r)$.
 - 3: Escolher um vértice x pertencente ao último nível de $L(r)$.
 - 4: Construir estrutura de nível a partir de x , $L(x)$.
 - 5: **se** $l(x) > l(r)$ **então**
 - 6: $r \leftarrow x$
 - 7: Retorna para a linha 2
 - 8: **fim**
-

4 Implementação do Método e Testes Computacionais

O Método Cuthill-McKee Reverso foi implementado, na linguagem C, pelo autor deste trabalho como um patch para o PCx (<http://pages.cs.wisc.edu/~swright/PCx/>), e a implementação desenvolvida encontra-se disponível em <https://github.com/r-gaia-cs/PCx.git>.

O PCx é um solver de Programação Linear que utiliza a variante de Mehrotra do Método Preditor Corretor com a estratégia de correção de Gondzio e o Método do Mínimo Grau Múltiplo de Liu[3] (MMD) para o reordenamento da matriz $AD^{-1}A^T$.

Testou-se a implementação (tendo como última revisão aquele cuja identificação inicia com a27fab4) com os problemas das bibliotecas:

- “Netlib LP” (<http://www.netlib.org/lp/>),
- “Kennington” (<http://www.netlib.org/lp/data/kennington/>),
- “Mészáros” (http://www.sztaki.hu/~meszaros/public_ftp/lptestset/misc/),
- “PDS” (<http://plato.asu.edu/ftp/lptestset/pds/>),
- “Rail” (<http://plato.asu.edu/ftp/lptestset/rail/>).

Considerando os problemas de todas as bibliotecas, foram utilizados mais de 200 problemas sendo que o RCM falhou em 2 problemas a mais que o MMD e o RCM apresentou um menor número de elementos não zeros em 4 problemas em comparação com o MMD. Na Tabela 1 encontram-se os resultados obtidos para os 25 maiores problemas das bibliotecas “Netlib LP” e “Mészáros” sendo que “R”, “NNZ”, “IT” e “T” significam, respectivamente, “código de retorno do PCx”, “número de elementos não zeros”, “número de iterações” e “tempo computacional” (em segundos). Em relação ao “código de retorno do PCx”, -1 indica que o tempo limite foi atingido e outros valores diferentes de 0 que alguma instabilidade numérica foi detectada.

5 Conclusões

Concluimos que a heurística de mínimo grau múltiplo é superior à heurística de Cuthill e McKee por gerar menos elementos não nulos na decomposição de Cholesky. Devido aos testes com várias bibliotecas acredita-se não existir uma classe de problemas onde a heurística Cuthill-McKee Reversa pode obter melhor desempenho.

A Informações adicionais

Este trabalho foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo Processo 126874/2012-3.

É possível adquirir uma cópia deste trabalho em https://github.com/r-gaia-cs/cnpq_126874_2012-3.

Este trabalho é licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição 3.0 Não Adaptada License. Para ver uma cópia desta licença, visite <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>.



Referências

- [1] E. CUTHILL AND J. MCKEE, *Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices*, in Proceedings of the 1969 24th national conference, ACM '69, New York, NY, USA, 1969, ACM, pp. 157–172.
- [2] A. GEORGE AND J. W. H. LIU, *An implementation of a pseudoperipheral node finder*, ACM Trans. Math. Softw., 5 (1979), pp. 284–295.
- [3] A. GEORGE AND J. W. H. LIU, *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*, Prentice Hall Series in Computational Mathematics, 1981.
- [4] J. GEORGE, *Computer implementation of the finite element method*, Report, Department of Computer Science, Stanford University, 1971.

Tabela 1: Resultados experimentais.

Problema da biblioteca Netlib									Problema da biblioteca do Mészáros								
Problema	MMD				RCM				Problema	MMD				RCM			
	R	NNZ	IT	T	R	NNZ	IT	T		R	NNZ	IT	T	R	NNZ	IT	T
df1001	0	1,64E+06	45	2,44E+01	15	5,72E+06	60	3,47E+02	dbic1	0	1,86E+06	45	2,87E+01	-1	INF	INF	INF
fit2p	0	3,00E+03	20	5,40E-01	0	3,00E+03	20	5,80E-01	lpl1	0	9,61E+05	68	1,18E+01	0	5,13E+07	52	6,78E+03
80bau3b	0	4,14E+04	36	3,10E-01	0	2,30E+05	36	1,44E+00	world	14	1,11E+06	60	9,28E+00	-1	INF	INF	INF
maros-r7	0	5,34E+05	14	1,61E+00	0	4,40E+05	14	4,10E+00	routing	0	3,11E+06	20	6,06E+00	0	1,28E+07	17	8,76E+01
pilot87	0	4,26E+05	29	3,35E+00	0	7,71E+05	25	7,71E+00	baxter_mat	0	5,89E+06	30	4,00E+01	0	2,90E+07	27	1,05E+03
d2q06c	0	1,37E+05	27	5,40E-01	0	4,55E+05	24	3,01E+00	zz	15	2,86E+05	43	3,70E+00	15	9,93E+05	43	1,07E+01
greenbea	14	4,91E+04	50	4,40E-01	14	1,51E+05	49	1,52E+00	southern1	0	5,67E+06	15	6,50E+01	0	7,77E+06	15	6,66E+02
greenbeb	14	4,78E+04	40	3,50E-01	14	1,68E+05	39	1,18E+00	sc205	12	5,04E+04	15	5,30E-01	12	5,36E+04	15	6,00E-01
bnl2	0	8,13E+04	33	3,10E-01	0	2,34E+05	33	1,34E+00	dbir2	0	2,82E+06	26	8,40E+01	0	6,75E+06	26	3,90E+02
pilot	0	2,01E+05	34	1,30E+00	0	4,36E+05	30	4,18E+00	dbir1	0	2,52E+06	24	6,88E+01	0	5,80E+06	23	2,86E+02
stocfor2	0	2,28E+04	19	7,00E-02	0	3,26E+04	19	2,40E-01	nsct2	0	5,65E+06	28	2,33E+02	0	8,35E+06	30	7,06E+02
sctap3	0	1,61E+04	14	6,00E-02	0	1,03E+05	14	2,60E-01	nsct1	0	5,42E+06	21	1,71E+02	0	8,59E+06	22	6,11E+02
cycle	0	5,61E+04	23	1,60E-01	0	1,78E+05	23	8,00E-01	unilever2	15	4,23E+05	36	3,47E+00	0	5,80E+06	73	2,47E+02
degen3	0	1,21E+05	16	5,00E-01	0	5,31E+05	13	2,53E+00	olivier	14	4,61E+05	50	4,57E+00	14	5,62E+06	43	4,48E+02
woodw	0	3,00E+04	30	1,80E-01	0	1,27E+05	30	5,80E-01	rlf.pre.dual	0	8,41E+05	13	2,34E+00	0	6,10E+06	13	4,88E+02
sierra	0	1,29E+04	18	6,00E-02	0	4,36E+04	18	1,40E-01	lpl3	0	1,49E+05	36	1,12E+00	0	4,50E+06	31	1,21E+02
ship121	0	5,51E+03	15	4,00E-02	0	1,70E+04	15	5,00E-02	p10	0	4,70E+05	27	1,69E+00	0	7,78E+06	29	2,54E+02
sctap2	0	1,17E+04	12	3,00E-02	0	5,54E+04	12	1,10E-01	leader	0	3,96E+05	49	2,86E+00	14	4,76E+06	48	5,19E+02
d6cube	0	5,48E+04	17	2,20E-01	0	6,55E+04	17	2,80E-01	ps	15	1,11E+07	40	5,16E+02	15	1,27E+07	48	6,23E+02
pilot.we	0	1,56E+04	45	1,30E-01	0	3,29E+04	45	2,10E-01	dbah00	0	2,81E+05	43	1,24E+00	0	4,85E+06	32	1,01E+02
nesm	0	2,18E+04	25	1,20E-01	0	2,90E+04	25	1,60E-01	nemswrld	0	7,83E+05	42	7,80E+00	0	4,47E+06	38	9,30E+01
czprob	0	3,52E+03	26	4,00E-02	0	9,13E+04	26	2,20E-01	nemsemm1	0	2,43E+05	57	1,57E+01	0	3,99E+05	57	1,96E+01
pilotnov	0	4,64E+04	16	1,10E-01	0	9,60E+04	16	2,60E-01	model11	0	1,40E+05	25	6,40E-01	0	7,73E+05	21	5,25E+00
ganges	0	2,97E+04	16	6,00E-02	0	4,88E+04	16	1,60E-01	nemsemm2	0	6,25E+04	35	8,70E-01	0	3,81E+05	35	3,37E+00
scfxm30	0	1,41E+04	19	6,00E-02	0	2,34E+04	19	1,30E-01	emsdz	0	2,75E+05	37	1,50E+00	0	2,78E+06	29	5,14E+01