

Heurísticas para um Problema de Dimensionamento de Lotes com Substituição de Demanda e Restrição de Capacidade

Rafael Soares Ribeiro

Universidade de São Paulo - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Av. Trabalhador São-carlense, 400, 13566-590 São Carlos-SP Brasil
18rafaelr@gmail.com

Maristela Oliveira dos Santos

Universidade de São Paulo - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Av. Trabalhador São-carlense, 400, 13566-590 São Carlos-SP Brasil
mari@icmc.usp.br

RESUMO

Problemas de dimensionamento de lotes são importantes no planejamento da produção e têm como desafio determinar um plano de produção, que atenda a demanda dos produtos, respeitando os recursos disponíveis e que minimize os custos envolvidos. Nesse trabalho consideramos um problema de dimensionamento de lotes monoestágio com substituição de produto, isto é, sistemas produtivos onde um produto de maior qualidade ou desempenho, pode atender a demanda de um ou mais itens mediante um custo de conversão. Estudamos a reformulação por localização de facilidades proposta por *Lang e Domschke (2010)* com inclusão de horas extras. Como se trata de um problema NP-difícil propomos heurísticas baseadas na formulação matemática: *relax-and-fix* e *fix-and-optimize*. Experimentos computacionais foram realizados baseados nas instâncias de *Trigeiro et. al (1989)* e *Lang e Domschke (2010)*. Resultados e análises são apresentados mostrando a eficiência dos métodos.

PALAVRAS CHAVE. Dimensionamento de lotes, substituição de produto, heurísticas.

Área Principal: Programação Matemática

ABSTRACT

Lot sizing problems are important in the production planning and are challenged to determine a production plan that meets the demand of the product, respecting the available resources and minimizing costs. In this work we consider a lot sizing single-level problem with product substitution, ie, productive systems where a higher quality product or performance can meet the demand of one or more items using a conversion cost. We studied the reformulation by facility location proposed by *Lang and Domschke (2010)*, with inclusion of overtime. As the problem is NP-hard, we propose heuristics based on the mathematical formulation of the problem: *relax-and-fix* and *fix-and-optimize*. Computational tests were performed based on instances *Trigeiro et. al (1989)* and *Lang and Domschke (2010)*. Results and analysis are presented showing the efficiency of the methods.

KEYWORDS. Lot-sizing, product substitution, heuristics.

Main Area: Mathematical Programming

1. Introdução

Problemas de dimensionamento de lotes são importantes no planejamento da produção. Neste tipo de problema se considera um horizonte de planejamento finito subdividido em períodos. O desafio é estabelecer a quantidade a ser produzida de cada produto (ou o tamanho do lote) em cada período, de modo atender a demanda dos itens, respeitando os recursos disponíveis e minimizando os custos envolvidos.

Os problemas de dimensionamento de lotes podem ser divididos em monoestágio e multiestágio. O problema monoestágio se caracteriza principalmente por ter produtos sendo produzidos em um mesmo meio de produção, porém, a produção de um produto é independente de outro. O problema de dimensionamento de lotes multiestágio ocorre quando um produto final possui produtos predecessores, que também devem ser programados para produção. A literatura é rica em trabalhos que tratam ambos os problemas. Uma boa revisão sobre problemas de dimensionamento de lotes pode ser encontrada em *Jans e Degraeve (2007)*.

Neste trabalho consideramos um problema de dimensionamento de lotes monoestágio, porém existem opções de substituição entre os produtos, ou seja, quando um produto P1 puder atender a demanda de um produto P2, dizemos que existe uma opção de substituição entre P1 e P2, e podemos representa-la por meio de um grafo de substituição (Figura 1), isto é, um grafo orientado onde temos um produto para cada vértice e uma aresta orientada indicando a opção de substituição.



Figura 1: Grafo de substituição (fonte *Lang e Domschke, (2010)*).

Na Figura 2, temos uma estrutura de substituição denominada *downward* (para baixo), um tipo de grafo de substituição onde vale a propriedade transitiva na substituição de itens. Os produtos da parte superior da cadeia (com maior qualidade) podem substituir os itens da parte inferior. Esse tipo de estrutura pode surgir em aplicações na indústria eletrônica quando, por exemplo, se um microchip puder substituir componentes mais antigos (*Ng e Lam, (1998)*).

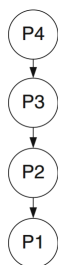


Figura 2: Grafo de substituição *downward* (fonte *Lang e Domschke, (2010)*).

Em situações práticas pode acontecer de um item i ser um substituto para um item j dependendo do uso. Logo, adota-se o conceito de classes de demanda (*Hsu e Bassok (1999)*) para representar restrições de compatibilidade entre itens.

Neste trabalho estudamos o modelo proposto em *Lang e Domschke (2010)* para o problema monoestágio de dimensionamento de lotes com substituição de produto. Como o problema é NP-difícil, segundo *Lang e Domschke (2010)*, investigamos heurísticas baseadas na formulação matemática do problema, tais como *relax-and-fix* (*Mercé e Fontan, (2003)*; *Pochet e Wolsey, (2006)*) e *fix-and-optimize* (*Sahling et al. (2009)*).

O trabalho está organizado em seções. Na Seção 2, apresentamos as características do problema. Na Seção 3, o desenvolvimento das heurísticas propostas. Na Seção 4, os experimentos computacionais realizados são descritos. E por fim, as conclusões e perspectivas na Seção 5.

2. Problema de dimensionamento de lotes com substituição de produto

Para o problema de dimensionamento de lotes abordado existem opções de substituição entre produtos. Definimos como produto alternativo o item de maior qualidade, que pode atender a demanda de outro, porém, isto acarreta um custo. Uma aplicação ocorre, por exemplo, quando um plástico puder substituir uma peça de comprimento menor, porém existe um custo de corte do material (Lang e Shen (2011)). O problema consiste em determinar um plano de produção que atenda a demanda dos produtos, respeitando os recursos disponíveis e que minimize os custos. Os custos considerados são os de preparação das máquinas, substituição, produção dos itens, estocagem e produção em horas extras.

No problema estudado assumimos as seguintes características:

- Problema monoestágio.
- Modelo determinístico, isto é, os valores dos parâmetros são conhecidos.
- Horizonte de planejamento finito com T períodos.
- Existe um estoque inicial para cada produto.
- Um número arbitrário de produtos pode ser produzido em cada período (*big bucket*).
- O modelo admite qualquer estrutura de substituição.
- Os clientes não rejeitam a substituição, ou seja, a quantidade de classes de demanda corresponde à quantidade de produtos.
- A razão de substituição é 1:1, isto é, uma unidade de um item pode ser substituída por exatamente uma unidade do produto alternativo.
- Restrição de capacidade com tempos gastos para a produção e a preparação. As atividades de substituição requerem utilização da capacidade disponível.
- É permitida a produção em horas extras mediante uma alta penalização.

3. Abordagens de solução: Métodos Heurísticos baseados na formulação matemática

O problema de dimensionamento de lotes com substituição de produto é NP-difícil por se tratar de um caso especial do problema estudado em Maes et al. (1991). Como o problema é de difícil resolução, foram propostas heurísticas baseadas na formulação matemática com objetivo de gerar soluções de alta qualidade em tempo computacional aceitável.

3.1. Heurísticas *Relax-and-fix*

A heurística *relax-and-fix* foi desenvolvida por Wolsey (1998) e proposta como método de resolução em Pochet e Wolsey (2006) e Mercé e Fontan (2003).

Considere n partições constituídas de variáveis inteiras do problema inteiro misto. A heurística *relax-and-fix* inicia-se resolvendo uma partição R , enquanto as outras $n-1$ partições têm suas variáveis inteiras relaxadas. Ao término da resolução fixam-se as variáveis inteiras da partição R , e escolhe-se uma nova partição para ser resolvida como inteira, agora com $n-2$ partições com variáveis inteiras relaxadas. O processo encerra quando todas as partições tiverem sido resolvidas como inteiras ou o subproblema inteiro for infactível.

Nesse trabalho foram implementadas duas heurísticas *relax-and-fix* com particionamento por períodos:

- ***Relax-and-fix forward (R&F)*** - Progressivo no tempo iniciando a resolução dos subproblemas no primeiro período do horizonte de planejamento, relaxando as variáveis inteiras para todo período posterior à iteração atual.
- ***Relax-and-fix com sobreposição de períodos (R&S)*** - Essa heurística é semelhante a *relax-and-fix forward*, mas com o diferencial, que os dois períodos sucessores também são resolvidos como inteiros. Porém, nesta abordagem, fixamos apenas as variáveis inteiras de um dos períodos.

3.2. Heurísticas *Fix-and-optimize*

A heurística *exchange* foi proposta em *Pochet e Wolsey (2006)*, posteriormente denominada de *fix-and-optimize* em *Sahling et al. (2009)*. Como a heurística *relax-and-fix*, esta heurística baseia-se na resolução de subproblemas inteiros misto. Ela consiste no seguinte procedimento: Dada uma solução do problema inicia-se um processo iterativo onde a cada iteração, uma partição do conjunto das variáveis inteiras é otimizada, enquanto as outras são mantidas fixadas na solução incumbente. O processo iterativo encerra quando não houver mais melhoria da solução ou o algoritmo atingir um limite de tempo estabelecido.

Nesse trabalho aplicamos quatro heurísticas *fix-and-optimize* como métodos de melhoria para as soluções das heurísticas *relax-and-fix* e da reformulação por localização de facilidades por *Lang e Domschke (2010)*.

Sejam as seguintes estratégias: decomposição por períodos com sequenciamento progressivo no tempo iniciando no primeiro período (heu1); decomposição por produtos com sequenciamento progressivo iniciando no primeiro produto (heu2). As heurísticas implementadas são as seguintes:

- **F&O&RT** - Utiliza como solução inicial a solução inteira da heurística *relax-and-fix forward* e o procedimento de melhoria heu1.
- **F&O&RP** - Utiliza como solução inicial a solução inteira da heurística *relax-and-fix forward*. Ao contrário da combinação anterior, utiliza como procedimento de melhoria a heu2.
- **F&O&RS** - Utiliza como solução inicial a solução inteira da heurística *relax-and-fix com sobreposição de períodos*. Aplicam-se sequencialmente duas heurísticas *fix-and-optimize* com os procedimentos heu1 e heu2, respectivamente.
- **F&O&LF** - Aplicam-se sequencialmente duas heurísticas *fix-and-optimize* com procedimentos heu1 e heu2, respectivamente, sendo a solução inicial obtida pela resolução da reformulação por localização de facilidades por *Lang e Domschke (2010)* durante 5 minutos.

Todas as heurísticas *fix-and-optimize* implementadas consideram duas partições inteiras durante a resolução das iterações.

4. Experimentos Computacionais

Nesta seção apresentamos os resultados dos testes computacionais realizados para a análise do modelo matemático utilizado para o problema e das heurísticas propostas.

4.1. Ambiente de teste

Todos os métodos de solução foram implementados em linguagem C++ utilizando bibliotecas do pacote de otimização IBM ILOG CPLEX 12.4. Os testes computacionais foram realizados em um computador com processador Intel Core(TM)2 Quad CPU 3GHz com memória RAM 4GB sob o sistema operacional Windows 7.

4.2. Geração de dados e Grafos de Substituição

Nesse trabalho utilizamos dados de *Lang e Domschke (2010)* e as instâncias da classe G de *Trigeiro et al. (1989)* considerada difícil na literatura (*Belvaux e Wolsey, (2000)*).

- *Lang e Domschke (2010)*: Custo de horas extras, substituição e produção dos produtos. Estoque inicial e capacidade disponível.
- *Trigeiro et al. (1989)*: Custo de estocagem e preparação das máquinas. Demandas. Tempos de preparação das máquinas e produção dos itens.

Para determinar a capacidade disponível *Trigeiro et al. (1989)* adotam uma política lote por lote, ou seja, para cada período calcula-se a capacidade mínima para o atendimento da demanda. Entretanto, em testes preliminares essa capacidade se mostrou ser muito folgada, logo adotamos o cálculo da capacidade segundo *Lang e Domschke (2010)*: a capacidade disponível tem distribuição normal com $\sigma/\mu = 0,1$ e $\mu = K(\sum_{t=1}^T C_{rt}^{min}/T)$, onde C_{rt}^{min} determina a capacidade mínima para o problema ter uma solução factível e o parâmetro K é denominado fator de capacidade disponível.

A capacidade requerida para produção é constante para todos os produtos e vale 1 (*Trigeiro et al. (1989)*). Assumimos que ela vale o dobro quando a produção for destinada a substituição de um item.

Para os experimentos quatro grafos de substituição foram utilizados. Três deles são ilustrados na Figura 3, sendo o último, um grafo *downward* formado por 12 produtos (grafo D).

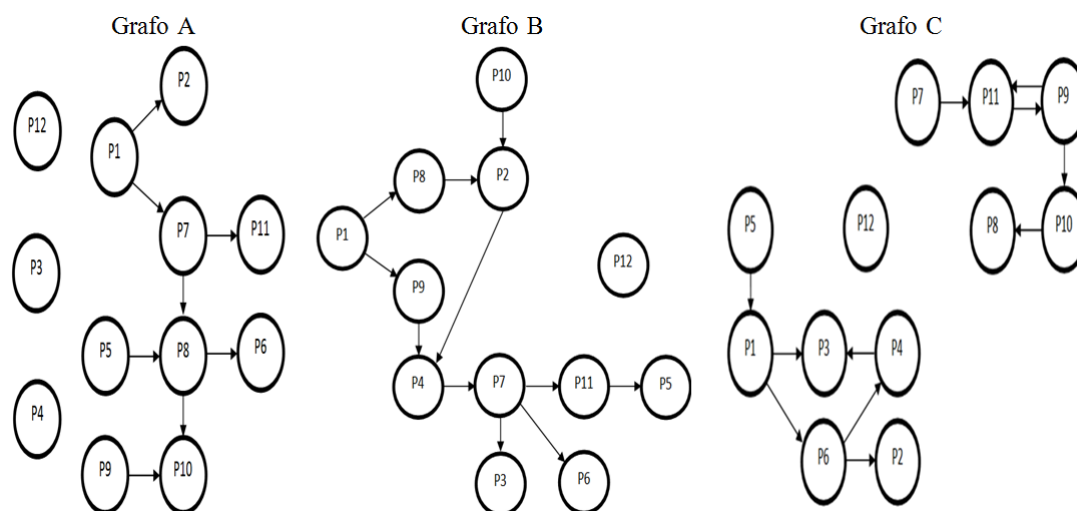


Figura 3: Grafos de substituição

4.3. Descrição dos Experimentos

Nesse trabalho dois experimentos foram realizados considerando cenários distintos. No primeiro experimento o tempo de produção é constante para todos os produtos, ou seja, independe da classe de demanda que será atendida. No segundo experimento assumimos que as tarefas de substituição consomem tempo disponível para a produção.

Nos testes consideramos 1 recurso e variamos o grafo de substituição, a quantidade de períodos e o fator de capacidade disponível: $K = 1,1$ (capacidade folgada), $K = 1,0$ (capacidade normal) e $K = 0,9$ (capacidade apertada). Para cada classe de instância foram utilizados cinco exemplos, gerando um total de 240 exemplares.

Para a análise da eficiência dos métodos adotamos como critérios de parada o tempo de execução de 10 minutos e a otimalidade da solução, $GAP = 10^{-4}$, onde o GAP é definido pela expressão (1), onde $f(x)$ e ML representam o valor da função objetivo e do melhor limitante inferior encontrado pelo CPLEX, respectivamente.

$$GAP = \left(\frac{f(x) - ML}{f(x)} \right) .100\% \tag{1}$$

4.4. Análise dos Resultados

Na Tabela 1 temos o GAP médio das heurísticas e do modelo matemático por localização de facilidades (CPLEX). Onde G , T , K , denotam o grafo de substituição, quantidade de períodos e o fator de capacidade disponível, respectivamente. As instâncias sublinhadas correspondem as quais, as heurísticas obtiveram soluções melhores do que o modelo matemático. Na Tabela 2 temos o tempo médio em segundos de execução das heurísticas e do modelo matemático, para os resultados apresentados na Tabela 1.



Tabela 1: GAP (%) dos métodos de otimização.

G	T	K	EXPERIMENTO 1							EXPERIMENTO 2							
			R&F	F&O&RT	F&O&RP	R&F&S	F&O&RS	F&O&LF	CPLEX	R&F	F&O&RT	F&O&RP	R&F&S	F&O&RS	F&O&LF	CPLEX	
A	15	1,1	0,32	0,21	0,29	0,24	0,22	0,06	0,05	0,42	0,39	0,39	0,36	0,36	0,33	0,28	
		1,0	1,36	1,18	1,27	0,80	0,80	0,78	0,57	1,91	1,69	1,90	2,45	2,45	1,75	1,65	
		0,9	0,87	0,62	0,65	0,44	0,33	0,26	0,04	1,44	1,34	1,44	0,75	0,75	0,60	0,55	
	30	1,1	1,05	<u>0,93</u>	<u>1,02</u>	<u>0,84</u>	<u>0,82</u>	<u>0,82</u>	1,02	1,20	<u>1,08</u>	<u>1,11</u>	<u>0,93</u>	<u>0,93</u>	<u>1,06</u>	1,13	
		1,0	<u>2,33</u>	<u>2,13</u>	<u>2,05</u>	<u>1,86</u>	<u>1,76</u>	<u>2,08</u>	2,33	<u>3,92</u>	<u>3,68</u>	<u>3,80</u>	<u>3,28</u>	<u>3,17</u>	<u>4,27</u>	5,21	
		0,9	<u>1,76</u>	<u>1,66</u>	<u>1,71</u>	<u>1,39</u>	<u>1,32</u>	<u>1,49</u>	1,76	<u>1,07</u>	<u>0,99</u>	<u>1,02</u>	<u>0,74</u>	<u>0,73</u>	<u>0,83</u>	1,16	
	B	15	1,1	0,54	0,39	0,51	0,17	0,17	0,10	0,09	1,02	1,02	1,02	0,77	0,74	0,76	0,61
			1,0	2,69	1,91	2,28	1,81	<u>1,70</u>	<u>1,44</u>	1,79	2,85	2,49	2,69	1,92	1,84	1,80	1,59
			0,9	0,58	0,43	0,47	0,10	0,09	0,05	0,01	1,02	0,90	0,93	0,65	0,58	0,58	0,53
30		1,1	1,26	<u>1,09</u>	1,21	1,13	<u>1,09</u>	<u>1,09</u>	1,09	<u>1,35</u>	<u>1,28</u>	<u>1,33</u>	<u>1,22</u>	<u>1,19</u>	<u>1,36</u>	1,43	
		1,0	<u>3,46</u>	<u>3,19</u>	<u>3,33</u>	<u>2,91</u>	<u>2,80</u>	<u>3,34</u>	3,85	<u>2,33</u>	<u>2,32</u>	<u>2,32</u>	<u>2,24</u>	<u>2,18</u>	<u>2,69</u>	3,03	
		0,9	<u>1,58</u>	<u>1,45</u>	<u>1,53</u>	<u>1,34</u>	<u>1,26</u>	<u>1,44</u>	1,76	<u>0,60</u>	<u>0,60</u>	<u>0,60</u>	<u>0,63</u>	<u>0,63</u>	<u>0,71</u>	0,85	
C		15	1,1	0,42	0,12	0,34	0,17	0,17	0,08	0,05	0,76	0,73	0,76	0,62	0,60	0,38	0,37
			1,0	1,55	1,33	1,35	0,80	0,73	0,84	0,54	2,73	2,41	2,68	1,90	1,88	<u>1,76</u>	1,76
			0,9	0,72	0,47	0,67	0,18	0,18	0,05	0,01	1,22	0,90	1,22	0,86	0,72	<u>0,58</u>	0,58
	30	1,1	0,88	0,83	0,87	0,80	0,79	<u>0,75</u>	0,75	<u>1,10</u>	<u>1,07</u>	<u>1,09</u>	<u>1,05</u>	<u>1,04</u>	<u>1,05</u>	1,20	
		1,0	<u>2,69</u>	<u>2,42</u>	<u>2,60</u>	<u>2,04</u>	<u>2,04</u>	<u>2,54</u>	3,17	<u>3,85</u>	<u>3,78</u>	<u>3,80</u>	<u>3,62</u>	<u>3,61</u>	<u>4,73</u>	5,25	
		0,9	<u>1,81</u>	<u>1,78</u>	<u>1,80</u>	<u>1,61</u>	<u>1,56</u>	<u>1,79</u>	2,36	1,29	1,22	1,11	<u>1,02</u>	<u>1,00</u>	<u>0,99</u>	1,02	
	D	15	1,1	0,29	0,09	0,06	0,08	0,04	<u>0,01</u>	0,02	2,60	2,39	2,54	<u>2,08</u>	<u>2,08</u>	2,25	2,16
			1,0	1,64	0,75	0,91	1,08	0,49	0,68	0,41	2,65	2,53	2,56	<u>1,74</u>	<u>1,66</u>	<u>1,91</u>	1,91
			0,9	<u>0,21</u>	<u>0,68</u>	<u>0,34</u>	<u>0,68</u>	<u>0,36</u>	<u>0,34</u>	0,76	0,80	0,64	0,74	<u>0,48</u>	<u>0,47</u>	<u>0,46</u>	0,48
30		1,1	0,52	0,38	0,44	0,40	0,38	0,37	0,35	<u>1,26</u>	<u>1,21</u>	<u>1,24</u>	--	--	<u>0,97</u>	1,72	
		1,0	4,12	<u>2,52</u>	3,98	--	--	<u>2,56</u>	3,01	<u>1,75</u>	<u>1,72</u>	<u>1,75</u>	--	--	3,22	3,17	
		0,9	<u>0,87</u>	<u>0,71</u>	<u>0,78</u>	<u>0,44</u>	<u>0,44</u>	<u>0,70</u>	1,03	<u>0,75</u>	<u>0,68</u>	<u>0,71</u>	<u>0,68</u>	<u>0,68</u>	<u>0,83</u>	0,95	

Tabela 2: Tempo médio de execução dos métodos de otimização em segundos.

G	T	K	EXPERIMENTO 1							EXPERIMENTO 2							
			R&F	F&O&RT	F&O&RP	R&F&S	F&O&RS	F&O&LF	CPLEX	R&F	F&O&RT	F&O&RP	R&F&S	F&O&RS	F&O&LF	CPLEX	
A	15	1,1	6,42	18,49	17,43	13,20	25,87	381,97	600,00	9,61	23,10	24,38	21,86	42,52	319,81	600,00	
		1,0	10,19	26,42	22,57	21,57	42,62	312,07	600,00	11,56	23,84	32,45	29,11	66,78	320,69	600,00	
		0,9	9,22	24,40	16,88	17,02	37,23	314,96	600,00	11,22	21,36	29,60	23,45	48,48	321,00	600,00	
	30	1,1	71,03	295,11	128,72	169,36	288,65	465,14	600,00	89,77	196,29	162,52	217,80	331,71	600,00	600,00	
		1,0	113,96	231,88	220,52	356,91	505,36	579,98	600,00	124,54	227,43	214,10	255,83	432,45	600,00	600,00	
		0,9	124,52	213,45	184,15	230,79	330,20	439,93	600,00	89,09	176,53	146,15	159,61	253,77	600,00	600,00	
	B	15	1,1	11,04	32,01	24,84	22,22	38,34	317,60	600,00	15,27	29,38	28,10	53,35	83,65	336,32	600,00
			1,0	18,89	40,31	34,91	43,49	72,57	322,21	600,00	15,36	35,82	36,18	42,98	92,10	340,69	600,00
			0,9	20,41	32,90	31,20	40,76	62,38	322,21	600,00	7,57	26,46	31,70	15,01	31,98	327,05	600,00
30		1,1	91,86	231,63	159,52	233,04	385,68	584,46	600,00	114,26	212,16	218,76	291,46	479,14	600,00	600,00	
		1,0	167,68	289,09	251,73	431,16	577,08	590,95	600,00	133,80	195,19	200,77	267,97	401,10	600,00	600,00	
		0,9	147,56	252,58	194,37	262,63	393,48	417,06	600,00	78,62	267,72	139,21	159,51	267,57	600,00	600,00	
C		15	1,1	9,68	32,37	24,21	20,32	35,02	459,36	600,00	11,68	34,52	27,46	29,51	58,13	326,53	600,00
			1,0	15,24	32,11	32,35	28,63	48,86	317,51	600,00	14,69	47,17	35,44	29,91	61,74	331,91	600,00
			0,9	11,79	19,96	21,25	23,32	32,40	312,81	600,00	14,14	39,49	32,90	28,10	56,55	322,18	600,00
	30	1,1	77,70	172,09	137,73	201,42	339,25	498,81	600,00	102,76	203,66	177,41	246,20	434,26	600,00	600,00	
		1,0	171,64	318,51	265,25	488,74	571,97	578,59	600,00	147,22	239,55	228,68	358,06	515,96	600,00	600,00	
		0,9	177,81	246,58	211,99	325,02	423,92	486,55	600,00	110,25	210,39	221,28	202,23	309,05	600,00	600,00	
	D	15	1,1	16,40	40,92	31,67	27,42	54,54	316,97	600,00	36,75	87,05	76,60	87,57	149,31	390,64	600,00
			1,0	39,48	81,88	71,66	87,86	137,01	501,20	600,00	43,85	88,45	82,56	83,89	156,00	378,55	600,00
			0,9	47,52	91,81	81,37	137,97	183,66	372,69	600,00	26,10	82,16	59,54	44,52	87,21	358,38	600,00
30		1,1	161,03	348,97	277,10	242,29	450,03	539,76	600,00	523,87	600,00	600,00	600,00	600,00	600,00	600,00	
		1,0	373,26	590,63	524,94	600,00	600,00	600,00	600,00	525,33	600,00	600,00	600,00	600,00	600,00	600,00	
		0,9	406,18	540,28	427,06	570,13	600,00	564,15	600,00	291,05	490,29	439,06	432,16	600,00	600,00	600,00	

Pelos dados da Tabela 1 podemos concluir que, em geral para as instâncias com 15 períodos o modelo matemático obteve o melhor desempenho dentre os métodos de otimização testados. Para as instâncias com 30 períodos nota-se uma dificuldade de resolução pelos métodos tanto em questão de tempo quanto em qualidade da solução. A resolução dos testes pelo modelo matemático no segundo experimento obteve maiores valores de GAP para 70,83% das instâncias.

A heurística *relax-and-fix*, considerando a sobreposição de períodos se mostrou mais eficiente que a heurística *relax-and-fix forward*, porém, ela não obteve solução inteira em 10 minutos para as classes de instâncias marcadas por “--” na Tabela 1. Em relação as heurísticas de melhoria a decomposição por períodos gerou maior diminuição de GAP (F&O&RT), embora a heurística F&O&RP tenha um número maior de variáveis inteiras em suas partições. A heurística F&O&LF não teve um bom desempenho, atingindo rapidamente um mínimo local na maioria dos testes.

Em particular, para as instâncias com 30 períodos e capacidade normal, a heurística F&O&RS obteve os melhores resultados. Na Tabela 3 apresentamos uma análise da heurística F&O&RS e do modelo matemático na resolução de uma instância com 30 períodos durante 1 hora. Onde F(x) representa o valor da função objetivo; %R a porcentagem de redução do custo da solução do modelo matemático obtida pela heurística; %HE a porcentagem da capacidade utilizada em horas extras; %SUB a porcentagem da demanda atendida por produtos alternativos.

Tabela 3: Análise da solução da heurística F&O&RS e do modelo matemático (CPLEX).

G	K	Métodos	EXPERIMENTO 1						EXPERIMENTO 2					
			F(x)	%R	Tempo (min)	GAP	%HE	%SUB	F(x)	%R	Tempo (min)	GAP	%HE	%SUB
A	1,1	CPLEX	894995,53	0,01	60,00	0,14	0,00	20,30	913451,51	0,09	60,00	0,37	0,00	3,93
		F&O&RS	894930,43		4,03	0,13	0,00	19,99	912587,68		5,93	0,28	0,00	3,12
	1,0	CPLEX	933382,84	0,26	60,00	0,79	0,00	27,85	993104,94	0,43	60,00	1,76	0,70	4,37
		F&O&RS	930939,48		9,79	0,53	0,00	26,22	988854,65		7,89	1,34	0,56	2,98
	0,9	CPLEX	1220651,00	0,02	60,00	0,46	7,45	34,69	1314551,38	--	60,00	0,33	9,36	4,03
		F&O&RS	1220346,36		5,10	0,43	7,40	32,47	1316636,79		4,62	0,49	9,38	1,60
B	1,1	CPLEX	891141,35	--	60,00	0,21	0,00	25,05	918818,91	0,10	60,00	0,38	0,00	10,94
		F&O&RS	891526,48		5,40	0,26	0,00	27,66	917875,61		6,13	0,29	0,00	8,78
	1,0	CPLEX	930755,78	--	60,00	0,62	0,00	32,43	1042061,80	--	60,00	0,88	2,21	5,36
		F&O&RS	933130,05		9,71	0,88	0,00	34,93	1051798,26		6,62	0,94	2,29	5,06
	0,9	CPLEX	1244755,34	--	60,00	0,39	8,46	43,18	1378346,85	--	60,00	0,29	11,25	4,37
		F&O&RS	1245801,39		6,62	0,47	8,53	43,52	1379462,10		4,46	0,37	11,21	4,47
C	1,1	CPLEX	907740,71	0,03	60,00	0,20	0,00	16,43	914769,41	0,07	60,00	0,37	0,00	2,14
		F&O&RS	907490,41		2,77	0,18	0,00	16,75	914112,84		4,74	0,30	0,00	2,93
	1,0	CPLEX	944377,90	0,08	60,00	0,63	0,00	21,76	986353,76	0,14	60,00	1,89	0,49	4,81
		F&O&RS	943627,63		11,77	0,55	0,00	21,42	985020,82		7,83	1,76	0,47	5,18
	0,9	CPLEX	1225795,02	0,10	60,00	0,76	6,83	38,94	1310930,69	0,08	60,00	0,66	9,17	3,53
		F&O&RS	1224564,04		15,97	0,66	6,70	35,54	1309859,88		6,74	0,58	8,98	3,37
D	1,1	CPLEX	824291,44	--	60,00	0,10	0,00	68,58	921483,72	0,16	60,00	0,53	0,00	16,03
		F&O&RS	825211,30		11,29	0,21	0,00	68,80	920018,19		16,10	0,38	0,00	16,15
	1,0	CPLEX	861175,04	0,01	60,00	0,23	0,00	64,47	1117109,66	0,15	60,00	0,90	4,04	9,32
		F&O&RS	861098,78		20,18	0,22	0,00	65,82	1115483,14		17,71	0,76	3,98	7,86
	0,9	CPLEX	1135906,17	0,00	60,00	0,34	8,26	80,86	1440694,78	0,11	60,00	0,43	12,94	7,90
		F&O&RS	1135906,17		22,39	0,34	8,26	84,08	1439083,67		8,49	0,32	12,87	8,11

A questão sobre a aplicação de heurísticas em problemas de otimização consiste na troca da garantia de otimalidade por uma solução boa em tempo computacional aceitável. Pelos resultados da Tabela 3, podemos ver que a heurística F&O&RS obteve soluções próximas do modelo matemático em tempo significativamente inferior e um GAP melhor na maioria dos casos.

A capacidade disponível influencia tanto na resolução do problema (capacidade folgada e apertada tendem a serem mais fáceis do que a capacidade normal) quanto no uso da substituição (%SUB). No primeiro experimento a diminuição da capacidade gera um aumento da substituição, isso pode ser justificado por uma política de maior aproveitamento das máquinas que já estão pre-

paradas, desse modo, itens que possuem produtos alternativos e não substituem, podem não ser produzidos devido à limitação dos recursos e o alto custo de horas extras. No segundo experimento ocorre o contrário, a diminuição da capacidade tende a gerar a diminuição da substituição, pois as tarefas de conversão passam a consumir recursos.

5. Conclusões e perspectivas futuras

Nesse trabalho estudamos um modelo matemático para o problema de dimensionamento de lotes com substituição de produto. Métodos heurísticos foram propostos e os resultados obtidos foram competitivos tanto em questão de tempo quanto em qualidade de solução, principalmente para as instâncias com 30 períodos.

A principal contribuição desse trabalho foi o estudo do cenário em que as tarefas de substituição consomem recursos, isso teve como motivação o caso em que, uma indústria realiza cortes para os produtos alternativos atenderem outras classes de demanda, essas operações consomem tempos de fabricação. Para a maioria das instâncias, esse problema se mostrou ser mais difícil que o problema original tratado em *Lang e Domschke (2010)*.

Futuramente outras decomposições deverão ser testadas e mesmo algoritmos híbridos podem ser empregados. Também investigaremos o desempenho das heurísticas para o problema de dimensionamento de lotes com múltiplos recursos.

Agradecimentos: Esse trabalho teve apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

6. Referências

- Belvaux G, Wolsey LA** (2000). A Specialized Branch-and-Cut System for Lot-Sizing Problems. *Management Science* 46(5):724-738.
- Hsu A, Bassok Y** (1999). Random yield and random demand in a production system with downward substitution. *Oper Res* 47(2):277-290
- Jans, R. e Degraeve, Z.** (2007), Meta-heuristics for dynamics lot sizing: A review and comparison of solution approaches, *European Journal of Operational Research*, 177, 1855-1875
- Lang, J.C., Domschke, W.,** (2010). Efficient reformulations for dynamic lot-sizing problems with product substitution. *OR Spectrum* 32 (2), 263-291.
- Lang, J.C., Shen, Z. Max.,** (2011). Fix-and-optimize heuristics for capacitated lotsizing with sequence-dependent setups and substitutions. *European Journal of Operational Research* 214:595-605.
- Maes, J., McClain, J. O. e Van Wassenhove, L. N.** (1991). Multilevel Capacitated LotSizing Complexity and LP based Heuristics. *European Journal of Operational Research*, 53: 131-148.
- Mercé, C. e Fontan G.** (2003). MIP-basead heuristics for capacitated lotsizing problems. *Int. J. Production Economics*, 85: 97-111.
- Ng KYK, Lam MN** (1998). Standardisation of substitutable electrical items. *J Oper Res Soc* 49(9):992-997
- Pochet Y., Wolsey L.** (2006). *Production Planning by Mixed Integer Programming*, Springer, New York.
- Sahling, F., Buschkuhl, L., Tempelmeier, H. e Helber, S.** (2009). Solving a multilevel capacitated lot sizing problem with multi-period setup carry-over via fix-and-optimize heuristic. *Computers & Operations Research*, 36: 2546-2553.
- Trigeiro, W. W., Thomas, L. J. e McClain, J. O.** (1989). Capacitated Lot Sizing With Setup Times, *Management Science*, 35(3), 353-366.
- Wolsey, L.** (1998). *Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Integer Programming*, Wiley.