

## **NOVO MODELO DE DISPERSÃO PARA O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE RÓTULOS CARTOGRÁFICOS**

**Eliseu Junio Araújo**

Universidade Federal de São Paulo – UNIFESP, Instituto de Ciência e Tecnologia  
Rua Talin, 330, CEP 12231-280, São José dos Campos, SP, Brasil  
araujo.eliseu@unifesp.br

**Antônio Augusto Chaves**

Universidade Federal de São Paulo – UNIFESP, Instituto de Ciência e Tecnologia  
Rua Talin, 330, CEP 12231-280, São José dos Campos, SP, Brasil  
antonio.chaves@unifesp.br

**Luiz Antônio Nogueira Lorena**

Instituto Nacional de Pesquisas Especiais – INPE, Laboratório Associado de Computação e Matemática  
Av. dos Astronautas, 1758, CEP 12227-010, São José dos Campos, Brasil  
lorena@lac.inpe.br

### **RESUMO**

O Problema de localização de rótulos cartográficos se refere ao posicionamento automático de rótulos em um mapa, diagrama ou objeto gráfico. Neste trabalho é apresentada uma nova formulação matemática para o problema com o intuito de encontrar soluções que possam trazer maior legibilidade ao mapa. A formulação tem o objetivo de maximizar o número de rótulos sem conflitos e também maximizar a distância entre rótulos em conflitos. Logo, para comprovar sua eficiência, são realizados testes com instâncias encontradas na literatura que são amplamente usadas em outros trabalhos relacionados a este problema. Os resultados apresentados mostram que a formulação proposta atingiu melhores valores em medidas comparativas do que outros modelos da literatura.

**PALAVRAS-CHAVE.** Problema de Localização, Rótulos Cartográficos, Formulação Matemática.

**Área principal:** Otimização combinatória

### **ABSTRACT**

The point-feature cartographic label placement problem refers to the automatic positioning of labels on a map, diagram or graphic object. This paper presents a new mathematical formulation of the problem in order to find solutions that can bring greater clarity to the map. The formulation is designed to maximize the number of labels without conflict and also maximize the distance between labels in conflict. Therefore, to prove its efficiency, tests are performed with instances in the literature which are widely used in other papers dealing with this problem. The results show that the proposed formulation reached the best values in comparative measures than other models in the literature.

**KEYWORDS.** Placement Problem, Cartographic labels, Mathematical formulation

**Main area:** Combinatorial optimization



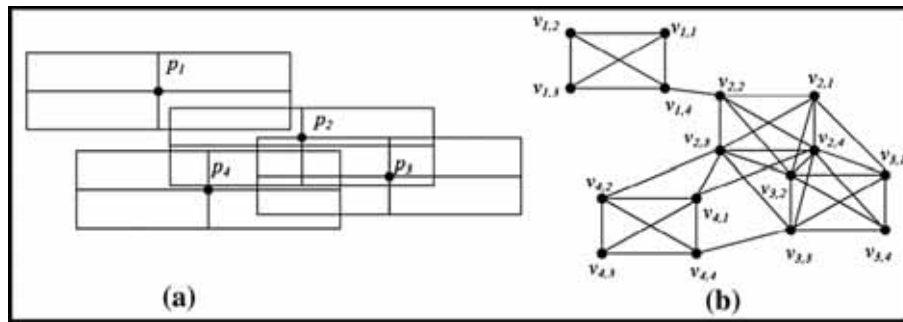


Figura 3 - Grafo de conflitos: (a) Exemplo com 4 pontos e (b) grafo de conflitos (Gomes, Ribeiro e Lorena, 2013)

Existem três abordagens principais para o PFCLP na literatura: *Maximum Independent Vertex Set Problem* (MIVSP), *Maximum Number of Conflict Free Labels Problem* (MNCFLP) e *Minimum Number of Conflicts Problem* (MNCP) (Ribeiro e Lorena, 2006). O MIVSP busca rotular o maior número de pontos que evitam sobreposições, e uma vez que o problema real é tão complexo, alguns pontos podem não ser rotulados. No MNCFLP todos os pontos devem ser rotulados, maximizando o número de rótulos livres, mas não leva em consideração a legibilidade do mapa. O MNCP também considera que todos os pontos devem ser rotulados e que reduzir o número de conflitos provê uma solução melhor do ponto de vista da legibilidade.

A Figura 4 mostra a diferença entre MNCFLP e MNCP. A Figura 4b e 4c mostram duas soluções para a instância da Figura 4a. Uma vez que o MNCFLP leva em conta o número de rótulos livres, ambas as soluções são viáveis e equivalentes para esta abordagem. Em outra vertente, se for considerado que este problema é um MNCP, a solução da Figura 4b é pior do que a da Figura 4c pois apresenta um maior número de arestas no grafo de conflitos, conduzindo para uma solução de menor legibilidade.

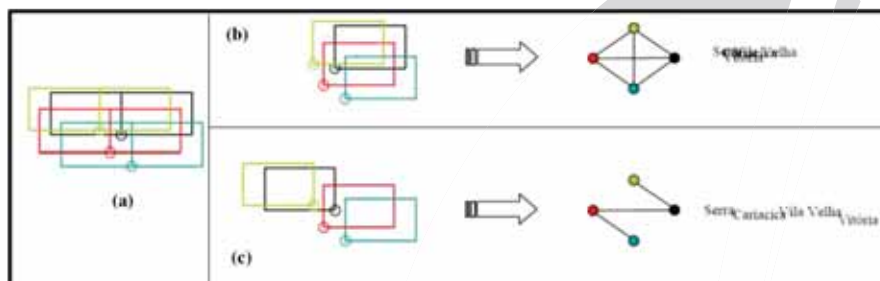


Figura 4 - Comparação entre MNCFLP e MNCP (Ribeiro, 2007)

As técnicas de solução para MNCFLP e MNCP frequentemente tendem a resolver o PFCLP atuando diretamente sobre a estrutura do problema, ou seja, pontuando cada rótulo para evitar conflitos, considerando as possíveis sobreposições. Inspirado nessas duas abordagens, procurando rotular todos os rótulos, mas priorizando também a legibilidade do mapa, este trabalho apresenta uma nova abordagem para o problema de localização de rótulos que objetiva uma melhor dispersão dos mesmos, o que também contribui para evitar sobreposições. O trabalho propõe um novo modelo matemático para maximizar a distância entre rótulos que inevitavelmente devem entrar em conflito, assim como maximizar o número de rótulos sem conflito. Testes computacionais são realizados com instâncias disponíveis na literatura para avaliar a eficiência deste modelo.

Este trabalho é organizado como se segue. Uma revisão da literatura é apresentada na seção 2. Os modelos disponíveis na literatura e que serão alvos de comparação nos testes computacionais são apresentados na seção 3. A seção 4 apresenta o novo modelo proposto. A seção 5 explana os resultados computacionais e a seção 6 as considerações finais.

## 2. Revisão bibliográfica para o PFCLP

Há diversos trabalhos na literatura que abordam as três principais abordagens para o PFCLP. Sobre a abordagem com MIVSP, Zoraster (1990) apresentou uma formulação de programação linear, inteira e binária e propôs restrições com posições candidatas fictícias e realizando penalizações de alto custo na função objetivo. Strijk *et al.* (2000) propuseram formulações matemáticas usando restrições de corte com desigualdades para todas as cliques máximas (subgrafos completos) no grafo de conflitos. Para as instâncias, eles aplicaram diversas heurísticas: *Simulated Annealing*, *Diversified Neighborhood Search*, *k-opt* e Busca Tabu. Agarwal *et al.* (1998) propuseram algoritmos de aproximação rotulando o máximo número de pontos através da computação do conjunto de rótulos que não possuem interseção entre si. Verweij e Aardal (1999) apresentaram um algoritmo *branch-and-cut* e resultados para 950 instâncias (3800 vértices no grafo de conflitos). Os autores concluem que é possível melhorar o algoritmo com uma técnica recursiva, e apresentam uma variação da técnica que é baseada em decomposição de caminhos. Ribeiro *et al.* (2011) apresentaram uma decomposição Lagrangeana para o problema e encontraram a solução ótima para quase todas as instâncias testadas da literatura. Os autores sugeriram que o método é uma boa alternativa para outros problemas modelados como MIVSP.

Em relação a abordagem com MNCFLP, Christensen *et al.* (1995) propôs dois algoritmos baseados em uma forma discreta de gradiente de descida combinada a técnica de *Simulated Annealing*. Yamamoto *et al.* (2002) propuseram um algoritmo de Busca Tabu que alcançou bons resultados em instâncias reais de teste. Um algoritmo exato e um Algoritmo Genético Construtivo foram desenvolvidos por Yamamoto e Lorena (2005). O algoritmo exato não pôde alcançar bons resultados para instâncias com mais de 25 pontos, enquanto o Algoritmo Genético obteve bons resultados para instâncias de até 1000 pontos. Alvim e Tailard (2009) usaram a Busca Tabu proposta por Yamamoto *et al.* (2002) para testar a metaheurística POPMUSIC sobre instâncias grandes. A POPMUSIC inicialmente constrói subproblemas para uma solução do problema principal. Estes subproblemas são resolvidos e montados para fazer uma nova solução e o método é repetido para obter melhores soluções até um dado critério de parada ser alcançado. Ribeiro e Lorena (2006) propuseram o primeiro modelo matemático para MNCFLP e um método de decomposição Lagrangeana para resolver o problema sobre instâncias de até 1000 pontos. Os resultados apresentaram soluções ótimas para várias instâncias apresentadas na literatura.

O MNCP foi introduzido por Ribeiro e Lorena (2006) como uma nova abordagem para melhorar a legibilidade quando todos os pontos precisam ser rotulados e sobreposições serem evitadas. Eles apresentaram uma formulação matemática e algumas heurísticas de relaxações lagrangeanas. Cravo *et al.* (2008) propuseram um algoritmo GRASP e obtiveram melhores soluções do que outras técnicas testadas na literatura. Ribeiro e Lorena (2008) apresentaram duas formulações matemáticas para o MNCP e propuseram uma relaxação Lagrangeana com agrupamentos que obtiveram resultados melhores do que outras técnicas na literatura. A principal diferença entre as formulações é como o grafo de conflitos é construído: uma formulação é baseada somente em posições candidatas enquanto a outra é baseada sobre posições candidatas e pontos.

## 3. Modelos de dispersão para o PFCLP

Nesta seção são apresentados três modelos de dispersão para o PFCLP que são base do novo modelo proposto, apresentado na seção 4, e são alvos de comparação nos testes computacionais.

Considere nos modelos de dispersão os seguintes parâmetros e variáveis:

- $N$ : conjunto de pontos para serem rotulados;
- $i$ : ponto para ser rotulado, tal que  $i \in N$ ;
- $P_i$ : conjunto de posições candidatas de um ponto  $i$ ;
- $j$ : posição candidata, tal que  $j \in P_i$ ;

- $x_{i,j}$ : variável binária concernente a decisão de escolher ou não um rótulo, sendo que  $x_{i,j} = 1$  indica a escolha de uma posição candidata  $j$  para o ponto rotulado  $i$ .
- $a_{i,j}$ : custo referente as preferências cartográficas definidas por Christensen *et al.* (1995);
- $(i, j)$ : par de índices representante de um ponto  $i$  e rótulo  $j$ ;
- $S_{i,j}$ : conjunto de pares de índices que possuem conflitos com o par  $(i, j)$ ;
- $(k, t)$ : par de índices pertencente ao conjunto  $S_{i,j}$  com  $k \in N, k > i$  e  $t \in P_k$ ;
- $d_{i,j,k,t}$ : distância entre os rótulos  $(i, j)$  e  $(k, t)$ .

### 3.1 Formulação matemática para o PFCLP baseada em posições candidatas

O modelo proposto por Ribeiro e Lorena (2008), chamado de Formulação Matemática Baseada em Posições Candidatas (MFBCP, do Inglês *Mathematical Formulation Based on Candidate Positions*) é formulado como se segue.

$$\text{Min } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{P_i} (a_{i,j} \cdot x_{ij} - \sum_{(k,t) \in S_{i,j}} y_{i,j,k,t}) \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{P_i} x_{i,j} = 1 \quad \forall i = 1 \dots N \quad (2)$$

$$x_{i,j} + x_{k,t} - y_{i,j,k,t} \leq 1 \quad \forall i = 1 \dots N, \quad (3)$$

$$\forall j = 1 \dots P_i,$$

$$(k, t) \in S_{i,j}$$

$$x_{i,j}, x_{k,t}, y_{i,j,k,t} \in \{0,1\} \quad \forall i = 1 \dots N, \forall j = 1 \dots P_i, (k, t) \in S_{i,j} \quad (4)$$

A função objetivo (1) realiza o somatório das posições candidatas escolhidas e os respectivos custos dessas preferências cartográficas. As restrições (2) asseguram que somente uma posição candidata será escolhida para cada ponto rotulado. As restrições (3) asseguram que se posições candidatas em potencial conflito são escolhidas, a função objetivo (1) será penalizada assimilando o valor 1 para o conflito correspondente definido por  $y_{i,j,k,t}$ , onde  $i \in N, j \in P_i, k \in N$  e  $t \in P_k$ . As restrições (4) indicam o domínio das variáveis.

Considerando que as instâncias de PFCLP podem gerar grafos de conflito com um grande número de arestas e algumas informações redundantes Wagner *et al.* (2001) apresentaram um método para redução de problemas sem alterar o conjunto de soluções ótimas. Este método consiste em três regras:

- a) Se o ponto  $i \in N$  tem uma posição candidata  $j \in P_i$  sem qualquer conflito possível, adicione  $j$  como parte da solução e elimine as outras posições candidatas de  $i$ ;
- b) Se o ponto  $i \in N$  tem uma posição candidata  $j_1 \in P_i$  que tem somente um conflito com outra posição candidata  $t_1 \in P_k$ , e o ponto  $k$  tem uma posição candidata  $t_2 \in P_k$ :  $t_2 \neq t_1$  que é sobreposta somente por uma posição candidata  $j_2 \in P_i$ :  $j_2 \neq j_1$ , então adicione  $j_1$  e  $t_2$  como parte da solução e elimine todas as outras posições candidatas de  $i$  e  $j$ ;
- c) Se o ponto  $i \in N$  tem somente uma posição candidata  $j \in P_i$  remanescente e as posições candidatas sobrepostas  $j$  constituem uma clique no grafo de conflitos, adicione  $j$  como parte da solução e elimine todas as posições candidatas da clique.

Estas regras podem ser reaplicadas sempre que uma posição candidata é adicionada como parte da solução.



### 3.2 Primeiro modelo de dispersão para o PFCLP

O PFCLP requer que os rótulos sejam espacialmente distribuídos, sobreposições sejam evitadas e a melhor legibilidade do mapa seja obtida. Para este propósito, as distâncias entre posições candidatas de diferentes pontos são consideradas no grafo de conflitos, como mostra a Figura 5. Nesta figura apresenta-se um conjunto de pontos e o grafo de conflito correspondente, com o vértice  $v_{ij}$  representando a posição candidata  $j$  do ponto  $i$ . Os pesos sobre as arestas são as distâncias  $d_{i,j,k,t}$  entre posições candidatas em conflito  $v_{ij}$  e  $v_{kt}$ .

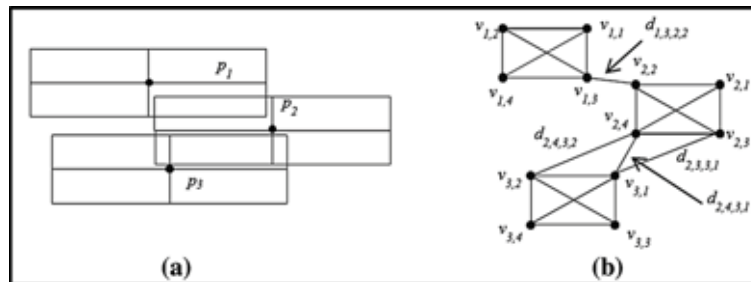


Figura 5 - Distâncias no grafo de conflito (Gomes et al (2013))

Uma medida de dispersão é necessária para determinar quão dispersa está uma solução em relação a uma outra. Para este propósito usa-se a mínima distância entre rótulos posicionados  $v_{ij}$  e  $v_{kt}$  em uma solução do PFCLP. Gomes *et al.* (2013) propõe dois modelos de dispersão com o objetivo de maximizar esta medida.

O modelo de dispersão 1 - MD1 (Gomes *et al.*, 2013) considera o problema estruturado em um grafo ponderado de conflitos como mostrado na Figura 5. Para cada posição candidata é necessário decidir se um rótulo será colocado ou não. Tal decisão é representada pela variável binária  $x_{i,j}$ . O modelo MD1 é formulado como se segue.

$$\text{Max } z \quad (5)$$

$$\text{Sujeito a: } (2), (4),$$

$$z - M(2 - x_{i,j} - x_{k,t}) \leq d_{i,j,k,t} \quad \forall i = 1 \dots N, \quad (6)$$

$$\forall j = 1 \dots P_i,$$

$$(k, t) \in S_{i,j}$$

$$z \geq 0 \quad (7)$$

A função objetivo (5) maximiza a mínima distância Euclidiana entre rótulos alocados ( $z$ ). As restrições (6) usam um valor  $M$  grande como uma recompensa para evitar sobreposições e dispersar da melhor forma os rótulos. Essa restrição limita o valor de  $z$  no máximo a  $2M + \min(d_{i,j,k,t})$ , sendo  $\min(d_{i,j,k,t})$  a distância mínima entre rótulos em potencial conflito para uma dada instância de PFCLP. Quando não for possível evitar sobreposições é desejável priorizar localizações de conflitos com o maior valor de  $d_{i,j,k,t}$ , dispersando-os e permitindo uma melhor legibilidade destes rótulos. A restrição (7) indica o domínio da variável  $z$ .

### 3.3 Segundo modelo de dispersão para o PFCLP

O modelo de dispersão 2 - MD2 (Gomes *et al.*, 2013) é formulado como se segue.

$$\text{Max } z$$

$$\text{Sujeito a: } (2), (4), (7)$$

$$z \leq d_{i,j,k,t} (2 - x_{i,j} - x_{k,t}) \quad \forall i = 1 \dots N, \quad (8)$$

$$\forall j = 1 \dots P_i,$$

$$(k, t) \in S_{i,j}$$

No modelo de dispersão MD-2 as distâncias entre rótulos em conflito são usadas como recompensa para alocar os rótulos mais dispersos. Como em MD1, a função objetivo maximiza a distância mínima  $z$  entre os rótulos posicionados e são utilizadas restrições na forma de equações para garantir que um rótulo será alocado para cada ponto. As restrições 8 previnem as sobreposições. Ao invés de utilizar um valor fixo para  $M$ , é usada a distância  $d_{i,j,k,t}$  como recompensa para evitar conflitos. Enquanto maximiza o valor de  $z$ , é vantajoso atribuir zero a  $x_{ij}$  e  $x_{kt}$  tal que  $z$  possa aumentar para  $2d_{i,j,k,t}$ , evitando possíveis conflitos. Essa restrição limita o valor de  $z$  no máximo a  $2\min(d_{i,j,k,t})$  e implica em uma solução com variáveis sem conflito.

#### 4. Novo modelo de dispersão para o PFCLP

Neste trabalho propõe-se uma nova formulação para o PFCLP baseada em modelos de dispersão. O novo modelo, chamado MD3, é formulado como se segue.

$$\text{Max } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{P_i} (a_{i,j} \cdot x_{i,j} - w_i) \quad (9)$$

Sujeito a: (2), (4)

$$\sum_{(k,t) \in S_{ij}} (1/(1 + d_{i,j,k,t})) (x_{i,j} + x_{k,t} - 1) \leq w_i \quad \forall i = 1 \dots N, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \forall j = 1 \dots P_i, \\ & (k, t) \in S_{i,j} \end{aligned} \quad (11)$$

$$w_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots N$$

A função objetivo (9) é similar a equação (1), exceto pela variável  $w_i$ . Essa variável faz parte das restrições (10) e tem o objetivo de contribuir para que caso aconteçam conflitos inevitáveis, o conflito de maior distância entre rótulos seja escolhido para que haja maior dispersão. Como  $w_i$  também é calculada na função objetivo com valor negativo, logo é priorizado que ela tenha o menor valor possível para que a função objetivo possa alcançar o maior valor.

Nas restrições (10) nota-se que o valor  $(1/(1 + d_{i,j,k,t}))$  somente será considerado no somatório se existir conflito entre os rótulos  $(i, j)$  e  $(k, t)$ . Como busca-se o menor valor possível para  $w_i$ , as maiores distâncias entre conflitos inevitáveis acabam por ganhar prioridade. As restrições (11) indicam o domínio das variáveis  $w_i$ .

A Figura 6 mostra um exemplo da aplicação do modelo MD3, em que são apresentados 5 pontos que precisam ser rotulados. Inevitavelmente, o ponto 5 sofrerá conflito com um dos rótulos dos outros pontos. Logo, é escolhido o rótulo que possui maior distância para esse conflito, visando comprometer o mínimo possível o valor de função objetivo.

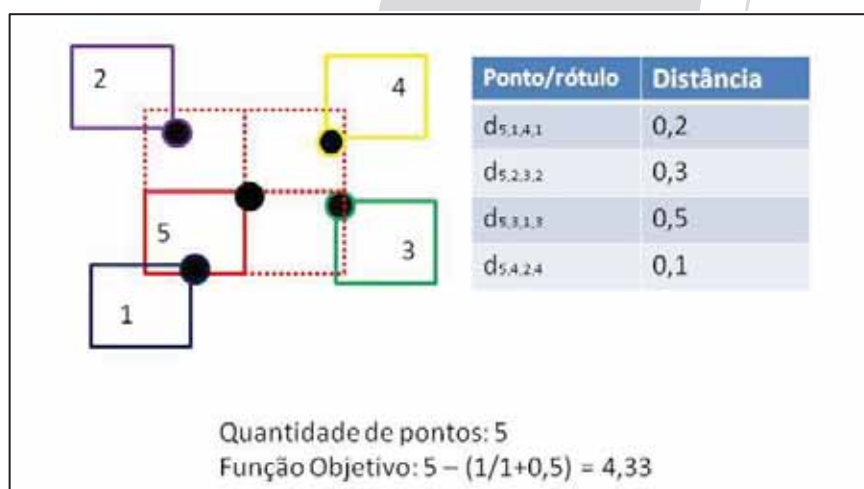


Figura 6 - Exemplo de aplicação do Modelo MD3

## 5. Experimentos computacionais

Esta seção apresenta os resultados dos testes computacionais dos modelos MD1, MD2 e MFBCP apresentados em Gomes *et al.* (2013) e do novo modelo MD3 utilizando o *solver* CPLEX 12.1 (IBM, 2009). Nos testes foram utilizados conjuntos de 505 e 5056 pontos, considerando quatro posições candidatas para cada ponto, de acordo com a uniformização proposta por Christensen *et al.* (1995). Os dados usados foram obtidos de um conjunto de pontos correspondentes a cidades do mapa da Suíça encontrada em <http://mistic.heigvd.ch/taillard/problemes.dir/problemes.html>. Para cada conjunto de pontos há disponíveis 12 instâncias com diferentes alturas e larguras dos rótulos.

Os testes computacionais para o modelo MD3 foram executados sobre um computador com processador AMD Dual Core E-300 APU e 2GB de memória RAM.

As Tabelas 1 e 2 mostram a altura (H, em centímetros), a largura (W, em centímetros) e o número de conflitos após aplicar o método de redução de Wagner *et al.* (2001) para cada instância do conjunto de 505 e 5056 pontos, respectivamente. Nestas tabelas também comparamos o número de restrições e variáveis dos modelos MFBCP, MD1, MD2 e MD3.

Tabela 1 – Comparação do número de restrições e variáveis (instâncias de 505 pontos)

| Instancia | H | W  | Número de conflitos | Número de restrições |      |          | Número de variáveis |      |  |
|-----------|---|----|---------------------|----------------------|------|----------|---------------------|------|--|
|           |   |    |                     | MD1, MD2, MFBCP      | MD3  | MD1, MD2 | MFBCP               | MD3  |  |
| 1         | 2 | 24 | 1115                | 1620                 | 2133 | 1073     | 2187                | 2834 |  |
| 2         | 2 | 32 | 1667                | 2172                 | 2225 | 1232     | 2898                | 2880 |  |
| 3         | 3 | 16 | 1702                | 2207                 | 2307 | 1220     | 2921                | 2921 |  |
| 4         | 2 | 42 | 2151                | 2656                 | 2282 | 1325     | 3475                | 2908 |  |
| 5         | 2 | 48 | 2371                | 2876                 | 2313 | 1364     | 3734                | 2924 |  |
| 6         | 3 | 24 | 2955                | 3460                 | 2486 | 1493     | 4447                | 3010 |  |
| 7         | 4 | 16 | 3224                | 3729                 | 2497 | 1496     | 4719                | 3016 |  |
| 8         | 3 | 28 | 3439                | 3944                 | 2533 | 1541     | 4979                | 3034 |  |
| 9         | 4 | 18 | 3756                | 4261                 | 2548 | 1574     | 5329                | 3041 |  |
| 10        | 3 | 32 | 3995                | 4500                 | 2573 | 1610     | 5604                | 3054 |  |
| 11        | 4 | 21 | 4490                | 4995                 | 2607 | 1655     | 6144                | 3071 |  |
| 12        | 4 | 24 | 5039                | 5540                 | 2645 | 1691     | 6725                | 3090 |  |

Tabela 2 – Comparação do número de restrições e variáveis (instâncias de 5056 pontos)

| Instancia | H | W  | Número de conflitos | Número de restrições |       |       | Número de variáveis |       |       |
|-----------|---|----|---------------------|----------------------|-------|-------|---------------------|-------|-------|
|           |   |    |                     | MD1, MD2             | MFBCP | MD3   | MD1, MD2            | MFBCP | MD3   |
| 1         | 2 | 24 | 14003               | 19049                | 19049 | 20572 | 10882               | 24884 | 27982 |
| 2         | 2 | 32 | 19350               | 24396                | 24396 | 21739 | 12253               | 31602 | 28565 |
| 3         | 3 | 16 | 20590               | 25636                | 25636 | 22048 | 12433               | 33022 | 28720 |
| 4         | 2 | 42 | 25572               | 30618                | 30618 | 22882 | 13426               | 38997 | 29137 |
| 5         | 2 | 48 | 29151               | 34197                | 34197 | 23413 | 13960               | 43110 | 29402 |
| 6         | 3 | 24 | 33591               | 38637                | 38637 | 23790 | 14686               | 48276 | 29591 |
| 7         | 4 | 16 | 34445               | 39491                | 39491 | 23830 | 14617               | 49061 | 29611 |
| 8         | 3 | 28 | 39663               | 44679                | 44679 | 24409 | 15406               | 55038 | 29900 |
| 9         | 4 | 18 | 39644               | 44690                | 44690 | 24324 | 15307               | 54950 | 29858 |
| 10        | 3 | 32 | 45762               | 50635                | 50635 | 24974 | 15799               | 61387 | 30183 |
| 11        | 4 | 21 | 46796               | 51842                | 51842 | 24936 | 16036               | 62831 | 30164 |
| 12        | 4 | 24 | 53914               | 58960                | 58960 | 25475 | 16645               | 70558 | 30433 |

Com relação a quantidade de variáveis do problema, o novo modelo apresenta um número menor de variáveis do que o modelo MFBCP, exceto na instância 1 de 505 pontos e instância 1 de 5056 pontos. Para o número de restrições, a partir da instância 4 de 505 pontos e da instância 2 de 5056 pontos, a formulação MD3 passa a ter o menor número de restrições entre todos os modelos testados neste trabalho.

As Tabelas 3 e 4 apresentam os resultados para dispersão e proporção de rótulos livres de sobreposições para as 24 instâncias testadas. A coluna *Tempo* apresenta o tempo computacional dos testes em segundos. A coluna *Rótulos Livres* apresenta a porcentagem de rótulos livres de conflito nas soluções, sendo que 100% indica que não houve conflitos. A coluna *Distância Mínima* apresenta a menor distância encontrada entre rótulos que entram em conflito. Os melhores resultados para dispersão e proporção de rótulos livres são destacados em negrito.



Tabela 3 – Comparação do número de rótulos livres e distância entre rótulos em conflito (instâncias de 505 pontos)

| Instância | Tempo (s) |        |       |      | Rótulos livres (%) |        |        |               | Distância mínima |              |      |     |
|-----------|-----------|--------|-------|------|--------------------|--------|--------|---------------|------------------|--------------|------|-----|
|           | MFBCP     | MD1    | MD2   | MD3  | MFBCP              | MD1    | MD2    | MD3           | MFBCP            | MD1          | MD2  | MD3 |
| 1         | 0.09      | 0.98   | 0.12  | 0.28 | 100.00             | 100.00 | 100.00 | 100.00        | -                | -            | -    | -   |
| 2         | 0.28      | 2.72   | 1.31  | 0.30 | 100.00             | 100.00 | 100.00 | 100.00        | -                | -            | -    | -   |
| 3         | 0.14      | 2.58   | 1.17  | 0.28 | 100.00             | 100.00 | 100.00 | 100.00        | -                | -            | -    | -   |
| 4         | 1.59      | 6.06   | 3.85  | 0.36 | 99.20              | 99.20  | 99.20  | <b>100.00</b> | 10.04            | 33.01        | 9.05 | -   |
| 5         | 2.02      | 4.83   | 4.29  | 0.36 | 99.20              | 99.20  | 99.60  | <b>100.00</b> | 30.01            | 39.01        | 9.05 | -   |
| 6         | 2.41      | 19.78  | 2.29  | 0.34 | 98.40              | 93.80  | 99.60  | <b>100.00</b> | 11.01            | 18.11        | 9.21 | -   |
| 7         | 15.97     | 174.98 | 5.79  | 0.55 | 96.40              | 85.15  | 98.40  | <b>100.00</b> | 6.08             | 11.4         | 9.05 | -   |
| 8         | 4.28      | 66.75  | 4.41  | 0.44 | 97.20              | 88.30  | 99.20  | <b>100.00</b> | 3.16             | 19.1         | 9.05 | -   |
| 9         | 6.92      | 438.22 | 4.04  | 0.64 | 95.20              | 77.23  | 98.40  | <b>98.81</b>  | 3.16             | <b>12.16</b> | 9.21 | 6.7 |
| 10        | 6.01      | 41.59  | 34.62 | 0.37 | 95.60              | 85.70  | 98.00  | <b>100.00</b> | 3.16             | 22.1         | 9.05 | -   |
| 11        | 17.87     | 227.48 | 6.32  | 0.51 | 93.40              | 79.21  | 99.20  | <b>100.00</b> | 2.23             | 14.03        | 9.21 | -   |
| 12        | 193.86    | 227.75 | 17.07 | 0.56 | 90.50              | 64.55  | 97.60  | <b>100.00</b> | 1.41             | 14.31        | 9.05 | -   |

Tabela 4 – Comparação do número de rótulos livres e distância entre rótulos em conflito (instâncias de 5056 pontos)

| Instância | Tempo (s) |       |       |      | Rótulos livres (%) |       |              |               | Distância mínima |       |      |             |
|-----------|-----------|-------|-------|------|--------------------|-------|--------------|---------------|------------------|-------|------|-------------|
|           | MFBCP     | MD1   | MD2   | MD3  | MFBCP              | MD1   | MD2          | MD3           | MFBCP            | MD1   | MD2  | MD3         |
| 1         | 9.23      | 10.37 | 10.37 | 1.42 | 99.64              | 93.20 | 99.96        | <b>100.00</b> | 1.41             | 17.02 | 9.05 | -           |
| 2         | 27.30     | 20.59 | 20.59 | 1.62 | 99.24              | 90.90 | 99.88        | <b>100.00</b> | 2.23             | 17.02 | 9.05 | -           |
| 3         | 52.82     | 32.09 | 32.09 | 2.39 | 98.31              | 87.80 | 99.38        | <b>100.00</b> | 1.41             | 10.04 | 9.05 | -           |
| 4         | 32.71     | 28.21 | 28.21 | 2.79 | 98.65              | 83.70 | 99.84        | <b>100.00</b> | 2.23             | 17.02 | 9.05 | -           |
| 5         | 68.08     | 58.32 | 58.32 | 3.20 | 98.07              | 77.50 | 99.84        | <b>100.00</b> | 1.41             | 17.02 | 9.05 | -           |
| 6         | 5500      | 5500  | 5500  | 3.28 | 95.65              | 70.10 | 99.6         | <b>100.00</b> | 1.41             | 13.03 | 9.05 | -           |
| 7         | 5500      | 5500  | 5500  | 2.79 | 96.11              | 75.40 | 98.73        | <b>100.00</b> | 1.41             | 6.32  | 9.05 | -           |
| 8         | 5500      | 5500  | 5500  | 2.90 | 94.26              | 75.20 | 99.44        | <b>100.00</b> | 1.41             | 13.15 | 9.05 | -           |
| 9         | 5500      | 5500  | 5500  | 3.63 | 92.35              | 67.70 | 99.16        | <b>100.00</b> | 1.41             | 6.32  | 9.05 | -           |
| 10        | 5500      | 5500  | 5500  | 1000 | 91.89              | 57.40 | <b>99.58</b> | 99.32         | 1.41             | 12.16 | 9.05 | <b>18.1</b> |
| 11        | 5500      | 5500  | 5500  | 3.82 | 89.73              | 49.90 | 99.08        | <b>100.00</b> | 1.41             | 6.32  | 9.05 | -           |
| 12        | 5500      | 5500  | 5500  | 4.31 | 87.08              | 43.20 | 98.85        | <b>100.00</b> | 1.41             | 5.09  | 9.05 | -           |

Nas instâncias testadas é notado que a formulação proposta neste trabalho (MD3) supera as demais na proporção de rótulos sem conflito. Sendo que em apenas duas instâncias, uma de 505 pontos e uma de 5056 pontos ela não alcança 100% dos rótulos sem conflito. Na instância de 505 pontos em que ocorreu este caso, a proporção de rótulos livres foi melhor que as proporções dos outros modelos. Já na instância de 5056 pontos, a proporção de rótulos livres teve o segundo melhor valor, contudo a distância mínima entre rótulos foi melhor que a dos outros modelos (no caso específico dessa instância, o *solver* CPLEX foi programado para encerrar seu processo após o tempo de 1000 segundos, logo a solução encontrada não é a ótima para o problema, mas a melhor encontrada nesse tempo).

Estes resultados do modelo MD3 devem-se ao fato deste modelo priorizar a falta de conflitos, usando a medida de distância entre os rótulos para penalizar a função objetivo, diferente do modelo MFBCP que considera apenas a ocorrência de conflitos como pena e não a distância dos rótulos sobrepostos. Assim, tenta-se fazer com que todos os conflitos sejam evitados. Porém, caso ocorram a maior distância entre rótulos será considerada para evitar maiores penalizações no resultado final.

Em relação ao tempo computacional, a formulação MD3 também apresentou os menores valores, necessitando de poucos segundos nos testes computacionais, para diversas instâncias, principalmente sobre aquelas que possuíam maior quantidade de potenciais conflitos. Sobre esse aspecto, a formulação MD3 foi testada em um computador de desempenho e configuração relativamente inferior (processador AMD Dual Core E-300 APU e 2GB de memória RAM) em relação aos testes realizados por Gomes *et al.* (2013) com os outros modelos (processador Intel Core i5 com 4GB de memória).

## 6. Conclusão

Este trabalho propôs uma nova formulação matemática para o Problema de Localização de Rótulos Cartográficos (PFCLP, do inglês *Point Feature Cartographic Label Placement*) visando melhorar a legibilidade dos mapas. Esta formulação utiliza o conceito de dispersão discreta e tem

o objetivo de maximizar o número de rótulos sem conflitos e também maximizar a distância entre rótulos em conflitos.

A nova formulação (MD3) apresentou a solução ótima (sem rótulos em conflitos) em 22 das 24 instâncias testada. Além disso, os resultados foram superiores aos de outros modelos da literatura que também procuram minimizar o número de conflitos e aumentar a dispersão dos rótulos. Em relação número de variáveis, número de restrições e tempo computacional, o modelo proposto apresenta resultados satisfatórios, obtendo a solução ótima em poucos segundos.

Como trabalhos futuros pretende-se gerar novas instâncias com número maior de pontos para analisar a eficiência dos modelos matemáticos. Também propõe-se utilizar as ideias apresentadas na formulação MD3 do PFCLP na aplicação do método híbrido *Clustering Search* (Oliveira *et al.*, 2013).

### Agradecimentos

Este trabalho é financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP (Processo nº 2012/17523-3, Processo nº 2014/00580-0) e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (Processo nº 482170/2013-1, Processo nº 304979/2012-0, Processo nº 476862/2012-4 e Processo nº 301836/2014-0).

### Referências bibliográficas

AGARWAL, P. K., KREVELD, M. V., SURI, S. (1998). **Label placement by maximum independent set in rectangles**. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 11, 209–218.

ALVIM, A. C. F., TAILLARD, E. D. (2009). **POPMUSIC for the point feature label placement problem**. *European Journal of Operational Research*, 192(2), 396–413.

CHRISTENSEN, J., MARKS, J., SHIEBER, S. (1995). **An empirical study of algorithms point-features label placement**. *ACM Transactions on Graphics*, 14(3), 203–232.

CRAVO, G. L., RIBEIRO, G. M., LORENA, L. A. N. (2008). **A greedy randomized adaptive search procedure for the point-feature cartographic label placement**. *Computers & Geosciences*, 34(4), 373–386.

GOMES, S. P., RIBEIRO, G. M., LORENA, L. A. N. (2013). **Dispersion for the point-feature cartographic label placement problem**. *Expert Systems with Applications*, 40(15), 5878-5883.

IBM (2009). IBM ILOG CPLEX Optimizer 12.1, New York, <http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/> [Accessed June 20, 2012].

OLIVEIRA, A. C. M.; CHAVES, A. A.; LORENA, L.A.N. (2013), **Clustering Search**. *Pesquisa operacional*, v.33 (1), 105-121.

RIBEIRO, G.M. (2007). **Relaxação Lagrangeana com divisão em clusters para alguns problemas de otimização modelados em grafos de conflitos**. Ph.D. Dissertation Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. 63, 191.

RIBEIRO, G. M., LORENA, L. A. N. (2006). **Heuristics for cartographic label placement problems**. *Computers & Geosciences*, 32(6), 739–748.

RIBEIRO, G. M., LORENA, L. A. N. (2008). **Lagrangean relaxation with clusters for point-feature cartographic label placement problems**. *Computers & Operations Research*, 35(7), 2129–2140.

RIBEIRO, G. M., MAURI, G. R., LORENA, L. A. N. (2011). **A Lagrangean decomposition for the maximum independent set problem applied to map labeling**. *Operational Research*, 11(3), 229–243.

STRIJK, T., VERWEIJ, B., AARDAL, K. (2000). **Algorithms for maximum independent set applied to map labeling**, pp. 42. Available at [www.cs.uu.nl/research/techreps/repo/CS-2000/2000-22.ps.gz](http://www.cs.uu.nl/research/techreps/repo/CS-2000/2000-22.ps.gz), [Accessed June 20, 2012].

VERWEIJ, A. M., AARDAL, K. I. (1999). **An optimization algorithm for maximum independent set with applications in map labelling**. In: Proceedings 7th annual European symposium on algorithms (pp. 426–437). Prague, Czech Republic.

WAGNER, F., WOLFF, A., KAPOOR, V., STRIJK, T. (2001). **Three rules suffice for good label placement**. *Algorithmica*, 30, 334–349.

YAMAMOTO, M., CAMARA, G., LORENA, L. A. N. (2002). **Tabu search heuristic for pointfeature cartographic label placement**. *Geoinformatica*, 6(1), 77–90.

YAMAMOTO, M., LORENA, L. A. N. (2005). **A constructive genetic approach to pointfeature cartographic label placement**. In T. Ibaraki, K. Nonobe, & M. Yagiura (Eds.), *Metaheuristics: Progress as real problem solvers* (pp. 285–300). Kluwer Academic Publishers.

ZORASTER, S. (1990). **The solution of large 0–1 integer programming problems encountered in automated cartography**. *Operations Research*, 38(5), 752–759.

