O problema de coleta e entrega na indústria petrolífera: modelagem e método de solução *branch-and-cut*

Maria Gabriela S. Furtado[a]
[a]Departamento de Engenharia de Produção - Universidade Federal de São Carlos
Rodovia Washington Luís, km 235 - SP-310 São Carlos - São Paulo - Brasil
gabisfurtado@gmail.com

Pedro Munari[a]
munari@dep.ufscar.br

Reinaldo Morabito[a]
morabito@ufscar.br

RESUMO

Este estudo aborda o problema de roteamento e programação de navios com coleta e entrega e janelas de tempo na indústria de petróleo. Um estudo de caso foi realizado com uma empresa brasileira que coleta óleo cru de plataformas *offshore* (localizadas no oceano) e transporta-o até os terminais localizados na costa. Foi proposto um modelo de programação inteira mista para representar o problema, no qual além das restrições clássicas do problema de coleta e entrega foram agregadas outras restrições práticas. Além disso, foi proposto um método exato do tipo *branch-and-cut* para resolver o problema formulado, usando-se desigualdades válidas clássicas e algumas propostas especificamente para o estudo de caso. Testes computacionais foram realizados com exemplares reais fornecidos pela empresa e os resultados mostraram que as abordagens são promissoras e que o *branch-and-cut* oferece vantagens em relação à resolução direta do modelo por *softwares* comerciais.

PALAVRAS CHAVE. Problema de Coleta e Entrega, Indústria Petrolífera, *Branch-and-Cut*.

Área Principal: Logística e Transporte, PO na Área de Petróleo e Gás

ABSTRACT

This study addresses the routing and scheduling problem of vessels with pickup and delivery and time windows in oil industry. A case of study was performed in a Brazilian company that collects crude oil in offshore platforms (located in the ocean) and transports it to the terminals located in the coast. We propose a mixed integer model to represent the problem adequately, and in addition to the classical constraints of the pickup and delivery problem another practical restrictions were aggregated. Moreover, we propose an exact method branch-and-cut to solve the formulated problem, with classical valid inequalities and others proposed specifically to the case of study. The computational tests were performed with a real data set provided by the company and the results showed that the approaches were promising and the branch-and-cut offers advantages compared to the direct resolution of the model with commercial softwares.

KEYWORDS. Pickup and Delivery Problem, Oil Industry, Branch-and-Cut.

Main Area: Logistics and Transport, Operation Research in Oil and Gas

1. Introdução

Devido à disseminação da globalização nos últimos anos, o transporte passou a ser fator relevante para a economia para que os custos associados não se tornassem excessivos. Especificamente em relação ao transporte marítimo, este cresceu cerca de 25% desde 1980 e a indústria marítima passou a ter o monopólio no transporte de grandes volumes entre continentes [3]. Por ser um setor importante para a economia, é fundamental que estudos sejam realizados a fim de aprimorar sua eficiência e diminuir os custos relacionados. Além disso, os investimentos no setor de transportes têm sido maiores [2] e, do ponto de vista acadêmico, os problemas relacionados a este setor têm recebido maior atenção [10].

Em relação ao setor petrolífero, este tem crescido em todo o mundo e em especial no Brasil. A capacidade de produção de petróleo no Brasil é de cerca de $2{,}1$ milhões de barris diários. Segundo o Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comércio Exterior [12], as exportações de petróleo bruto em dezembro de 2011 somaram $3{,}54$ milhões de toneladas. As maiores reservas de petróleo hoje estão na plataforma continental em águas profundas e ultraprofundas. Desta maneira, uma boa rede de transporte se torna essencial para que o setor seja mais eficiente.

Um dos trabalhos pioneiros a abordar o problema de programação de navios foi em [5], em que estudou-se o problema de programação de navios da marinha americana usados para o transporte de combustível. Mais recentemente podemos citar [18] que estudaram a programação de navios para exportação de óleo cru e derivados do Kwait para países na América do Norte, Europa e Japão. [8] apresentou um modelo para o problema de roteamento dos navios em que o objetivo estava associado aos custos gerais do transporte e programação dos navios. Depois, [9] considerou um problema real de programação com uma frota heterogênea de navios para carga e descarga. Em [13] os autores apresentaram um modelo matemático para o problema de alocação de petróleo da Petrobras, que envolvia decisões relacionadas à frota de navios, tipos de petróleo transportados e para qual terminal o produto deveria ser conduzido. Além disso, podemos citar os trabalhos [2] e [10] que revisaram o transporte marítimo.

No problema de coleta e entrega [6], um conjunto de veículos com capacidade limitada tem que satisfazer as solicitações dos clientes. A cada solicitação está associado um nó de origem e um nó de destino e o mesmo veículo deve coletar o pedido na origem pré-fixada e o entregar no destino pré-fixado. Vários autores abordaram o problema de roteamento e programação de veículos com coleta e entrega e sua resolução através de métodos exatos. Por exemplo, em [7] os autores propuseram um algoritmo exato baseado em geração de colunas e restrições de caminho mínimo para o subproblema. Em [16] foram propostos dois métodos *branch-and-cut* baseados em dois modelos com variáveis de 2-índices para o problema de coleta e entrega com janelas de tempo (PDPTW - *pickup and delivery problem with time windows*), com o objetivo de minimizar os custos relacionados às viagens. Em continuidade a este trabalho, [15] propuseram um método *branch-and-cut-and-price* para o PDPTW. O método utiliza as desigualdades válidas apresentadas em [4], [17] e [16]. Em [1] os autores estudaram o PDPTW com restrições de precedência e pareamento. Os autores propõem um algoritmo baseado no modelo de particionamento de conjuntos. Os resultados mostraram ser efetivos para exemplares razoavelmente grandes da literatura.

O objeto de estudo deste trabalho é o roteamento e a programação dos navios que carregam o óleo cru das plataformas *offshore* (localizadas no mar) e transportam até os terminais localizados na costa. O problema trata de um conjunto de demandas, cujos atributos definem total ou parcialmente o translado de um produto, com prazos definidos em janelas de tempo. Um estudo de caso foi feito com uma empresa brasileira que realiza esta operação do transporte de óleo cru entre plataformas e terminais. Sendo assim, foi proposto um modelo inteiro misto para representar o problema de roteamento e programação de navios com coleta e entrega na indústria petrolífera. Ao problema clássico da literatura, foram agregadas outras restrições específicas do problema do estudo de caso. Além disso, foi proposto um método do tipo *branch-and-cut* para resolver o mesmo problema e várias famílias de desigualdades válidas foram implementadas.

Este texto está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 descrevemos o problema de coleta e entrega na indústria petrolífera e o modelo matemático proposto. O método *branch-and-cut* é descrito na Seção 3, seguido dos resultados computacionais com exemplares reais na Seção 4. E por fim, as conclusões e trabalhos futuros na Seção 5.

2. Descrição do Problema

O problema de roteamento e programação de navios abordado neste trabalho está inserido no contexto em que as origens e os destinos estão pré-fixados, ou seja, em um planejamento anterior, a empresa decide o quanto de óleo cru deve ser transportado de cada plataforma para cada terminal. Para a logística, o problema é decidir qual navio fará esta atividade e em qual momento. Além disso, cada navio começa e termina sua rota em seu "depósito próprio", que nada mais é que a posição (coordenadas latitude e longitude) que ocupa no exato momento de início e término de suas atividades. As rotas são designações de como uma ou mais demandas serão atendidas por um navio, tendo também que obedecer a um sequenciamento de escalas e cumprir determinadas operações.

Cada plataforma produz um óleo diferente e cada terminal demanda quantidades de óleos de cada plataforma especificamente, o que caracteriza um problema com multi-produto. Um das dificuldades da empresa do estudo de caso se encontra em manter os níveis de estoque entre um mínimo e outro máximo nas plataformas e terminais. Não pode ocorrer a diminuição do estoque mínimo (por questões de segurança) e nem ultrapassar o estoque máximo (pelo alto custo de oportunidade associado, a plataforma não pode parar sua produção). Tal situação pode ser modelada pela imposição de janelas de tempo que devem ser respeitadas pelos navios, de modo que o cumprimento das janelas de tempo garante que os níveis de estoque sejam mantidos. A frota de navios é heterogênea e cada navio possui capacidade e velocidade diferentes e outras características que serão abordadas mais à frente nesta seção. Como as velocidades médias dos navios não variam nos trajetos entre plataformas e terminais, é razoável considerar que todos os navios possuem a mesma velocidade média. Além disso, não é em qualquer plataforma ou terminal que um navio pode atracar, devido a questões físicas de calado (que é a parte do navio que fica submersa na água) e LOA (*length overall* - comprimento do navio). Portanto, este é um problema que pode ser modelado baseando-se no problema de coleta e entrega com janelas de tempo e múltiplos depósitos.

Além das restrições clássicas dos problemas de coleta e entrega com janelas de tempo, o modelo que será proposto possui restrições específicas para o estudo de caso as quais são descritas a seguir:

- Impossibilidade de atracação: alguns navios não podem atracar em certos pontos operacionais, devido às restrições físicas como calado e LOA;

- Calado Flexível: mesmo quando há a exigência de que um navio k não deva atracar em um determinado ponto operacional, em alguns casos é possível que este navio k tenha permissão se estiver apenas parcialmente carregado;

- Posicionamento Dinâmico: alguns navios e alguns navio-plataformas que são navios adaptados para a exploração de petróleo possuem um sistema operacional denominado posicionamento dinâmico (DP - *dynamic positioning*), que controla automaticamente a posição do navio. Algumas regras devem ser mantidas e implicam que a atracação somente é possível se o navio possuir uma porcentagem de carga a bordo;

- Cada navio deve iniciar sua rota em seu "depósito inicial" e terminar em seu "depósito final", que correspondem às posições geográficas inicial e final do navio;

- Penalidade por visitas consecutivas: sempre que um navio visitar uma plataforma e, em seguida, visitar outra plataforma que seja diferente da primeira, isto é penalizado na função objetivo.

Cabe dizer que um estudo preliminar foi realizado com este problema em [14] em que o autor desenvolveu um modelo matemático que serviu de ponto de partida para o modelo deste trabalho. O modelo matemático apresentado a seguir foi baseado em [4] e o problema é representado por uma rede $G\,(N,A)$ que consiste em N que representa um conjunto de nós e A um conjunto de arcos. Os conjuntos, parâmetros e variáveis são dados a seguir:

Conjuntos	
K	representam os veículos;
P	representam as coletas nas plataformas (origens);
D	representam as entregas nos terminais (destinos);
$ST = \{s_1,...,s_n\}$	nós artificiais que indicam o depósito inicial de cada navio;
$EN = \{en_1,...,en_n\}$	nós artificiais que indicam o depósito de chegada de cada navio;
$N = P \cup D \cup ST \cup EN$	representam todos os nós da rede;
$A\{(i,j) : i,j \in N\}$	representam todos os arcos da rede.

Parâmetros	
$n = \|P\|$	representam todos os clientes;
t_{ij}	tempo de deslocamento do nó i para o nó j;
d_i	tempo de serviço do nó i;
e_i	início da janela de tempo do nó i;
l_i	fim da janela de tempo do ao nó i;
Cap_k	capacidade do navio k;
q_i	demanda do nó i;
cm_k	consumo de combustível do navio k em movimento;
cs_k	consumo de combustível do navio k enquanto está parado;
ca_j	custo por atracação no nó j;
v	velocidade média do navio;
$dist_{ij}$	distância entre o nó i e o nó j;
A_{ik}	é igual a 1 se o navio k não pode atracar em i, e 0 caso contrário;
CF_{ik}	matriz de calado flexível. É positiva se o navio pode atracar, mediante ao navio conter no máximo a bordo $CF_{ik}\%$ de sua capacidade máxima;
C_{DP_i}	é igual a 1 se a plataforma i é convencional e 0 se a plataforma possui DP;
K_{DP_k}	é igual a 1 se o navio k possui DP e 0, caso contrário;
α_1	porcentagem de carga para o navio com DP atracar em qualquer plataforma;
α_2	porcentagem de carga para o navio sem DP atracar em uma plataforma;
β	penalização por visitas consecutivas a duas plataformas diferentes;
M_{ij} e M	números suficientemente grandes.

Variáveis	
x_{ijk}	é igual a 1 se o navio k percorre o arco (i,j) e 0, caso contrário;
B_{ik}	instante de início de serviço no nó i pelo veículo k;
Q_{ik}	quantidade de carga no veículo k no instante após sua visita ao nó i;
VC_{ijk}	é igual a 1 se o navio k visita a plataforma i e, em seguida, a plataforma j com $dist_{ij} > 0$ e 0, caso contrário.

O modelo completo para representar o problema de coleta e entrega de óleos crus com janelas de tempo e frota heterogênea é dado por:

$$\text{Min} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} (cm_k - cs_k)\, x_{ijk} \frac{dist_{ij}}{v} + \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in P \cup D \\ dist_{ij} > 0}} \sum_{k \in K} ca_j x_{ijk} +$$
$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in P} \sum_{k \in K} \beta * VC_{ijk} \tag{1}$$

s.a

$$\sum_{j\in(P\cup D\cup EN)}\sum_{k\in K} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i \in (ST\cup P\cup D) \tag{2}$$

$$\sum_{i\in(P\cup D\cup ST)}\sum_{k\in K} x_{ijk} = 1 \qquad \forall j \in (P\cup D\cup EN) \tag{3}$$

$$\sum_{j\in(P\cup\{en_k\})} x_{s_kjk} = 1 \qquad \forall k \in K \tag{4}$$

$$\sum_{i\in(\{s_k\}\cup D)} x_{ien_kk} = 1 \qquad \forall k \in K \tag{5}$$

$$\sum_{i\in N}\sum_{k\in K} x_{ijk} = 0 \qquad \forall j \in ST \tag{6}$$

$$\sum_{j\in N}\sum_{k\in K} x_{ijk} = 0 \qquad \forall i \in EN \tag{7}$$

$$\sum_{i\in(P\cup D\cup\{s_k\})} x_{ihk} - \sum_{(j\in P\cup D\cup\{e_k\})} x_{hjk} = 0 \qquad \forall h \in P\cup D; k\in K \tag{8}$$

$$e_i\left(\sum_{j\in N} x_{jik}\right) \le B_{ik} \le l_i\left(\sum_{j\in N} x_{jik}\right) \qquad \forall i \in (P\cup D\cup EN);\ k\in K \tag{9}$$

$$e_i\left(\sum_{j\in N} x_{ijk}\right) \le B_{ik} \le l_i\left(\sum_{j\in N} x_{ijk}\right) \qquad \forall i \in ST; k\in K \tag{10}$$

$$x_{ijk}\left(B_{ik}+t_{ij}+d_i-B_{jk}\right) \le 0 \qquad \forall i \in (ST\cup P\cup D);\ j\in (P\cup D\cup EN);\ k\in K \tag{11}$$

$$B_{n+h,k} \ge B_{h,k} \qquad \forall h\in P; k\in K \tag{12}$$

$$Q_{jk} \ge \left(Q_{ik}+q_j\right)x_{ijk} \qquad \forall i \in (ST\cup P\cup D);\ j\in (P\cup D\cup EN);\ k\in K \tag{13}$$

$$x_{ijk} = 0 \qquad \forall i,j\in N; k\in K : A_{ik}=1;\ CF_{ik}<0 \tag{14}$$

$$\sum_{i\in(ST\cup P\cup D)} x_{ihk} = \sum_{j\in N} x_{j,n+h,k} \qquad \forall h\in P; k\in K \tag{15}$$

$$Q_{jk} \le Cap_k \sum_{i\in(\{s_k\}\cup P\cup D)} x_{ijk} \qquad \forall j \in (P\cup D\cup\{en_k\});\ k\in K \tag{16}$$

$$Q_{s_k,k}+Q_{en_k,k} = 0 \qquad \forall k\in K \tag{17}$$

$$Q_{jk} \le \left(CF_{jk}Cap_k+q_j\right) + \left(1-\sum_{i\in(P\cup D\cup\{s_k\})} x_{ijk}\right)M \qquad \forall j\in D; k\in K : A_{jk}=1 \tag{18}$$

$$Q_{jk} \leq (\alpha_1 Cap_k + q_j) + (1 - \alpha_1)\, Cap_k \left(1 - \sum_{\substack{i \in (P \cup D \cup \{s_k\}) \\ dist_{ij} > 0}} x_{ijk}\right) \quad \forall j \in P; k \in K : K_{DP_k} = 1 \tag{19}$$

$$Q_{jk} \leq (\alpha_2 Cap_k + q_j) + (1 - \alpha_2)\, Cap_k \left(1 - \sum_{\substack{i \in (P \cup D \cup \{s_k\}) \\ dist_{ij} > 0}} x_{ijk}\right) \quad \forall j \in P : C_{DP_j} = 0; \; k \in K : K_{DP_k} = 0 \tag{20}$$

$$\sum_{i \in N} x_{ijk} = 0 \quad \forall j \in P : C_{DP_j} = 1; \; k \in K : K_{DP_k} = 0 \tag{21}$$

$$x_{ijk} \leq VC_{ijk} \quad \forall i,j \in P : dist_{ij} > 0; \; k \in K \tag{22}$$

$$VC_{ijk} \geq 0 \quad \forall i,j \in N; k \in K \tag{23}$$

$$Q_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in N; k \in K \tag{24}$$

$$B_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in N; k \in K \tag{25}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i \in (ST \cup P \cup D); \; j \in (P \cup D \cup EN); \; k \in K \tag{26}$$

A função objetivo (1) minimiza os custos associados ao consumo de combustível, a quantidade de atracações realizadas e penaliza duas visitas consecutivas a plataformas diferentes. As restrições (2) e (3) asseguram que todos os nós sejam visitados exatamente uma vez. Em (4) e (5) é assegurado que todos os navios saiam de seus depósitos iniciais e retornem aos seus depósitos finais, respectivamente. Todo navio parte de seu depósito inicial e não pode mais retornar a ele, conforme imposto pela restrição (6). Um navio não pode partir de seu depósito final, o que é garantido pela restrição (7). A restrição (8) garante a conservação de fluxo dos navios. As janelas de tempo são asseguradas pelas restrições (9) e (10). Em (11) é imposto que se o navio k visita o nó i e em seguida o nó j, então o instante de início de serviço no nó j tem que ser maior ou igual ao instante de início de serviço no nó i, mais o tempo de serviço no nó i e o tempo de viagem entre os dois nós. O navio k deve coletar primeiro antes de entregar a devida demanda, conforme exigido em (12).

As restrições (13) garantem o atendimento da demanda pelo navio e em (14), que o navio não atraca em pontos operacionais em que existe alguma restrição física. Em (15) assegura-se que se o navio k visita o nó h, então ele precisa entregar a carga no nó $n + h$. A capacidade máxima do navio é imposta em (16). Em (17) assegura-se que o navio começa e termina vazio. Em (18) garante-se que se o navio não for autorizado a atracar em um determinado ponto operacional, porém seu calado for flexibilizado, então permite-se atracar caso o navio possua até uma determinada porcentagem de carga a bordo. Em (19)-(21) garante-se que o posicionamento dinâmico seja respeitado. Na restrição (22) contabiliza-se duas visitas consecutivas a plataformas diferentes. Por fim, as restrições (23)-(26) garantem o domínio das variáveis.

Esta formulação é não-linear pelas restrições (11) e (13). As linearizações são dadas respectivamente por:

$$B_{jk} \geq B_{ik} + d_i + t_{ij} + (x_{ijk} - 1)\, M_{ij}, \;\; \forall i \in (ST \cup P \cup D)\,, j \in (EN \cup P \cup D)\,, k \in K, \tag{27}$$

$$Q_{jk} \geq Q_{ik} + q_j + (x_{ijk} - 1)\, M_{ij}, \;\; \forall i \in (ST \cup P \cup D)\,, j \in (EN \cup P \cup D)\,, k \in K. \tag{28}$$

As regras de atracação utilizadas pela empresa para o posicionamento dinâmico são as seguintes:

1. Se a plataforma possui DP:
   - Se o navio possui DP, então este navio pode possuir a bordo uma carga com até 50% de sua capacidade;
   - Se o navio não possui DP, então pode possuir a bordo uma carga com até 30% de sua capacidade.
2. Se a plataforma for convencional:
   - Se o navio possui DP, então o navio pode possuir uma carga a bordo de até 50% de sua capacidade para atracar;
   - Se o navio for convencional, então este não pode atracar nesta plataforma.

3. Método *Branch-and-Cut*

Esta seção tem o objetivo de apresentar o método exato *branch-and-cut* desenvolvido especificamente para resolver o problema de coleta e entrega com janelas de tempo da indústria petrolífera. O método é baseado em uma variação do modelo apresentado na Seção 2. Nesta variante, todos os veículos iniciam sua rota em um depósito comum inicial e terminam sua rota em um outro depósito comum a todos os veículos. A motivação de colocar mais dois depósitos comuns a todos os veículos neste modelo é para que os cortes propostos na literatura sejam válidos também para esta variante. Para isso, três restrições são acrescentadas ao modelo da Seção 2, resultando-se no modelo dado a seguir:

$$\text{Min}(1)$$

s.a

$$(2) - (26)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} = 1 \qquad \forall k \in K \tag{29}$$

$$\sum_{i \in N} x_{i,2n+1,k} = 1 \qquad \forall k \in K \tag{30}$$

$$\sum_{j \in N} x_{jik} - \sum_{j \in N} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i \in P \cup D; k \in K \tag{31}$$

As restrições (29)-(31) garantem que todos os veículos saem de um depósito comum (depósito 0) e retornam a um depósito comum (depósito $2n+1$) a todos os veículos.

No método *branch-and-cut* proposto são utilizadas as seguintes desigualdades válidas (cortes): caminhos infactíveis (em relação as janelas de tempo, atracação, calado flexível e posicionamento dinâmico), precedência, restrições de capacidade, eliminação de sub-rota, restrições de ordem generalizadas e restrições de alcance (*reachability*). Optamos por descrever apenas duas destas desigualdades: caminhos infactíveis e de alcance. Para maiores detalhes a respeito destas desigualdades e seus respectivos algoritmos de separação consultar [4] e [16].

Caminhos Infactíveis

Estas restrições foram propostas por [16] para um modelo com variáveis com 2-índices para o PDPTW. Primeiramente vamos a algumas definições. Seja $\mathcal{R}$ o conjunto de todos os caminhos infactíveis em relação às janelas de tempo. Para um dado conjunto $R \in \mathcal{R}$ seja $A(R)$ e $N(R)$

os conjuntos de arcos e nós, respectivamente. $A(R)$ corresponde aos arcos que estão neste caminho e $N(R)$ aos nós do caminho. As restrições de caminhos infactíveis são dadas por:

$$\sum_{(i,j)\in A(R)} x_{ij} \leq |A(R)| - 1, \forall R \in \mathcal{R} \tag{32}$$

Estas inequações foram propostas para garantir que as janelas de tempo fossem respeitadas para uma formulação do PDPTW. Para o nosso caso, estas inequações são verificadas em relação às janelas de tempo, atracação, calado flexível e posicionamento dinâmico.

Restrições de Alcance

As restrições de alcance foram primeiramente propostas por [11] para o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo. [16] afirmaram que estas inequações são válidas também para o PDPTW. Seja $\delta(S) = \delta^+(S) \cup \delta^-(S)$, em que $\delta^+(S) = \{(i,j) \in A | i \in S, j \notin S\}$ e $\delta^-(S) = \{(i,j) \in A | i \notin S, j \in S\}$. Ainda, para cada nó $i \in N$, seja $A_i^- \subset A$ o conjunto mínimo de arcos, tal que, qualquer caminho factível de 0 a i, utiliza somente arcos de A_i^-. Seja A_i^+ o conjunto mínimo de arcos, em que qualquer caminho factível de i a $2n+1$, utiliza somente arcos de A_i^+. Considere o conjunto de nós T em que cada nó em T deve ser visitado por um veículo diferente (define-se T como conjunto de nós conflitantes). Sendo assim, seja $A_T^- = \cup_{i\in T} A_i^-$ e $A_T^+ = \cup_{i\in T} A_i^+$. Para cada conjunto $S \subseteq P \cup D$ e qualquer conjunto $T \subseteq S$, as próximas inequações são válidas:

$$x\left(\delta^-(S) \cap A_T^-\right) \geq |T|, \tag{33}$$

$$x\left(\delta^+(S) \cap A_T^+\right) \geq |T|. \tag{34}$$

Ao analisar se dois nós pertencem a um conjunto T de nós conflitantes verifica-se janelas de tempo, capacidade, atracação, calado flexível e posicionamento dinâmico.

O método proposto não possui nenhum corte que seja obrigatório para se ter a garantia de factibilidade. Este método resolve o modelo apresentado acima e todos os cortes são verificados a fim de, ao serem incluídos, melhorar seu limitante inferior.

4. Resultados Computacionais

Esta seção compara os resultados com o modelo matemático proposto na Seção 2 com o método exato *branch-and-cut* mostrado na Seção 3. O modelo e o método *branch-and-cut* são resolvidos pelo *software* de otimização CPLEX sendo assim, a diferença entre eles é que o método proposto inclui outros cortes para melhorar o limitante inferior do modelo.

O modelo foi implementado na linguagem de modelagem *OPL* e resolvido com o *software* de otimização IBM CPLEX versão 12.5.1. O computador utilizado foi um PC Core $i7$ 3.40 GHz, 16 GB de memória RAM e sistema operacional Windows 7 *Professional*. Na implementação do método, utiliza-se as funções do tipo *callback* da biblioteca *Concert* do *solver* IBM CPLEX, que permitem a inserção de desigualdades válidas de forma integrada a resolução do problema. Além disso, a *callback* é chamada apenas nos 10 primeiros nós da árvore e isto é feito por observar que nos níveis mais profundos da árvore não são gerados muitos cortes. Ainda, somente os cortes mais violados são acrescentados ao problema e limita-se em 100 cortes por desigualdade e por iteração. A ramificação do método é feita pelo próprio *solver* CPLEX e além disso, utilizamos de sua configuração padrão. O tempo limite para todos os casos teste foi de 5 horas de processamento.

Antes de resolver o modelo matemático e o método proposto, pode-se eliminar diversos arcos que sabemos a *priori* que não poderão existir em uma solução factível [4]. Além disso, em [4] e [7] os autores mostram uma série de cortes que podem ser gerados a *priori* e colocados diretamente no modelo para que melhorem seu limitante inferior. Essas melhorias foram incorporadas à implementação computacional.

Os experimentos foram direcionados para a comparação do modelo matemático apresentado na Seção 2 com o método *branch-and-cut* apresentado na Seção 3. Os exemplares utilizados para a realização dos testes computacionais foram disponibilizados pela empresa do estudo de caso e divididos em dois casos testes: caso 1 e caso 2. O primeiro caso teste é referente à produção de petróleo no mês de Janeiro de 2013 e o segundo caso teste é referente à produção no mês de Julho de 2013. O caso 1 conta com 31 navios disponíveis e um total de 83 pares de coleta e entrega durante o mês de Janeiro. O caso 2 conta com 25 navios disponíveis e um total de 142 pares de coleta e entrega referentes ao mês de Julho de 2013. Estes casos são subdivididos em outros casos menores para a realização dos experimentos, isto é, cada exemplar foi subdividido em outros 9 casos teste de acordo com o número de pares de coleta e entrega, de modo que $N10$ corresponde a 10 pares de coleta e entrega e assim sucessivamente.

As Tabelas 1 e 2 mostram os resultados fornecidos pelo *software* de otimização CPLEX com o modelo proposto na Seção 2 e com o modelo ao incluir os cortes descritos na Seção 3 (*branch-and-cut*) para cada exemplar, respectivamente. A primeira coluna indica o nome da instância. Para cada estratégia são apresentadas três colunas: o valor da função objetivo correspondente à melhor solução encontrada pelo método, a diferença relativa entre a melhor solução obtida e o limitante inferior (*Gap*) em porcentagem ($Gap = \frac{\text{UB}-\text{LB}}{\text{UB}}$) e o tempo computacional, dado em segundos, para os exemplares de teste. O símbolo $-$ indica que o tempo máximo permitido foi atingido e os espaçamentos em branco representam que o *solver* ou o método exato não encontraram solução factível no tempo máximo estipulado.

Tabela 1: Resultados computacionais para o exemplar 1.

Exemplares	Modelo			*Branch-and-Cut*		
	UB	Gap (%)	Tempo (s)	UB	Gap (%)	Tempo (s)
$N10$	1203,77	0	12,90	1203,77	0	16,14
$N15$	1514,33	0	664,79	1514,33	0	24,53
$N20$	2264,15	0	16937,00	2264,15	0	444,99
$N25$	3088,42	31,16	$-$	2941,34	0	8269,45
$N30$						
$N35$						
$N40$						
$N45$						
$N50$						

Tabela 2: Resultados computacionais para o exemplar 2.

Exemplares	Modelo			*Branch-and-Cut*		
	UB	Gap (%)	Tempo (s)	UB	Gap (%)	Tempo (s)
$N10$	1577,84	0	6,16	1577,84	0	9,65
$N15$	2215,58	0	10,31	2215,58	0	14,55
$N20$	2662,50	0	28,56	2662,50	0	26,00
$N25$	3710,88	20,64	$-$	3483,80	14,96	$-$
$N30$						
$N35$						
$N40$						
$N45$						
$N50$						

Para o exemplar 1 com o modelo, nas instâncias $N10$ e $N15$ são encontradas as soluções ótimas em relativamente pouco tempo computacional enquanto que para a instância $N20$ a solução ótima é encontrada em quase 5 horas de processamento, e para $N25$ o *gap* termina em $31{,}16\%$. Para as demais instâncias, no tempo estipulado, não encontra-se nenhuma solução inteira factível. Para o exemplar real 1, o desempenho do método *branch-and-cut* proposto foi melhor que do modelo. Nele, os tempos computacionais são melhores para as instâncias $N15$ e $N20$. Em especial para $N20$, o tempo computacional diminuiu significantemente de aproximadamente 16000 segundos para 400 segundos. Para a instância real $N25$, o método prova a solução ótima em pouco mais de duas horas de processamento, enquanto que o modelo não encontrou a solução ótima em 5 horas de processamento.

Os resultados com o modelo para o exemplar 2 mostram que para até 20 pares de coletas e entregas, o modelo é resolvido otimamente em poucos segundos ($N20$ é resolvido otimamente em aproximadamente 28 segundos). Para o exemplar $N25$ o *gap* apresentado é relativamente alto, perto de 20%, e o tempo computacional é elevado considerando que, para este exemplar, o *solver* parou por tempo limite de 5 horas de processamento. Entretanto, o *solver* ainda encontra solução inteira para este exemplar no tempo estipulado. A partir do $N30$, não é encontrada solução inteira em 5 horas de processamento. O método *branch-and-cut* para os exemplares $N10$, $N15$ e $N20$ não tem grandes melhorias, mas para o exemplar $N25$ encontra solução de melhor qualidade e com *gap* inferior ao encontrado pelo modelo.

Diante desses resultados, pode-se fazer algumas observações. O método possui uma limitação para resolver problemas com mais de 25 pares de coleta e entrega, o que corresponderia a cerca de 10 dias de operação na empresa. Cabe dizer que a empresa resolve problemas considerando apenas os pares de coletas e entregas previstas nas primeiras duas semanas em vez de considerar os 83 (142) pares de coletas e entregas correspondentes ao mês de Janeiro (Julho) de 2013, acarretando em problemas com cerca de 50 pares de coleta e entrega, em geral. Isto acontece pois são muitas as incertezas em relação aos demais pares.

5. Conclusões e Trabalhos Futuros

O objetivo deste trabalho foi estudar o problema do transporte de óleo cru de plataformas *offshore* para os terminais localizados na costa brasileira e propor métodos para sua solução. Foi realizado um estudo de caso com uma empresa brasileira que realiza esta operação de extração e transporte do óleo cru. Um modelo matemático inteiro misto foi proposto baseado no problema de coleta e entrega com janelas de tempo. Várias restrições adicionais foram agregadas ao problema clássico da literatura como, por exemplo, múltiplos depósitos, atracação, calado flexível, posicionamento dinâmico, dentre outras. Por fim, foi desenvolvido um método de solução exato do tipo *branch-and-cut*. Os resultados computacionais foram realizados com exemplares reais fornecidos pela empresa e indicaram que o método proposto diminuiu os tempos computacioinais juntamente com os *gaps* relativos.

É possível fazer várias melhorias no método *branch-and-cut* apresentado como, por exemplo, a inclusão de novos cortes (do tipo *fork* [16], outros cortes de capacidade, eliminação de sub-rota, etc). Além disso, outras possibilidades podem ser testadas, como o *strong branching*, heurísticas iniciais e explorar simplificações do modelo.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio financeiro da FAPESP (processo número $2014/22542-2$), da CAPES e da Agência Nacional de Petróleo (ANP) para o desenvolvimento deste trabalho.

Referências

[1] **Baldacci, R. e Bertolini, E. and Mingozzi, A.** (2011), An exact algorithm for the pickup and delivery problem with time windows, *Operations Research*, 59 (2), 414-426.

[2] **Christiansen, M. e Fagerholt, K. e Ronen, D.** (2004), Ship routing and scheduling: status and perspectives, *Transportation Science*, 38 (1), 1-18.

[3] **Christiansen, M. e Fagerholt, K. e Ronen, D. e Nygreen, B.**, *Maritime transportation (In Handbook in operations research and management science. Cynthia Barnhart and Gilbert Laporte.)*, Elsevier, Amsterdam, Holland, 2007.

[4] **Cordeau, J. F.** (2006), Branch and cut algorithm for the dial-a-ride problem, *Operation Research*, 54 (3), 573-586.

[5] **Dantzig, G.B. e Fulkerson, D.R.** (1954), Minimizing the number of tankers to meet a fixed schedule, *Naval Research Logistics Quarterly*, 1, 217-222.

[6] **Desaulniers, G. e Desrosiers, J. e Erdmann, A. e Solomon, M. M.**, *VRP with pickup and delivery (In The vehicle routing problem. In Toth, P and Vigo, D.)*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2002.

[7] **Dumas, Y. e Desrosiers, J. e Soumis. F.** (1991), The pickup and delivery problem with time windows, *European Journal of Operational Research*, 54 (1), 7-22.

[8] **Fagerholt, K.** (2000), Evaluating the trad-off between the level of customer service and transportation cost in a ship scheduling problem, *Maritime Policy Management*, 27 (2), 145-153.

[9] **Fagerholt, K.** (2001), Ship scheduling with soft time windows: an optimisation based approach, *European Journal of Operational Research*, 131 (2), 559-571.

[10] **Hoff, A. e Andersson, H. e Christiansen, M. e Hasle, G. e Løkketangen, A.** (2010), Industrial aspects and literature survey: fleet composition and routing, *Computers and Operations Research*, 37 (12), 2041-2061.

[11] **Lysgaard, J.** (2006), Reachability cuts for the vehicle routing problem with time windows, *European Journal of Operational Research*, 175 (1), 210-223.

[12] **Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comérico Exterior**, http://www.mdic.gov.br/sitio/, 2011.

[13] **Rocha, R. e Grossmann, I. E. e Aragão, M. V. S. P.** (2009), Petroleum allocation at PETROBRAS: Mathematical model and a solution algorithm, *Computers and Chemical Engineering*, 33 (12), 2123-2133.

[14] **Rodrigues, V. P.** (2013), Uma abordagem de otimização para a roteirização e programação de navios: um estudo de caso na indústria petrolífera, *Monografia de Mestrado, Departamento de Engenharia de Produção*, Universidade Federal de São Carlos.

[15] **Ropke, S. e Cordeau, J. F.** (2009), Branch and cut and price for the pickup and delivery problem with time windows, *Transportation Science*, 43 (3), 267-286.

[16] **Ropke, S. e Cordeau, J. F. e Laporte, G.** (2007), Models and Branch-and-Cut Algorithms for Pickup and Delivery Problems with Time Windows, *Networks*, 49 (4), 258-272.

[17] **Ruland, K. S. e Rodin, E. Y.** (1997), The pickup and delivery problem: faces and branch-and-cut algorithm, *Computers & Mathematics with Applications*, 33 (12), 1-33.

[18] **Sherali, H.D. e Al-Yakoob, S.M. e Hassan, M.M.** (1999), Fleet management models and algorithms for an oil-tanker routing and scheduling problem, *IIE Transactions*, 31 (5), 395-406.