

UM MODELO MATEMÁTICO PARA UM PROBLEMA REAL DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS EM ÁREAS URBANAS

José Ferreira de Souza Neto

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar
Rodovia Washington Luís, km 235 – São Carlos – SP
josefneto@yahoo.com.br

Vitória Pureza

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar
Rodovia Washington Luís, km 235 – São Carlos – SP
vpureza@dep.ufscar.br

RESUMO

Este trabalho aborda um problema rico de roteamento de veículos no qual busca-se incorporar características reais da operação de distribuição de empresas que entregam grandes volumes de produtos, em particular, em áreas urbanas de alta densidade. A partir de um estudo de caso em uma distribuidora de bebidas, é proposto um modelo matemático que considera custos com frota própria e fretada, número de entregadores, compatibilidade de veículos com clientes, limitações de horários de circulação de tipos de veículos, múltiplas viagens diárias, dentre outras restrições. Resultados da resolução do modelo com instâncias fictícias de tamanho reduzido e com uma instância com dados reais fornecida pela empresa evidenciam o potencial de uso da metodologia.

PALAVRAS CHAVE. Problema de roteamento de veículos, Múltiplos entregadores, Múltiplas viagens.

Área principal (Logística e Transporte, Programação Matemática, Otimização Combinatória)

ABSTRACT

This work tackles a rich vehicle routing problem that aims to represent the operation of companies that deliver large volumes of products in highly dense urban areas. Based on a study case conducted in a drinks company, we propose a mathematical model that takes into account costs with the company-owned fleet and charter vehicles, number of deliverymen, compatibility of vehicles and customers, time limitations on vehicle types circulation, multiple daily trips, among other features. Results for small-sized and real instances provided by the company are presented, demonstrating the potential of the methodology.

KEYWORDS. Vehicle Routing Problem, Multiple deliverymen. Multitrip.

Main area (Logistics and Transport, Mathematical Programming, Combinatorial Optimization)

1. Introdução

O objeto de estudo deste trabalho consiste nas operações de entrega dos produtos em áreas urbanas de uma empresa produtora e distribuidora de bebidas do interior de São Paulo. A operação logística considera características particulares da aplicação, tais como frota heterogênea, o uso de múltiplos entregadores em cada caminhão, a possibilidade de contratação de caminhões fretados, a possibilidade de múltiplas viagens diárias (*multi-trip*) para um mesmo caminhão, a existência de rotas perigosas, limitações de janelas de atendimentos para certos clientes, limitações de horários de circulação de tipos de caminhões em áreas específicas da cidade, e limitações de tipos de caminhões que podem atender cada cliente. O problema pode ser, portanto, caracterizado como um Problema de roteamento de veículos multi-viagem com janelas de tempo e múltiplos entregadores (*Multi-trip Vehicle Routing Problem with time windows multiple deliverymen* - MTRVPTWMD). Assim como a maioria dos problemas de roteamento de interesse, o MTRVPTWMD pertence à classe NP-hard (Garey e Johnson, 1979), sendo, portanto, considerado de difícil resolução.

Com vistas a seu tratamento, é proposto um modelo de programação inteira mista que procura descrever as características da operação real de entrega de produtos, consideradas relevantes para o estudo em questão. São também apresentados resultados de experimentos computacionais com o modelo, os quais consideram instâncias fictícias de tamanho reduzido e uma instância com dados reais provida pela empresa. Como outras empresas distribuidoras atuam de forma similar à empresa estudada, acredita-se que o presente estudo possa também ser útil para uma reflexão de suas operações logísticas.

A estruturação deste artigo é definida como se segue. Na Seção 2 é feito um breve resumo sobre a empresa e os principais aspectos de sua logística de distribuição. Na Seção 3 são discutidos os principais trabalhos correlatos ao MTRVPTWMD. A modelagem matemática é apresentada na Seção 4. Os resultados e análises dos experimentos computacionais com as instâncias tratadas estão descritos na Seção 5. Finalmente, a Seção 6 apresenta as conclusões e os próximos passos da pesquisa.

2. Descrição do processo logístico

A empresa estudada está localizada na cidade de Ribeirão Preto, e atua no mercado de bebidas de forma a atender os processos básicos de produção de refrigerantes, bebidas à base de frutas, águas e chás, assim como na comercialização e distribuição de refrigerantes, sucos, águas, chás, cervejas, chopp, energéticos e hidrotônicos. É considerada de grande porte, visto que fatura em torno de R\$ 900 milhões por ano, tendo uma receita operacional bruta anual superior a R\$ 300 milhões e um mercado de cerca 25.000 clientes. Devido ao seu grande mercado, possui uma frota de 355 veículos, dos quais 222 correspondem a caminhões para entrega de produtos aos clientes, cujas capacidades de armazenamento variam entre 150 e 1.360 cubos.

Adicionalmente à frota própria, a empresa tem à disposição cinco caminhões fretados (caminhões de terceiros) de grande capacidade, os quais são contratados em períodos em que a demanda dos clientes excede a capacidade de transporte da frota própria. Geralmente o último trimestre do ano e o mês de fevereiro são os períodos de maior contratação de caminhões fretados, sendo estes tradicionalmente utilizados no atendimento de clientes com maior demanda, tais como supermercados e hipermercados. A disponibilidade dos caminhões fretados é considerada suficiente para os períodos sazonais, ainda que não evite que algumas demandas não sejam atendidas em um dado dia quando o porte da demanda não compensa o custo do uso do caminhão.

2.1 Restrições do roteamento

A elaboração das rotas para entrega de produtos considera diferentes tipos de restrições. Alguns desses tipos não surgem da adoção de alguma política interna da empresa (como a duração da jornada, o número máximo de rotas diárias, entre outras), mas são típicas da logística

urbana, atingindo, portanto, outras empresas envolvidas na distribuição de produtos. Esta seção ressalta algumas das principais restrições observadas.

a) Restrições de circulação de veículos em áreas centrais

Algumas cidades da área de atuação da empresa possuem restrições quanto ao horário em que os tipos de caminhões podem trafegar em regiões centrais. De fato, leis municipais restringem os horários de circulação nessas áreas em função do porte do veículo. Na cidade de Ribeirão Preto, por exemplo, todos os veículos, independente do seu porte, podem trafegar até às 10:00 hs. A partir desse horário apenas caminhões com capacidade de 150 cubos podem trafegar.

Outra restrição, desta vez, imposta pela própria empresa, proíbe o tráfego de seus caminhões a partir de 1.160 cubos em áreas centrais, em qualquer horário. Tal imposição se deve à grande dificuldade de circulação desses longos veículos em ruas estreitas ou com grande volume de tráfego, comuns nos centros das cidades.

b) Restrições de compatibilidade entre caminhões e clientes

Em certos clientes, a descarga dos produtos só é possível se o caminhão possuir equipamentos que viabilizem tal operação. Assim sendo, é necessário impor restrições que prescrevam os tipos de caminhões compatíveis com cada cliente. Enquanto clientes de menor porte são compatíveis com qualquer tipo de caminhão, grandes supermercados aceitam apenas caminhões de 1360 cubos. Esses estabelecimentos geralmente possuem uma área elevada e específica para o recebimento de produtos (denominada “plataforma”), o que requer caminhões de entrega equipados com uma plataforma de elevação.

c) Restrições de janelas de tempo de clientes

Outra restrição presente na operação são as janelas de tempo dos clientes, ou seja, o instante de tempo em que os clientes precisam ter o serviço iniciado. A empresa não considera janelas de tempo para cada cliente, apenas para o segmento dos “clientes restaurantes”, os quais requerem que o início do serviço ocorra até às 09:00 hs. Esse limite superior leva em conta o tempo requerido de resfriamento de alguns produtos antes do horário de abertura desses estabelecimentos ao público. O limitante inferior dessa janela de tempo, comum a todos restaurantes, corresponde, por sua vez, ao início da jornada de trabalho dos entregadores.

2.3 O processo de roteamento

Todas as cidades atendidas pela empresa são setorizadas, ou seja, são categorizadas de tal maneira que cada cliente está associado a uma região de entrega. Uma vez que a carteira de entregas de um determinado dia é fornecida pelos consultores de venda, o sistema de informação utilizado para o roteamento (*Roadnet* - UPS Logistics Group) gera rotas respeitando essa setorização. No entanto, os operadores do sistema (conhecido como roteirizadores) têm liberdade de realizar trocas de clientes entre rotas distintas mesmo que esses clientes estejam em setores logísticos diferentes.

De acordo com os roteirizadores, as rotas geradas pelo sistema são de boa qualidade, mas geralmente são alteradas por não considerarem alguns eventos, tais como a existência de vias em manutenção. Também é possível que os roteirizadores façam alterações que relaxem restrições das rotas, caso isso implique em economia dos recursos. O tempo de readequação de uma rota dura, em média, 3 minutos. Os roteirizadores têm entre 2,5 e 3 horas para finalizarem a geração das rotas, a fim de que a próxima etapa no processo, o carregamento, seja iniciada sem atrasos.

2.4 Processo de entrega

A empresa utiliza dois entregadores (o motorista e seu ajudante) em cada caminhão. Devido à dificuldade de estacionamento dos veículos em regiões centrais das cidades, clientes próximos entre si são na prática “agrupados”, e para cada agrupamento se associa um único “ponto de parada” para o veículo designado para servir esses clientes. A entrega dos produtos aos clientes de um dado agrupamento (*cluster*) é então realizada pelo motorista e pelo ajudante que

visitam os clientes a pé a partir do local de parada. A necessidade do ajudante se deve aos tempos de serviço despendidos em cada agrupamento serem relativamente altos quando comparados ao tempo de deslocamento dos caminhões, de maneira que o uso do ajudante permite reduzir o tempo de conclusão das entregas e, conseqüentemente, aumentar o número de clientes atendidos durante a jornada de trabalho. O tempo total disponível para o processo de entrega é de 08:03 hs.

2.5 Mudanças do sequenciamento de clientes

Dentre as atividades administrativas no início de dia, o motorista (auxiliado pelo ajudante) avalia a rota gerada para o veículo. Nesse momento, é comum que a rota seja refeita manualmente, com a reorganização do sequenciamento dos clientes a serem visitados. Dentre os fatores que levam à mudança no sequenciamento, destacam-se:

- **Nível de serviço aos clientes**

Como os entregadores são um ponto de contato com o mercado, é natural que conheçam em maiores detalhes as preferências dos clientes relativa ao recebimento de produtos, preferências estas desconhecidas pelos roteirizadores. Aparte das janelas de tempo obrigatórias dos restaurantes, uma das preferências é o período em que o cliente prefere receber seus produtos. Alguns clientes desejam ser atendidos no início do dia para que possam fazer a limpeza do estabelecimento antes de sua abertura. Outras preferências dos clientes incluem solicitações para que o caminhão de entrega não seja estacionado na frente do estabelecimento ou que o caminhão de entrega seja estacionado na frente do estabelecimento, ou mesmo que os produtos sejam entregues em um local diferente do endereço do estabelecimento comercial. Essas preferências motivam os entregadores a revisarem o sequenciamento original, visando oferecer um maior nível de serviço.

- **Políticas de atendimento**

Outra decisão que implica diretamente na revisão do sequenciamento é a decisão de atender primeiro os maiores clientes, ou seja, aqueles com maior volume de carga. Tal prática faz com que boa parte dos produtos seja descarregada já no início da rota, aliviando a carga do veículo e liberando mais espaço para que os entregadores trabalhem internamente no veículo, além de aproveitar que a entrega dos maiores volumes seja feita com os entregadores ainda descansados.

O sequenciamento ainda pode ser novamente revisado pelo motorista em tempo real, em função das condições de trânsito, a existência de obras que dificultam a circulação nas áreas que o motorista deve trafegar, pela falta de vagas de estacionamento nas proximidades dos pontos de demanda da rota ou até mesmo pela mudança de priorização da empresa por conta de uma solicitação feita pelo cliente. A principal consequência quando o sequenciamento é revisado pelos entregadores é que pode gerar tanto rotas mais longas como mais curtas que as do sequenciamento original. As decisões tomadas pelo motorista são monitoradas pelo sistema de monitoramento em tempo real da empresa, que avisa aos operadores que entrem em contato com o motorista e indaguem a razão do desvio ou paradas mais longas do que o planejado.

2.6 Múltiplas viagens

Uma importante característica do processo de distribuição da empresa consiste na possibilidade dos caminhões realizarem múltiplas viagens em um mesmo dia de trabalho. Ou seja, o caminhão realiza uma primeira viagem, retorna ao depósito, é então carregado para atender outros clientes em uma viagem seguinte. Na prática da empresa, o número de viagens não é superior a dois, e a segunda viagem ocorre quando não é possível atender a demanda dos clientes na primeira viagem, seja devido a restrições de circulação de tipos de caminhões em certos períodos do dia, ou devido à demanda exceder a capacidade da frota. Nessas situações, além desses veículos fazerem uma segunda viagem, veículos fretados também podem ser contratados. Entretanto, um requerimento para a segunda viagem é que a demanda atendida corresponda a pelo menos 83% da capacidade do veículo.

2.7 Rotas perigosas

Um outro conceito diferenciado na operação da empresa são as rotas perigosas, ou seja, rotas com clientes localizados em bairros ou regiões controladas pelo comando do tráfico de drogas. Tais regiões possuem controle de entrada, saída e movimentação de pessoas e de veículos, e o processo de entrega exige uma cautela ainda maior. Em rotas com essas características a tripulação do caminhão passa a contar com um segurança. Note que o segurança não participa do processo de entrega dos produtos aos clientes; sua função é garantir a segurança dos tripulantes, da carga e do caminhão.

3. Alguns trabalhos correlatos

A consideração de múltiplos entregadores em rotas para redução de tempos de serviço é tratada em Ferreira e Pureza (2012) com a variante denominada Problema de Roteamento de Veículos com Múltiplos Entregadores (*Vehicle Routing Problem with multiple deliverymen - VRPMD*), e em Pureza *et al.* (2012) e Grancy e Reimann (2014a) com o Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo e Múltiplos Entregadores (*Vehicle Routing Problem with time windows and multiple deliverymen - VRPTWMD*). Esses autores propõem formulações matemáticas, heurísticas e meta-heurísticas para sua resolução. Em Grancy e Reimann (2014b), duas heurísticas de construção de *clusters* de clientes são avaliadas. Assim como no corrente trabalho, esses artigos endereçam a situação de entrega de grandes volumes de produtos em regiões de alta congestão.

O Problema de Roteamento e Programação de Veículos Multi-Viagem (*Multi-Trip Vehicle Routing and Scheduling Problem - MTRVSP*) é uma variante que assim como no problema da empresa estudada, permite-se que cada veículo realize mais de uma rota durante o período de planejamento e um único depósito é usado para recarregar os veículos antes dos mesmos realizarem viagens subsequentes. O problema é endereçado em Taillard *et al.* (1996), Brandão e Mercer (1997, 1998), Petch e Salhi (2003), Salhi e Petch (2007), Olivera e Viera (2007) e Seixas e Mendes (2013). Azi *et al.* (2007) propõe um algoritmo exato para a situação com um único veículo e a presença de janelas de tempo, enquanto Azi *et al.* (2010) abordam o caso com múltiplos veículos.

4. Descrição do problema

O problema discutido na Seção 2 consiste em definir rotas diárias para uma frota de caminhões heterogênea que parte e retorna ao depósito central da empresa, com vistas à entrega de produtos a clientes localizados em centros urbanos. A frota consiste de caminhões próprios e fretados, e para cada uma dessas categorias, incorrem-se custos específicos. No caso dos caminhões próprios, tem-se apenas custos variáveis de deslocamento (combustível e manutenção), enquanto apenas custos de contratação (fixos) incidem em caminhões fretados. Além desses custos, a elaboração das rotas deve minimizar o número de entregadores, e maximizar o número de clientes servidos da carteira em questão, dado que não há garantia de atendimento de todos os clientes da carteira do dia em questão.

Cada ponto visitado em uma dada rota (nó) representa o depósito ou uma parada do caminhão, seja para atender um único cliente ou um *cluster* de clientes geograficamente próximos entre si. Admite-se que a definição dos *clusters* de clientes tenha sido feita previamente pelo usuário, seja manualmente a partir de informações das ruas, demanda e proximidade dos clientes, ou por um algoritmo de agrupamento. De igual forma, admite-se que os pontos de parada sejam a exata localização do cliente único ou fornecidos pelo usuário no caso de *clusters* de clientes. Janelas de tempo podem incorrer em alguns *clusters*, e correspondem a um período previamente acordado pela empresa e os clientes do *cluster* em questão.

A rota de cada caminhão, aqui definida como o trajeto que realiza entre sua partida do depósito no início da jornada de trabalho e seu retorno ao depósito quando suas atividades foram

completadas, pode contemplar até duas viagens, desde que o tempo total de rota não viole a duração da jornada de trabalho decrementada da duração estimada das atividades administrativas e da duração do intervalo de almoço. A segunda viagem ocorre quando o caminhão, após finalizar as entregas da primeira viagem, retorna ao depósito para um novo carregamento de produtos, partindo então para entregá-los.

Em cada viagem, a carga total transportada não deve exceder a capacidade do caminhão, e o tamanho da tripulação (motorista, entregadores e segurança) está limitada à capacidade da cabine do veículo. O número de entregadores pode variar da primeira para a segunda viagem de um caminhão, uma vez que mudanças na carga de trabalho podem requerer um número maior ou menor de entregadores. Em caso de rotas que exigem a presença de um segurança, o número máximo de entregadores se reduz em uma unidade.

Clientes servidos em uma dada rota devem ser compatíveis com o tipo de caminhão. Além disso, caminhões de grande porte estão limitados a trafegar em alguns bairros, em especial regiões centrais, em determinados períodos do dia.

4.2 Formulação matemática

O problema descrito na seção anterior combina características do VRPTWMD tratado em Pureza *et al.* (2012) e do MTVRPTW em Seixas (2013), além de várias restrições adicionais. A rede de fluxo (Figura 1) é representada por um grafo $G(n+2, A)$, no qual são considerados três tipos de nós: $n-1$ pontos de parada e 3 pontos de origem e/ou destino das viagens. Note que o depósito é tanto origem como destino das viagens, de maneira que é representado por outras duas cópias. Especificamente, é representado pelos nós O_1 (origem da primeira viagem), O_2 (destino da primeira viagem e origem da segunda viagem), ..., O_{R+1} (destino da R -ésima viagem).

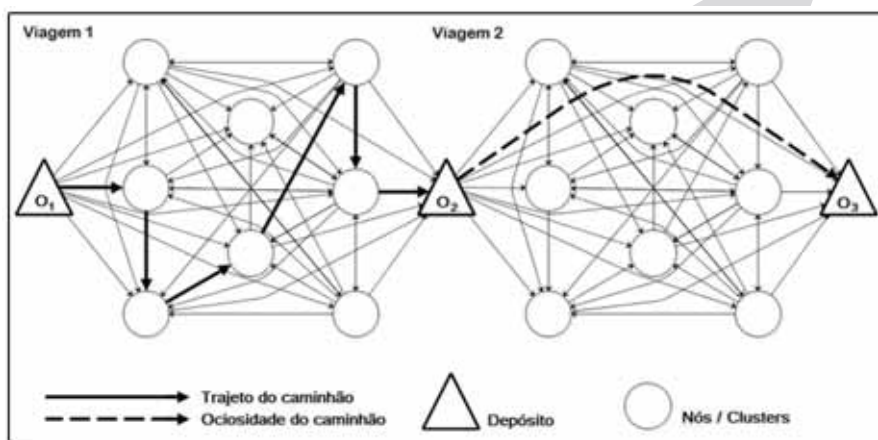


Figura 1 – Rede de fluxo e rota de um caminhão.

Note que para efeitos de formulação matemática, uma rota consiste de exatas duas viagens, as quais podem representar três possíveis situações: (i) a ociosidade do caminhão se o trajeto da primeira e da segunda viagem forem $O_1 \rightarrow O_2$ e $O_2 \rightarrow O_3$, respectivamente; (ii) uma viagem de entrega seguida da ociosidade do caminhão se o trajeto da primeira viagem for diferente de $O_1 \rightarrow O_2$ e o trajeto da segunda viagem for $O_2 \rightarrow O_3$; e (iii) duas viagens de entrega se o trajeto da primeira e da segunda viagem forem diferentes de $O_1 \rightarrow O_2$ e $O_2 \rightarrow O_3$, respectivamente. A Figura 1 ilustra a situação (ii).

Índices:

i, j, h, m Pontos de parada, depósito e suas cópias. Se i é ponto de parada, $i = C_1, C_2, \dots, C_n$.

Se i é o depósito ou suas cópias, então $i = O_1, O_2, \dots, O_{R+1}$

k, o Caminhões da frota ($k, o = 1, \dots, K$)

l, g Tamanho da tripulação (motorista, ajudantes e segurança) designada a um veículo ($l, g = 1, \dots, L$).

Se o tamanho da tripulação é l , diz-se que o veículo viaja em modo l

r Viagens ($r = 1, \dots, R$)

Conjuntos:

C	Nós pontos de parada
D	Nó depósito e suas cópias
OWN	Caminhões próprios
$CHARTER$	Caminhões fretados
B	Pontos de parada localizados na zona central da cidade
A	Pontos de parada localizados em bairros perigosos
E	Caminhões com restrições de circulação na zona central da cidade
U_i	Caminhões compatíveis com o nó i

Dados de entrada:

C_o	Custo unitário de deslocamento de um caminhão da frota própria (R\$/km)
C_s	Custo fixo diário de contratação de um caminhão fretado (R\$)
P_i	Prêmio pelo atendimento dos clientes associados ao ponto de parada i (R\$)
G	Custo unitário de alocação de funcionários a um caminhão (R\$/funcionário)
D_{ij}	Distância do nó i ao nó j (km)
DC_{ij}	Distância do nó $i \in B$ até a fronteira da zona central dado que o veículo ao sair de i se dirige a um nó $j \notin B$ (km)
V_k	Velocidade do caminhão k (km/h)
Q_k	Capacidade do caminhão k (cubos)
q_j	Demanda no nó i (cubos). A demanda em $i \in D$ é igual a zero
a_i, b_i	Instante de tempo mais cedo e mais tarde para início do serviço no cluster i
TS_{il}	Tempo de serviço no nó i com l entregador (min)
TC	Tempo de carregamento de um caminhão para a segunda viagem do dia (min)
F	Instante de tempo máximo para circulação de caminhões k na zona central da cidade (min)
W	Duração da jornada de trabalho (min)
$Pmin$	Percentual mínimo de utilização da capacidade do caminhão na segunda viagem

Variáveis:

x_{ijklr}	1 se o caminhão k visita o nó j imediatamente após o nó i no modo l na viagem r 0, caso contrário ($i, j \in C \cup D; i \neq j; k = 1, \dots, K; l = 1, \dots, L; r = 1, \dots, R$)
Y_{iklr}	Carga do caminhão k após servir o nó i modo l na viagem r ($i, j \in C \cup D; k = 1, \dots, K; l = 1, \dots, L; r = 1, \dots, R$)
T_{iklr}	Instante de início de serviço no nó i pelo caminhão k no modo l na viagem r ($i, j \in C \cup D; k = 1, \dots, K; l = 1, \dots, L; r = 1, \dots, R$). Para $i \in D$ é também o instante de chegada em i

$$\begin{aligned}
 \text{Min } f = & C_o \sum_{r=1}^R \sum_{i \in C \cup \{O_r\}} \sum_{j \in C \cup \{O_{r+1}\}} \sum_{k \in OWN} \sum_{l=1}^L \left(\frac{D_{ij}}{V_k} \right) x_{ijklr} \\
 & + C_s \sum_{j \in C \cup \{O_2\}} \sum_{k \in CHARTER} \sum_{l=1}^L x_{O_1 j k l} - \sum_{r=1}^R \sum_{i \in C \cup \{O_r\}} \sum_{j \in C} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L P_j x_{ijklr} \\
 & + G \sum_{r=1}^R \sum_{j \in C} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L l x_{O_r j k l r}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^R \sum_{i \in C \cup \{O_r\}} \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K x_{ijklr} \leq 1, \quad j \in C \tag{2}$$

$$\sum_{r=1}^R \sum_{j \in C \cup \{O_{r+1}\}} \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K x_{ijklr} \leq 1, \quad i \in C \tag{3}$$

$$\sum_{i \in C \cup \{O_r\}} x_{ihklr} = \sum_{j \in C \cup \{O_{r+1}\}} x_{hjklr}, \quad r = 1, \dots, R; h \in C; k = 1, \dots, K; l = 1, \dots, L \quad (4)$$

$$\sum_{i \in C \cup \{O_r\}} \sum_{l=1}^L x_{iO_{r+1}klr} = 1, \quad r = 1, \dots, R; k = 1, \dots, K \quad (5)$$

$$\sum_{j \in C \cup \{O_{r+1}\}} \sum_{l=1}^L x_{O_rjklr} = 1, \quad r = 1, \dots, R; k = 1, \dots, K \quad (6)$$

$$\sum_{i \in C \cup \{O_r\}} \sum_{g=1}^L x_{iO_{r+1}kgr} = \sum_{j \in C \cup \{O_{r+2}\}} \sum_{l=1}^L x_{O_{r+1}jkl(r+1)}, \quad (7)$$

$$r = 1, \dots, R-1; k = 1, \dots, K$$

$$y_{O_rklr} = \sum_{i \in C \cup \{O_r\}} \sum_{j \in C} \sum_{l=1}^L q_j x_{ijklr} \quad r = 1, \dots, R; k = 1, \dots, K \quad (8)$$

$$y_{jklr} \leq y_{iklr} - q_j x_{ijklr} + Q_k (1 - x_{ijklr}) \quad (9)$$

$$r = 1, \dots, R; i \in C \cup \{O_r\}; j \in C \cup \{O_{r+1}\}; k = 1, \dots, K; l = 1, \dots, L$$

$$t_{jklr} \geq t_{iklr} + TS_{il} + \frac{D_{ij}}{V_k} - W(1 - x_{ijklr}) \quad (10)$$

$$r = 1, \dots, R; i \in C \cup \{O_r\}; j \in C \cup \{O_{r+1}\}; k = 1, \dots, K; l = 1, \dots, L$$

$$t_{O_{R+1}klR} \leq W \quad k = 1, \dots, K; l = 1, \dots, L \quad (11)$$

$$x_{ijklr} = 0 \quad k \notin \{U_i \cap U_j\} \quad (12)$$

$$t_{iklr} + TS_{il} + \frac{DC_{ij}}{V_k} - W(1 - x_{ijklr}) \leq F \quad (13)$$

$$r = 1, \dots, R; i \in B; j \notin B; k \in E; l = 1, \dots, L$$

$$t_{O_rkgr} \geq t_{O_rkl(r-1)} + TC - W \left(2 - \sum_{j \in C} x_{O_{r-1}jkl(r-1)} - \sum_{j \in C} x_{O_rjkgr} \right) \quad (14)$$

$$r = 2, \dots, R; k = 1, \dots, K; l, g = 1, \dots, L$$

$$\sum_{l=1}^L x_{O_rO_{r+1}klr} \leq \sum_{g=1}^L x_{O_r+1O_{r+2}kg(r+1)} \quad r = 1, \dots, R-1 \quad (15)$$

$$\sum_{i \in C \cup \{O_r\}} \sum_{j \in C} q_j x_{ijklr} \geq P_{min} Q_k - Q_k \sum_{j \in C} (1 - x_{O_rjklr}) \quad (16)$$

$$r = 2, \dots, R; k = 1, \dots, K; l = 1, \dots, L$$

$$x_{ijklr} \in \{0,1\}, \quad r = 1, \dots, R; i, j \in C \cup D; k = 1, \dots, K; l = 1, \dots, L \quad (17)$$

$$y_{ijklr} \geq 0, \quad r = 1, \dots, R; i, j \in C \cup D; k = 1, \dots, K; l = 1, \dots, L \quad (18)$$

$$a_i \leq t_{iklr} \leq b_i, \quad r = 1, \dots, R; i, j \in C \cup D; k = 1, \dots, K; l = 1, \dots, L \quad (19)$$

A função objetivo (1) minimiza os custos variáveis com a frota própria (*own*), os custos fixos com a frota terceirizada (*charter*) e o número de entregadores decrementados pelo valor de prioridade agregada dos clientes associados aos pontos de parada atendidos. Os pesos P_i e G são tais que $Co, Cs \gg P_i$ e $P_i \gg G$.

As restrições (2) garantem que no máximo um caminhão k em um modo l em uma viagem r chega a cada ponto de parada j a partir de outro ponto de parada i ou do nó de origem da viagem r . As restrições (3) impõem que no máximo um caminhão k em um modo l em uma viagem r parta para um ponto de parada j ou para o nó de destino da viagem r . As restrições (4) são equações de conservação de fluxo que garantem que o mesmo caminhão k que entra em um ponto de parada h em um modo l parte de h para um ponto de parada ou destino da viagem r no mesmo modo l .

As restrições (5) garantem que cada caminhão k na viagem r chega ao depósito de destino de r em um modo l a partir de um único nó i (parada ou origem da viagem r). A restrição (6) garante que cada caminhão k na viagem r sai do depósito de origem de r em um modo l para um único nó j (parada ou destino da viagem r).

As restrições (7) asseguram que cada caminhão k na viagem r ($r \neq R$) chegue ao nó de destino de r em um modo g e parta na viagem $r + 1$ para um nó j (parada ou destino de $r + 1$) em um modo l . As restrições (8) definem a carga de cada veículo k no nó origem de cada viagem r como igual ao total das demandas dos clientes dos pontos de parada visitados por k em r . As restrições (9) computam a carga no caminhão k em um modo l na viagem r que visita o nó j logo após visitar o nó i . As restrições (10) definem os instantes de início de serviço de cada nó j visitado imediatamente após o nó i na rota r com o veículo k no modo l .

As restrições (11) prescrevem que o tempo total de rota não exceda o tempo máximo que garante a observância da jornada de trabalho dos entregadores. As restrições (12) impedem o fluxo do caminhão k entre nós i e j , caso não sejam ambos compatíveis com k .

As restrições (13) garantem a ausência de caminhões com restrições de circulação na zona central da cidade em períodos em que sua circulação é vedada. Isso é feito impondo-se que se um veículo com restrições de circulação parte de um nó i localizado na zona central para visitar um nó j fora dessa zona, então ele precisa cruzar a fronteira do centro até o instante máximo de circulação F . O ponto de cruzamento da fronteira corresponde ao local (rua ou nó) que o caminhão certamente (ou provavelmente) cruzaria ao se dirigir de i para j , podendo ser identificado, por exemplo, a partir da análise do caminho mais curto entre i e j . Assim, para cada par de nós (i, j) ($i \in B; j \notin B$) um único ponto de cruzamento da fronteira do centro é identificado em uma etapa de pré-processamento. Como a distância de i para a fronteira do centro é função do destino j , ela pode ser referenciada por DC_{ij} , ou seja, em termos de i e j .

As restrições (14) expressam a relação entre o instante de chegada do veículo k no modo g no nó de destino da viagem r e o instante de partida do mesmo veículo k no modo l do nó de origem da viagem $r - 1$. Como o nó de origem da viagem r é igual ao nó de destino da viagem $r - 1$, a função da restrição é, portanto, relacionar esses instantes de tempo considerando que pode haver mudança de modo da viagem $r - 1$ para a viagem r . Caso a segunda viagem ocorra, o instante de partida de k nessa viagem é igual ao instante de chegada de k da primeira viagem acrescido do tempo de recarregamento.

As restrições (15) garantem que a viagem r só é realizada se a viagem $r - 1$ tiver sido. Note que essas restrições eliminam soluções simétricas. As restrições (16) garantem que a segunda viagem ocorra apenas se a utilização da capacidade do veículo atingir o valor mínimo requerida. Finalmente, as restrições (17) a (19) definem o domínio das variáveis de decisão.

5. Experimentos computacionais

Experimentos com o modelo (1)-(19) contemplaram instâncias fictícias de tamanho reduzido (*toys*) e instâncias reais cujos dados foram fornecidos pela empresa estudada. O modelo foi implementado na linguagem de modelagem GAMS 24.0.1, e resolvido utilizando-se o *software* de otimização CPLEX 12.5.0.1, adotando como critérios de parada *gap* nulo de otimalidade ou 18.000 segundos (5 horas) de processamento. Os experimentos foram realizados em um computador Intel i7 com 3,4 GHz e 16 GB de memória RAM.

5.1 Experimentos com exemplos *toy*

Com o propósito de validar o modelo, cinco exemplos de tamanho reduzido (*toys*) foram criados de forma a incorporar gradualmente características que ativem restrições de áreas centrais, bairros perigosos, compatibilidade de caminhões e *clusters*, janelas de tempo e capacidade da frota própria, com vistas a verificar seu impacto nas soluções. A Tabela 1 mostra alguns dados relevantes de cada *toy* e os resultados obtidos.

Conforme observado na tabela, foram obtidas soluções com *gaps* inferiores a 1% para *toys* 1 a 3. Dentre estes, *toy* 1 obteve solução comprovadamente ótima. Sendo um exemplo base,

com *clusters* periféricos, demandas relativamente baixas, total compatibilidade de caminhões e *clusters*, todos os *clusters* foram atendidos em uma única viagem e com apenas um entregador por caminhão. *Toy 2*, por sua vez, inclui *clusters* de regiões centrais, o que provocou a necessidade de uma segunda viagem para dois caminhões e o uso de um número maior de entregadores. Para *toy 3*, a existência de janelas de tempo e incompatibilidade entre alguns caminhões e *clusters* resultou no aumento da distância e do número máximo de entregadores em relação a *toy 2*. Note que nesses dois exemplos, são utilizados os mesmos *clusters*, de maneira que o impacto de janelas de tempo e incompatibilidade é evidenciado.

A inclusão de bairros perigosos e alta demanda em *toy 4* provocou não só aumento do custo com um número maior de viagens, mas também o não atendimento de 2 dos 18 *clusters* do exemplo por falta de veículos. Finalmente, a disponibilização de um caminhão fretado em *toy 5*, permitiu que um desses *clusters* fosse atendido. Ainda assim, a demanda não é totalmente satisfeita devido não à falta de caminhões, mas pela restrição de carga mínima para realização das viagens. Note que os *gaps* das soluções desses dois exemplos são substancialmente maiores que os *gaps* dos exemplos anteriores, sugerindo que se torna mais difícil resolver otimamente o modelo conforme a instância tem seu porte aumentado e se torna mais restrita.

Tabela 1 - Resultados computacionais dos exemplos toys.

<i>Toy</i>	Nº de <i>clusters</i>	Número de veículos	Custo (\$)	Distância (km)	Nº máximo de entregadores utilizados	Nº de <i>clusters</i> não atendidos	Tempo computacional (s) *	<i>Gap</i> (%)
1	8	4	55,22	50,2	4	-	432	0
2	14	4	78,43	71,3	8	-	18.000 (3.098)	0,4
3	14	4	79,64	72,4	10	-	18.000 (16.221)	0,2
4	18	4	97,46	88,6	10	2	18.000 (16.361)	12,9
5	19	5	589,89	81,7	10	2	18.000 (16.303)	12,7

* O número entre parêntesis representa o tempo de obtenção da melhor solução

5.2 Experimentos com dados reais da operação logística da empresa

Com o propósito de verificar a aplicabilidade do modelo em situações reais, uma instância fornecida pela empresa estudada foi considerada. A instância (RE01) contempla 58 clientes da área central de Ribeirão Preto, que na solução da empresa foram atendidos por 3 caminhões de mesma capacidade. Cada caminhão realizou duas viagens com 2 entregadores por viagem (tripulação padrão) e nenhuma informação sobre a criação de agrupamentos (decisão dos entregadores) foi fornecida.

O Quadro 1 apresenta medidas relevantes da solução da empresa. As distâncias e custos foram estimados considerando *clusters* prováveis de clientes, definidos a posteriori a partir da análise da sequência de visita da rota de cada caminhão. Um resultado interessante é o fato da capacidade do veículo 3 ter sido violada na 1ª viagem, corroborando a discussão da Seção 2.3 de que alterações realizadas pelos roteirizadores podem gerar rotas que não atendem todas as restrições. De igual forma, a capacidade do veículo 1 na viagem 2 não atingiu o mínimo necessário (83%) de utilização da capacidade veicular.

Como não foram fornecidas informações sobre o agrupamento dos clientes (decisão dos entregadores), e sendo uma instância relativamente grande para resolução do modelo, os clientes foram agrupados manualmente, considerando: a) distância entre os clientes; b) janelas de tempo; c) *clusters* com demanda máxima de 150 cubos. Com o processo de agrupamento, obteve-se a instância CE01 com 33 *clusters*, a qual foi resolvida com o modelo proposto.

Devido ao grande número de variáveis, o modelo tornou-se complexo a ponto de não se obter uma solução ótima, ou pelo menos, de não se provar sua otimalidade. Ainda assim, esse tempo de processamento produziu uma solução com *gap* de apenas 0,24%. A Tabela 2 apresenta

medidas relevantes da solução do modelo. A Figura 2 ilustra as rotas geradas, onde é possível observar que todos os *clusters* foram atendidos, o veículo 1 utilizou 2 entregadores nas duas viagens, a viagem 1 dos veículos 2 e 3 utilizaram um único entregador, enquanto que a viagem 2 dos veículos 2 e 3 utilizaram 3 entregadores (note que a solução da empresa utiliza, como tripulação padrão, 2 entregadores por viagem). Ressalta-se que os *clusters* C5, C7, C10, C13, C15, C18, C19, C22 e C23 pertencem ao segmento restaurantes, ou seja, possuem janelas de tempo.

Quadro 1 – Medidas da solução da empresa (instância RE01).

Veículo	Viagem 1				Viagem 2			
	Custo* (R\$)	Distância* (Km)	Capacidade utilizada (%).	Nº Clientes	Custo* (R\$)	Distância* (Km)	Capacidade utilizada (%).	Nº Clientes
1	14,3	13,0	98	10	14,2	12,9	68,7	10
2	13,8	12,5	89,3	10	14,9	13,5	95,3	13
3	14,2	12,9	103,3	5	16,0	14,5	86,0	10

* Estimado com base em *clusters* elaborados *a posteriori*

Tabela 2 – Medidas da solução do GAMS/CPLEX com o modelo (1)-(19) (instância CE01).

Veículo	Viagem 1				Viagem 2			
	Custo (R\$)*	Distância (Km)*	Capacidade utilizada (%).	Nº Clientes	Custo (R\$)*	Distância (Km)*	Capacidade utilizada (%).	Nº Clientes
1	13,4	12,2	99,3	12	13,2	12,0	96,7	10
2	11,8	10,7	78,7	8	15,1	13,7	94,7	6
3	15,5	14,1	74,0	10	15,2	13,8	97,3	12

* Calculado com base em *clusters* elaborados *a priori*

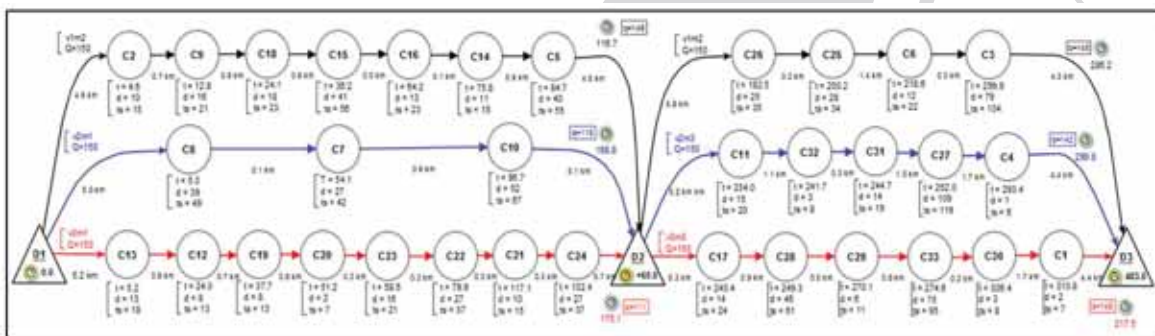


Figura 2 – Rotas da instância CE01.

Apesar das instâncias procurarem representar a mesma situação real, não é possível comparar suas soluções em termos de custo variável, tempo de rota, ou distância percorrida devido à falta de informações sobre o real agrupamento da instância RE01. Por outro lado, é fato que nenhuma restrição foi violada na solução produzida pelo CPLEX, diferentemente do que ocorreu na solução da empresa.

6. Conclusões

Este trabalho endereçou as operações de entrega de produtos a clientes em áreas urbanas de uma empresa produtora e distribuidora de bebidas. Foi proposto um modelo de otimização que incorpora grande parte das restrições impostas no roteamento dos veículos responsáveis pela

distribuição, e que permitiu entender a complexidade e dificuldades enfrentadas nesta importante operação logística. Como outras empresas distribuidoras atuam de forma similar à empresa estudada, o presente estudo pode também ser útil para uma reflexão de suas operações logísticas.

O modelo foi validado com exemplos de tamanho reduzido, e quando utilizado para o tratamento de uma situação real, mostrou que métodos de programação matemática podem produzir soluções melhores que as atualmente praticadas pela empresa. Em particular, restrições antes violadas, como capacidade dos caminhões e utilização mínima da capacidade dos caminhões para realização da segunda viagem, foram respeitadas.

Devido aos tempos computacionais relativamente altos de resolução do modelo, os próximos passos da pesquisa incluem propor métodos heurísticos, em particular, meta-heurísticas. Nesse sentido, vêm sendo considerados algoritmos de colônia de formigas e algoritmos genéticos com chaves aleatórias tendenciosas. Pretende-se também utilizar as soluções desses métodos como solução inicial do modelo matemático, como uma tentativa de agilizar a convergência do método de solução (*branch&cut*). O delineamento e resolução de novas instâncias representando situações reais da empresa, e a validação das soluções junto aos operadores logísticos também fazem parte de nossa agenda de pesquisa.

Referências

- Azi, N.; Gendreau, M.; Potvin, J.-Y.** (2007), An exact algorithm for a single vehicle routing problem with time windows and multiple routes. *European Journal of Operational Research*, 178, 755-766.
- Azi, N.; Gendreau, M.; Potvin, J.-Y.** (2010), An exact algorithm for a vehicle routing problem with time windows and multiple use of vehicles. *European Journal of Operational Research*, 202, 756-763.
- Brandao, J.; Mercer, A.** (1997), A tabu search algorithm for the multi-trip vehicle routing and scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 100, 180-191.
- Brandao, J.; Mercer, A.** (1998), The multi-trip vehicle routing problem. *Journal of the Operational Research Society*, 49, 799-805.
- Ferreira, V. O.; Pureza, V.** (2012), Some experiments with a savings heuristic and a tabu search approach for the vehicle routing problem with multiple deliverymen. *Pesquisa Operacional*, 32, 443-463.
- Garey, M. R.; Johnson, D. S.** (1979), *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co. New York, NY.
- Grancy, G. S.; Reimann, M.** (2014a), Vehicle routing problems with time windows and multiple service workers: a systematic comparison between ACO and GRASP. *Central European Journal of Operations Research*.
- Grancy, G. S.; Reimann, M.** (2014b), Evaluating two new heuristics for constructing customer clusters in a WRPTW with multiple service workers. *Central European Journal of Operations Research*.
- Olivera, A., O. Viera.** (2007), Adaptive memory programming for the vehicle routing problem with multiple trips. *Computers and Operations Research*, 34, 28-47.
- Petch, R. J.; Salhi, S.** (2003), A multi-phase constructive heuristic for the vehicle routing problem with multiple trips. *Discrete Applied Mathematics*, 133, 69-92.
- Pureza, V.; Morabito, R.; Reimann, M.** (2012), Vehicle routing with multiple deliverymen: Modeling and heuristic approaches for the VRPTW. *European Journal of Operational Research*, 218, 636-647.
- Salhi, S.; Petch, R. J.** (2007), A GA based heuristic for the vehicle routing problem with multiple trips. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, 6, 591-613.
- Seixas, M. P.; Mendes, A. B.** (2013), Column generation for a multitrip vehicle routing problem with time windows, driver work hours, and heterogeneous fleet. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2013.
- Taillard, E. D.; Laporte, G.; Gendreau, M.** (1996), Vehicle routing with multiple use of vehicles. *Journal of the Operational Research Society*, 47, 1065-1070.