

MODELO DE OTIMIZAÇÃO EM DOIS NÍVEIS PARA LOCALIZAÇÃO HIERÁRQUICA DE HUBS

Guina Sotomayor Alzamora

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)
Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico, Rio de Janeiro, Brasil
guinas@gmail.com

Fernanda M P Raupp

Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC)
Avenida Getúlio Vargas 333, Quitandinha, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil
fernanda@lncc.br

RESUMO

O problema de localização de *hubs* visa encontrar pontos de concentração de fluxos numa rede, de modo que a soma das ligações compartilhadas entre os pontos da rede seja minimizada. Neste trabalho, um modelo de otimização em dois níveis para o problema fundamental de localização de *hubs* com alocação simples numa rede de fluxos é apresentado. O modelo integra as decisões hierárquicas sobre localização de *hubs* regionais e centrais, no primeiro nível, e a alocação de fluxos aos pontos da rede, no segundo nível, de modo a minimizar as distâncias percorridas pelos fluxos. Experimentos computacionais com o modelo proposto são realizados para instâncias dos sistemas de transporte aéreo americano e brasileiro, usando o solver CPLEX e um software com recursos gráficos de implementação própria. Resultados numéricos preliminares indicam o potencial do modelo de dois níveis aqui proposto.

PALAVRAS CHAVE. Problema de localização de *hubs*, Localização hierárquica, Otimização em dois níveis.

Área Principal: L&T – Logística e Transportes, PM – Programação Matemática

ABSTRACT

The hub location problem aims to find points of concentration in a network flow so that the sum of the connections shared between the network points is minimized. In this work, a bi-level optimization model for the fundamental hub location problem with simple allocation in a network flow is presented. The proposed model integrates the hierarchical decisions on locating regional and central hubs, at the first level, and the allocation of flows between points of the network, at the second level, aiming at minimizing the distances traveled by the flows. Computational experiments with the proposed model are conducted for instances of the American and the Brazilian air transportation systems, using the CPLEX solver and a own software implemented with graphical features. Preliminary numerical results show the potential of the bi-level model proposed here.

KEYWORDS. Hub location problem. Hierarchy location. Bi-level optimization.

Main Area: L & T – Logistics and Transport, MP – Mathematical Programming

1. Introdução

Conhecido geralmente por problema de localização de *hubs*, o problema de desenho de rede de fluxos do tipo *hub-and-spoke* trata da localização de nós do tipo *hub* (concentradores) e da alocação de fluxos entre nós *spokes* (terminais) e *hubs*, de modo a satisfazer a demanda e otimizar um ou mais critérios, [An et al., 2011]. A alocação pode ser do tipo simples ou múltipla; no caso de simples, *spokes* são alocados exatamente a um único *hub*, enquanto que, no caso de múltipla, um *spoke* pode ser alocado a mais de um *hub*.

Hubs são concentradores de fluxos introduzidos em redes para reduzir o número de conexões entre nós origem e destino, quando comparados a uma rede sem *hubs*, [Farahani et al., 2013]. De fato, a introdução de *hubs* em uma rede permite consolidar fluxos, gerando um número menor de conexões, e conseqüentemente aumentando a eficiência da rede, uma vez que permite um decréscimo significativo de custos operacionais com a economia de escala gerada [An et al., 2011]. Ainda, pode-se pensar em introduzir concentradores que interagem numa configuração de mais de uma camada [Şahin e Süral, 2007], permitindo a hierarquização de funcionalidades.

Uma visão geral da pesquisa já desenvolvida sobre problemas de localização de *hubs* é obtida com os trabalhos de [Alumur e Kara, 2008], [Campbell e O’Kelly, 2012], e [Farahani et al., 2013]. Neste último, se faz uma revisão e classificação de modelos, de métodos de solução, de aplicações, assim como se esboça tendências futuras. Já os trabalhos de [Farahani e Hekmatfar, 2009, Cap. 10], [Narula, 1986] e [Şahin e Süral, 2007] oferecem uma revisão sobre sistemas de localização hierárquica, em que descrevem o problema de localização como o de coordenação de decisões de localização de diferentes tipos de facilidades em sistemas multiníveis.

Neste trabalho, o problema fundamental de localização hierárquica de *hubs* em redes de fluxos é abordado, via apresentação de um modelo de otimização em dois níveis: para localização de *hubs* centrais e regionais, no primeiro nível, e alocação simples de fluxos entre os pontos da rede, no segundo nível, de modo a minimizar o número de ligações de fluxo entre nós origem-destino. As ligações resultantes do tipo *spoke–hub* regional, *hub* regional–*hub* central e *hub* central–*hub* central irão determinar o tipo de serviço e/ou de atendimento em cada nó da rede.

Vale lembrar que no problema fundamental de localização de *hubs*, proposto originalmente por [Campbell, 1994], não se considera fluxos diretos, mas sim fluxos que passam por pelo menos um e no máximo dois *hubs*. Quando existem duas categorias de *hubs*, os fluxos devem passar por pelo menos um *hub* regional e no máximo por dois *hubs* centrais, no caso de alocação simples.

Através de um modelo hierárquico, as decisões de localização e alocação podem ser determinadas simultaneamente. Mas, na prática, elas são decididas por diferentes tomadores de decisões. O planejador da rede de fluxos estima a localização das facilidades baseado na demanda dos clientes, e, ao mesmo tempo, escolhe diferentes padrões de localização que afetam a distribuição dos fluxos, influenciando nas decisões dos clientes, [Sun et al., 2008].

Nesse sentido, existe interesse em se ter um modelo de otimização em dois níveis para tratar da localização de dois tipos distintos de *hubs* e da alocação de fluxos, visando beneficiar tanto os planejadores como os clientes numa rede, ao reduzir o número de ligações de maior fluxo via *hubs* centrais e agilizar a passagem de fluxos menores via *hubs* regionais. Segundo [Colson et al., 2007], problemas de projeto de redes envolvendo agentes independentes são fonte de problemas modelados via otimização em dois níveis.

Algumas aplicações do problema de localização em dois níveis podem ser encontradas em: [Taniguchi et al., 1999] em que, visando a minimização de custos, as decisões de planejadores sobre localização e tamanho de terminais de transporte público estão no nível superior, enquanto que no nível inferior se determina a alocação de clientes e veículos à rotas; [Gao et al., 2005] onde decisões de localização de centros de distribuição são modeladas no nível superior e decisões de clientes no nível inferior; [Fischer, 2002] onde se apresenta um modelo de localização competitivo de um duopólio, a fim de localizar instalações de concorrentes, de modo a maximizar ganhos, em que são dados os preços de entrega e os custos de transporte; e [Dempe, 2002] que aponta o problema

de localização como uma temática promissora a ser desenvolvida na otimização multinível.

Aqui, redes de fluxos são sistemas de transporte aéreo, e fluxos são passageiros transportados entre os aeroportos dos sistemas. Na tentativa de superar o desafio para melhor atender a demanda crescente por esses sistemas, e consequentemente melhorar suas eficiências, propõe-se a estratégia de localização hierárquica de *hubs*.

A demanda por transporte aéreo no mundo superou a marca de 3,1 bilhões de passageiros em 2013 e, desde 2004, o volume mundial anual de passageiros tem aumentado em média 6,1% [ICAO, 2015]. No caso brasileiro, a demanda anual por transporte aéreo apresentou uma média de crescimento igual a 10,6%, muito superior à média mundial, entre os anos 2004 e 2013. Sem investimentos em infraestrutura que acompanhassem tal crescimento, verificou-se, nos últimos anos, o surgimento de gargalos operacionais e limitações de capacidade nos principais aeroportos brasileiros, comprometendo os fluxos de carga e de passageiros no país [Wanke, 2012].

Neste cenário, muitas companhias aéreas possuem dificuldades em planejar e programar voos que atendam satisfatoriamente seus clientes, uma vez que há aeroportos com amplo volume de tráfego somente em horas pico, e existem outros que atingem sua capacidade de uso durante muitas horas do dia [Gelhausen et al., 2013]. Para que essas restrições de capacidade nos aeroportos não se tornem uma barreira para o atendimento da demanda crescente por serviços do sistema de transporte aéreo no futuro, é razoável considerar a estratégia de inserção de *hubs* pelas companhias aéreas individualmente ou pelo responsável pela gerência de todo o sistema de transporte aéreo.

Ainda, neste trabalho, experimentos computacionais com o modelo de otimização em dois níveis são realizados, tendo como instâncias o sistema de transporte aéreo americano [O'Kelly, 1987] e o brasileiro [Alzamora et al., 2013]. No problema abordado, são conhecidos as localizações geográficas (latitude e longitude) dos aeroportos, e consequentemente as distâncias entre os aeroportos, os fluxos de passageiros entre aeroportos e as quantidades de *hubs* regionais e centrais a serem localizados. A escolha do número de aeroportos candidatos a serem *hubs* regionais e centrais é feita baseada no fluxo mínimo de passageiros, de acordo com [Alzamora et al., 2013] e [Costa et al., 2010]. Com a aplicação da técnica *parametric complementary pivot*, o modelo proposto foi reformulado num modelo de programação inteira mista, o qual foi resolvido com o algoritmo de *branch-and-cut* do solver CPLEX, versão 12.4, do software AIMMS. Os resultados obtidos são visualizados com o auxílio de um software desenvolvido com recursos gráficos.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, o modelo de otimização em dois níveis para o problema de localização hierárquica de *hubs* é apresentado. Na Seção 3, são mostradas as etapas para reformular o modelo em dois níveis num modelo de programação linear inteira mista equivalente. Os experimentos numéricos realizados com o modelo reformulado são apresentados na Seção 4. Finalmente, na Seção 5, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

2. Modelo de otimização em dois níveis

Nesta seção, o problema fundamental de localização hierárquica de *hubs* numa rede de fluxos com alocação simples é abordado, via a introdução de um modelo de programação em dois níveis. Baseado no modelo integrado de localização hierárquica de *hubs* proposto em [Alzamora e Raupp, 2015], o modelo aqui apresentado integra as decisões de localização simultânea de *hubs* regionais, para consolidação de fluxos menores, e de *hubs* centrais, para consolidação de fluxos maiores, no nível superior, e de decisões de alocação de fluxos entre pontos da rede, no nível inferior.

Em particular, num problema de otimização em dois níveis, no nível de hierarquia superior parte das variáveis de decisões estão condicionadas à otimalidade das soluções viáveis com respeito ao nível inferior. Por outro lado, no nível da hierarquia inferior, as variáveis de decisões são parametrizadas por parte ou todas as soluções viáveis do nível superior. Ao contrário da otimização multi-objetivo, a otimização multinível enfatiza o carácter não cooperativo entre os tomadores de decisões [Ben-Ayed, 1993].

Sejam os parâmetros: N o conjunto de n nós ou pontos dados, e seus índices $i, j, u, k, m \in N$; p o número de *hubs* regionais a serem localizados; q o número de *hubs* centrais a serem localizados; W_{ij} o fluxo entre os nós i e j ; e $[d_{ij}]_{n \times n}$ a matriz simétrica das distâncias, em que cada elemento d_{ij} é a distância do nó i ao nó j . Considere ainda as variáveis de decisão: z_{iuk} que indica a alocação do nó i ao *hub* regional u conectado ao *hub* central k ; x_{iuk} que representa a quantidade de fluxo, com origem ou destino no nó i , que passa através do *hub* regional u conectado ao *hub* central k ; e y_{ijkm} que representa a fração de fluxo do nó origem i ao nó destino j que passa pelos *hubs* centrais k e m nesta ordem, se $k = m$ então o fluxo passa por um único *hub* central. Então, o modelo de otimização em dois níveis proposto é:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (W_{ij} + W_{ji}) \sum_{u \in N} d_{iu} \sum_{k \in N} z_{iuk} \\ & + \sum_{i \in N} \sum_{u \in N} \sum_{k \in N} \alpha_R d_{uk} x_{iuk} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{u \in N} \sum_{k \in N} z_{uuk} = p \quad (2)$$

$$\sum_{u \in N} \sum_{k \in N} z_{iuk} = 1 \quad i \in N \quad (3)$$

$$z_{iuk} \leq z_{uuk} \quad i, u, k \in N \quad (4)$$

$$\sum_{u \in N} z_{iuk} \leq z_{kkk} \quad i, k \in N \quad (5)$$

$$\sum_{k \in N} z_{kkk} = q \quad (6)$$

$$\sum_{j \in N} (W_{ij} + W_{ji})(z_{iuk} - z_{juk}) \leq x_{iuk} \quad i, u, k \in N \quad (7)$$

$$z_{iuk} \in \{0, 1\} \quad i, u, k \in N \quad (8)$$

$$x_{iuk} \geq 0 \quad i, u, k \in N \quad (9)$$

onde, para cada valor de z_{iuk} , y_{ijkm} é a solução de

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} \alpha_C W_{ij} d_{km} y_{ijkm} \quad (10)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{m \in N} y_{ijkm} = \sum_{u \in N} z_{iuk} \quad i, j, k \in N \quad (11)$$

$$\sum_{k \in N} y_{ijkm} = \sum_{u \in N} z_{jum} \quad i, j, m \in N \quad (12)$$

$$y_{ijkm} \geq 0 \quad i, j, k, m \in N, \quad (13)$$

onde α_R e α_C são interpretados como fatores de economia de escala conseguida pela agregação de fluxos com a introdução de *hubs* regionais e centrais, respectivamente. A função objetivo (1), a ser minimizada no primeiro nível, representa o fluxo total percorrido entre *spokes* e *hub* regionais e entre *hubs* regionais e *hubs* centrais. A restrição (2) garante que há exatamente p *hubs* regionais a serem localizados, já as restrições em (3) indicam que cada nó *spoke* i é alocado a exatamente um único *hub* regional u que por sua vez é alocado a um único *hub* central k . As restrições em (4) garantem que um nó *spoke* i é alocado a um *hub* regional u já localizado. As restrições em (5) garantem que um nó i (*spoke* ou *hub* regional) seja alocado a um *hub* central k já localizado. A restrição (6) garante que há exatamente q *hubs* centrais a serem localizados. Note que um *hub* central também é *hub* regional. As restrições em (7) dizem respeito ao fluxo entre os *hubs* regionais

e centrais para cada *spoke*, representado por x_{iuk} . As restrições (8) definem z_{iuk} como variáveis de decisão de tipo binário, enquanto que as restrições (9) indicam que x_{iuk} são variáveis reais não negativas. A função objetivo (10), a ser minimizada no segundo nível, modela o fluxo total percorrido entre os *hubs* centrais. As restrições em (11) asseguram que um *hub* central k é factível, se um nó i é alocado a ele independentemente do destino; enquanto que por (12) assegura-se que um *hub* central m é factível, se um nó j é alocado a ele independentemente da origem. Por (13) as variáveis de decisões y_{ijkm} são reais não negativas.

O modelo (1)-(13) corresponde a um problema de otimização linear em dois níveis com variáveis mistas. No nível inferior, as variáveis reais são parametrizadas pelas variáveis binárias do nível superior. Porém, é interessante saber que, através de experimentos computacionais, [Skorin-Kapov et al., 1996] verificaram que os valores ótimos das variáveis reais y_{ijkm} são majoritariamente binários numa versão bastante simplificada do modelo (1)-(13), o modelo *q-hub*-mediana.

Visando a aplicação de um método solução exato, o modelo (1)-(13) será reformulado num modelo equivalente, correspondente a um problema de programação linear inteira mista.

3. Reformulação do modelo de dois níveis

Introduzida em [Bialas et al., 1980], a técnica *Parametric Complementary Pivot* (PCP) é frequentemente utilizada para a reformular o modelo de otimização em dois níveis num modelo com apenas um nível. De fato, sob certas condições, uma reformulação equivalente ao modelo original é alcançada substituindo-se o problema do segundo nível por suas condições de otimalidade de primeira ordem ou condições de KKT.

Aplicações da técnica PCP podem ser encontradas, por exemplo, em [Colson et al., 2007], [Dempe, 2002], [Vicente e Calamai, 1994]. Dentre os trabalhos relacionados ao problema de localização que aplica esta técnica, destacamos: [Camacho-Vallejo et al., 2014], [Sun et al., 2008] e o já mencionado [Gao et al., 2005].

Considerando o problema linear do segundo nível, com função objetivo (10) e restrições de igualdade (11)–(13), relativo ao problema de otimização em dois níveis (1)–(13), para i, j, u, k e $m \in N$, defina a função Lagrangiana como

$$\begin{aligned}
 L(y_{ijkm}, \rho_{ijk}, \sigma_{ijm}, \phi_{ijkm}) &:= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} \alpha_C W_{ij} d_{km} y_{ijkm} \\
 &- \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \rho_{ijk} \left(\sum_{m \in N} y_{ijkm} - \sum_u z_{iuk} \right) \\
 &- \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} \sigma_{ijm} \left(\sum_{k \in N} y_{ijkm} - \sum_u z_{jum} \right) \\
 &- \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} \phi_{ijkm} y_{ijkm},
 \end{aligned}$$

onde ρ_{ijk} , σ_{ijm} e ϕ_{ijkm} são os multiplicadores associados às restrições (11), (12) e (13), respectivamente. Logo, as condições de KKT relativas ao problema do segundo nível são:

$$\alpha_C W_{ij} d_{km} - \rho_{ijk} - \sigma_{ijm} - \phi_{ijkm} = 0 \quad i, j, k, m \in N \quad (14)$$

$$\phi_{ijkm} y_{ijkm} = 0, \quad i, j, k, m \in N \quad (15)$$

$$\phi_{ijkm} \geq 0, \quad i, j, k, m \in N \quad (16)$$

$$(11) - (13),$$

onde as condições em (14) seguem do desenvolvimento de $\nabla_y L(y_{ijkm}, \rho_{ijk}, \sigma_{ijm}, \phi_{ijkm}) = 0$, as condições de complementaridade são dadas por (15), as condições em (16) asseguram que os

multiplicadores associados às restrições em (13) sejam não negativos, referindo-se à viabilidade dual, e as condições (11)–(13) se referem à viabilidade primal.

Uma vez obtidas as condições de KKT do problema inferior do problema de dois níveis, podemos reescrever o problema de dois níveis (1)–(13) por outro equivalente, substituindo o problema inferior por suas condições de otimalidade. Porém, com as condições (15) o problema equivalente é não linear. Para contornar tal dificuldade, será introduzida a técnica do “*big M*”, em que as restrições não lineares são substituídas por um conjunto de restrições lineares. Para isso, serão introduzidas novas variáveis binárias v_{ijkm} . De fato, como as variáveis ϕ_{ijkm} e y_{ijkm} são não negativas, substitui-se (15) por:

$$\phi_{ijkm} \leq Mv_{ijkm} \quad i, j, k, m \in N \quad (17)$$

$$y_{ijkm} \leq M(1 - v_{ijkm}) \quad i, j, k, m \in N \quad (18)$$

$$v_{ijkm} \in \{0, 1\} \quad i, j, k, m \in N, \quad (19)$$

onde o valor de M é escolhido com sendo um número real grande.

O modelo de dois níveis reformulado é apresentado como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (W_{ij} + W_{ji}) \sum_{u \in N} d_{iu} \sum_{k \in N} z_{iuk} \\ & + \sum_{i \in N} \sum_{u \in N} \sum_{k \in N} \alpha_R d_{uk} x_{iuk} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{u \in N} \sum_{k \in N} z_{uuk} = p \quad (21)$$

$$\sum_{u \in N} \sum_{k \in N} z_{iuk} = 1 \quad i \in N \quad (22)$$

$$z_{iuk} \leq z_{uuk} \quad i, u, k \in N \quad (23)$$

$$\sum_{u \in N} z_{iuk} \leq z_{kkk} \quad i, k \in N \quad (24)$$

$$\sum_{k \in N} z_{kkk} = q \quad (25)$$

$$\sum_{j \in N} (W_{ij} + W_{ji})(z_{iuk} - z_{juk}) \leq x_{iuk} \quad i, u, k \in N \quad (26)$$

$$\sum_{m \in N} y_{ijkm} = \sum_{u \in N} z_{iuk} \quad i, j, k \in N \quad (27)$$

$$\sum_{k \in N} y_{ijkm} = \sum_{u \in N} z_{jum} \quad i, j, m \in N \quad (28)$$

$$\rho_{ijk} + \sigma_{ijm} + \phi_{ijkm} = \alpha_C W_{ij} d_{km} \quad i, j, k, m \in N \quad (29)$$

$$\phi_{ijkm} \leq Mv_{ijkm} \quad i, j, k, m \in N \quad (30)$$

$$y_{ijkm} \leq M(1 - v_{ijkm}) \quad i, j, k, m \in N \quad (31)$$

$$\phi_{ijkm} \geq 0 \quad i, j, k, m \in N \quad (32)$$

$$x_{iuk} \geq 0 \quad i, u, k \in N \quad (33)$$

$$y_{ijkm} \geq 0 \quad i, j, k, m \in N \quad (34)$$

$$v_{ijkm} \in \{0, 1\} \quad i, j, k, m \in N \quad (35)$$

$$z_{iuk} \in \{0, 1\} \quad i, u, k \in N. \quad (36)$$

Tabela 1: Coordenadas geográficas dos aeroportos de CAB10

Num.	Cidade	Latitude	Longitude
1	Atlanta	33,7426	-84,3564
2	Baltimore	39,2949	-76,6121
3	Boston	42,3747	-71,0521
4	Chicago	41,8971	-87,6297
5	Cincinnati	39,0991	-84,5124
6	Cleveland	41,5003	-81,6951
7	Dallas-Fort W.	32,7549	-97,3280
8	Denver	39,7388	-104,9855
9	Detroit	42,3321	-83,04586
10	Houston	29,7572	-95,3711



Figura 1: Fluxos diretos de passageiros em CAB10

4. Experimentos computacionais

Nesta seção, são apresentados os experimentos computacionais com o modelo reformulado (20)–(36), equivalente ao modelo de otimização em dois níveis proposto (1)–(13). Para isso, foram consideradas as seguintes instâncias:

- Instância CAB10 (ou simplesmente CAB), encontrada em [O’Kelly, 1987]. Reúne 10 aeroportos do sistema de transporte aéreo dos Estados Unidos. Nesse sistema, são informados os nomes das cidades, e não os dos aeroportos, as coordenadas geográficas (latitude e longitude) de cada aeroporto, e os fluxos de passageiros existentes entre os aeroportos. Nesta instância, a matriz de fluxos é simétrica, ou seja, a quantidade de passageiros transportados é igual entre cada par de aeroportos ($W_{ij} = W_{ji}$), existindo um total de 45 conexões distintas entre os aeroportos. A Tabela 1 apresenta as coordenadas geográficas dos aeroportos e a Figura 1 mostra os fluxos diretos entre os aeroportos dessa instância. Cabe informar que a cor vermelha possui tonalidade mais clara em fluxos de passageiros menores e tonalidade mais escura em fluxos maiores. Vale observar que quanto mais largo for o segmento de reta, maior é o fluxo de passageiros.
- Instância BRA10, montada com informações do sistema de transporte aéreo brasileiro, é encontrada em [Alzamora, 2013]. Neste sistema com 10 aeroportos, considera-se o código utilizado pela ICAO de cada aeroporto [ICAO, 2015], não o nome, e são conhecidas as coordenadas geográficas (latitude e longitude), juntamente com os fluxos de passageiros existentes entre os aeroportos. Nesta instância, a matriz de fluxos não é simétrica, ou seja, a quantidade de passageiros transportados entre dois aeroportos pode ser diferente dependendo do sentido ($W_{ij} \neq W_{ji}$), existindo um total de 44 conexões entre os aeroportos, e não 45, isto

Tabela 2: Coordenadas geográficas dos aeroportos de BRA10

Num.	Aeroporto	Cidade	Latitude	Longitude
1	SBEG	Manaus, AM	-3,0411	-60,0506
2	SBSV	Salvador, BA	-12,9086	-38,3225
3	SBFZ	Fortaleza, CE	-3,7758	-38,5322
4	SBBR	Brasília, DF	-15,8692	-47,9208
5	SBBE	Belém, PA	-1,3847	-48,4789
6	SBRF	Recife, PE	-8,1264	-34,9228
7	SBCT	Curitiba, PR	-25,5358	-49,1714
8	SBGL	Rio de Janeiro, RJ	-22,81	-43,2506
9	SBPA	Porto Alegre, RS	-29,9939	-51,1711
10	SBGR	Guarulhos, SP	-23,4356	-46,4731



Figura 2: Fluxos diretos de passageiros em BRA10

porque uma das conexões tem fluxo nulo (SBBE–SBPA). A Tabela 2 apresenta as coordenadas geográficas dos aeroportos, enquanto que a Figura 2 mostra os fluxos diretos entre eles. Novamente, a tonalidade mais clara da cor vermelha indica fluxos menores e a tonalidade mais escura indica fluxos maiores. Vale observar que quanto mais largo for o segmento de reta, maior é o fluxo de passageiros.

Para as instâncias descritas acima, o modelo reformulado (20)–(36) foi resolvido com o software CPLEX, versão 12,4 do pacote AIMMS versão 12,1. O método de solução aplicado foi o algoritmo de *branch-and-cut*, que vem a ser o método de solução padrão do CPLEX para os problemas de programação inteira mista. O sistema de visualização gráfica foi implementado na linguagem C++, usando a ferramenta Qt para a interface gráfica. Além disso, os experimentos numéricos foram efetuados num computador Intel PC Celeron com 2,7GHz e 512MB RAM, sob o sistema operacional de 32 bits, Windows Vista.

Para os testes computacionais foram considerados: $q = 2, 3$ (número de *hubs* centrais), baseado no critério do grau de concentração numa rede como em [Costa et al., 2010]; $p = 4, 5$ (número de *hubs* regionais), de acordo com o critério de volume mínimo de fluxo de passageiros em [Alzamora et al., 2013], isto é, a seleção dos aeroportos é feita seguindo a ordem decrescente do volume correspondente de passageiros; o fator de economia de escala de *hubs* centrais é $\alpha_C = 0,6$, tal como fixado em [Figueiredo et al., 2014]; e finalmente o valor do fator de economia de

Tabela 3: Tempos de execução e localização de *hubs* para CAB10

q	p	α_R	Tempo (s)	Função Objetivo	<i>hubs</i> centrais	<i>hubs</i> regionais	<i>spokes</i>
2	4	0,8	8,23	507.529.486,6	7,9	7,9,4,3	2,8,10,1,5,6
		1,0	13,26	548.122.179,9	7,9	7,9, 5,6	2,8,10,1, 4,3
	5	0,8	7,73	489.407.016,8	7,9	7,9,4,3,1	2,8,10,5,6
		1,0	12,17	548.122.179,9	7,9	7,9, 10,5,6	2,8, 4,3,1
3	4	0,8	12,83	376.741.542,2	7,3,4	7,9,4,3	2,8,10,1,5,6
		1,0	16,75	394.528.357,9	7,3,4	7,9,4,3	2,8,10,1,5,6
	5	0,8	11,50	358.711.726,8	7,3,4	7,9,4,3,8	2,10,1,6,5
		1,0	12,89	394.434.234,0	7,3,4	7,9,4,3, 5	2,10,1,6, 8

escala dos *hubs* regionais foi fixado em $\alpha_R = 0,8$, cujos resultados foram comparados ao caso de não haver nenhuma economia de escala, com $\alpha_R = 1,0$. Para ambas as instâncias testadas, os modelos gerados com $N = 10$ aeroportos apresentaram 34.013 restrições, 34.001 variáveis, sendo 11.000 variáveis inteiras. Após a realização de vários testes com as duas instâncias, chegou-se a $M = 7,5e7$. Esse valor de M garante a obtenção de soluções viáveis para o modelo reformulado com o solver escolhido. Ainda, observamos o fato de que a mesma solução ótima é encontrada para valores de M acima do valor fixado para ambas as instâncias. No caso de BRA10, especificamente, para que a execução do algoritmo tivesse sucesso, as quantidades de passageiros foram divididas por 1000 e arredondadas ao número inteiro mais próximo.

Na Tabela 3 são informados os tempos de execução em segundos, os valores ótimos da função objetivo em (20), a localização dos *hubs* centrais e regionais e os *spokes* para a instância CAB10. Observe que os aeroportos estão codificados por números, tal como na Tabela 1. Verifica-se que, quando $q = 2$, Dallas-Fort W. e Detroit são eleitos *hubs* centrais, e quando $q = 3$ tem-se Dallas-Fort W. junto com Boston e Chicago como *hubs* centrais. Também pode-se verificar que a localização de *hubs* regionais difere quando se aplica economia de escala ($\alpha_R = 0,8$).

Na Figura 3 são apresentados os fluxos consolidados em 9 conexões, contra 45 conexões iniciais, após a localização de 5 *hubs* regionais e 2 *hubs* centrais no sistema para a instância CAB10. Observe que, ao se considerar economia de escala com a introdução de *hubs* regionais ($\alpha = 0,8$), a localização desses *hubs* se altera de modo a considerar os aeroportos de maior fluxo, Figura 3(a), quando comparado ao caso sem economia de escala ($\alpha = 1,0$), Figura 3(b). Os segmentos de reta azuis mostram as conexões entre os aeroportos *spokes* e os aeroportos que servem de *hubs* regionais, os segmentos de reta verdes mostram os aeroportos que são *hubs* regionais alocados aos aeroportos que são *hubs* centrais, e os segmentos de reta em lilás mostram as interconexões entre os aeroportos que servem de *hubs* centrais. Vale observar que quanto mais largo for o segmento de reta, maior é o fluxo de passageiros.

Na Tabela 4 são informados os tempos de execução em segundos, os valores ótimos da função objetivo em (20), a localização dos *hubs* centrais e regionais e os *spokes* para a instância BRA10. Novamente, observe que os aeroportos estão codificados por números tal como na Tabela 2. Verifica-se que, quando $q = 2$, SBRF e SBGR são eleitos *hubs* centrais, e quando $q = 3$, tem-se SBRF, SBGR e SBBR como *hubs* centrais. Também pode-se verificar que a localização de *hubs* regionais difere quando se aplica economia de escala ($\alpha_R = 0,8$).

Na Figura 4 são apresentados os fluxos consolidados em 9 conexões, contra 44 conexões iniciais, após a localização de 5 *hubs* regionais e 2 *hubs* centrais no sistema para a instância BRA10. Novamente, verifica-se que a localização de *hubs* regionais se altera quando se introduz economia de escala ($\alpha = 0,8$) de modo a considerar os aeroportos de maior fluxo, Figura 4(a), quando comparado ao caso sem economia de escala ($\alpha = 1,0$), Figura 4(b). Novamente, os segmentos



Figura 3: Resultado com 9 conexões para 5 *hubs* regionais e 2 *hubs* centrais em CAB10 com $\alpha_R = 0,8$ (a) e $\alpha_R = 1,0$ (b).

Tabela 4: Tempos de execução e localização de *hubs* para BRA10

q	p	α_R	Tempo (s)	Função Objetivo	<i>hubs</i> centrais	<i>hubs</i> regionais	<i>spokes</i>
2	4	0,8	6,69	47.700.504,0	6,10	6,10,4,7	9,1,2,5,3,8
		1,0	11,88	51.725.495,07	6,10	6,10,4,7	9,1,2,5,3,8
	5	0,8	6,53	46.198.039,0	6,10	6,10,4,7,8	9,1,2,5,3
		1,0	11,25	51.725.495,7	6,10	6,10,4,7,3	9,1,2,5,8
3	4	0,8	6,69	35.971.840,98	6,10,4	6,10,4,7	9,1,2,5,3,8
		1,0	6,53	37.064.665,35	6,10,4	6,10,4,7	9,1,2,5,3,8
	5	0,8	6,19	34.469.375,22	6,10,4	6,10,4,7,8	9,1,2,5,3
		1,0	5,89	36.914.778,86	6,10,4	6,10,4,7,3	9,1,2,5,8

de reta azuis mostram as conexões entre os aeroportos *spokes* e os aeroportos que servem de *hubs* regionais, os segmentos de reta verdes mostram os aeroportos que são *hubs* regionais alocados aos aeroportos que são *hubs* centrais, e os segmentos de reta em lilás mostram as interconexões entre os *hubs* centrais. Vale observar que quanto mais largo for o segmento de reta, maior é o fluxo de passageiros.

Analisando os resultados dos experimentos computacionais realizados com BRA10 e CAB10, observa-se que eles se mostraram mais homogêneos para BRA10 do que para CAB10. Acreditamos que isso se deva ao grande desequilíbrio do volume de passageiros entre os aeroportos de BRA10, que resultaria na existência de um mínimo global distante dos mínimos locais, ao passo que, o volume de passageiros mais equilibrado em CAB10 resultaria na existência de mínimos locais próximos.

5. Conclusões

Neste trabalho, propõe-se uma nova estratégia para resolver o problema fundamental de localização hierárquica de *hubs* numa rede de fluxos com alocação simples, via a introdução e resolução de um modelo de otimização em dois níveis. Também foi desenvolvido um software gráfico para visualizar os dados e resultados do problema abordado.

Os resultados numéricos obtidos para duas instâncias de sistemas de transporte aéreo mostraram que o modelo proposto é promissor em otimizar conexões de fluxos de passageiros mediante a introdução de *hubs* regionais, para consolidar fluxos menos densos, e de *hubs* centrais, para consolidar fluxos mais densos. Mesmo que alguns fluxos apresentem percursos maiores, ao serem forçados a passar por *hubs*, existe compensação com a consolidação de todos fluxos, proporcionando ganho em escala. Além disso, quando se impõe uma hierarquia sobre os *hubs*, é possível tratar suas operações em camadas de maior ou menor importância.

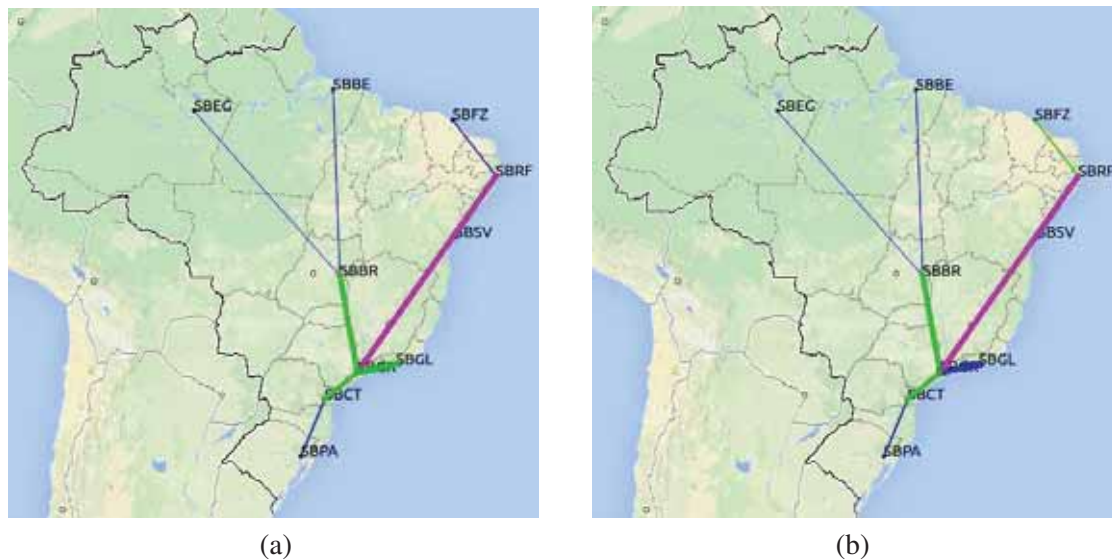


Figura 4: Resultado com 9 conexões para 5 *hubs* regionais e 2 *hubs* centrais em BRA10 com $\alpha = 0,8$ (a) e $\alpha = 1,0$ (b).

Como trabalhos futuros, pretende-se considerar a alocação múltipla, assim como novos critérios para a localização hierárquica de *hubs*, e ainda desenvolver um método heurístico para resolver instâncias de médio e grande porte com facilidade.

Referências

- Alumur, S. e Kara, B. Y. (2008). Network hub location problems: The state of the art. *European Journal of Operational Research*, 190(1):1–21.
- Alzamora, G. G. S. (2013). *Estratégias de localização de hubs para o sistema de transporte aéreo brasileiro*. D. sc. thesis, PUC-Rio, RJ.
- Alzamora, G. S. e Raupp, F. M. P. (2015). Modelo integrado para localização hierárquica de *hubs* em redes de fluxos. In *Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha (SPOLM)*, RJ.
- Alzamora, G. S., Raupp, F. M. P., e Pizzolato, N. D. (2013). Estratégia de localização de *hubs* no transporte aéreo brasileiro. In *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO)*, Natal, RN.
- An, Y., Zhang, Y., e Zeng, B. (2011). The reliable hub-and-spoke design problem: Models and algorithms. *Optimization Online*.
- Ben-Ayed, O. (1993). Bilevel linear programming. *Computers and Operations Research*, 20:485–501.
- Bialas, W. F., Karwan, M., e Shaw, J. (1980). A parametric complementarity pivot approach for two-level linear programming. Technical Report 80-2.
- Camacho-Vallejo, J.-F., Cordero-Franco, A.-E., e González-Ramírez, R. G. (2014). Solving the bilevel facility location problem under preferences by a stackelberg-evolutionary algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014:1–14.
- Campbell, J. F. (1994). Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72:387–405.
- Campbell, J. F. e O’Kelly, M. E. (2012). Twenty-five years of hub location research. *Transportation Science*, 46:153–169.
- Colson, B., Marcotte, P., e Savard, G. (2007). An overview of bilevel optimization. *Annals of Operations Research*, 153:235–256.

- Costa, T. F. G., Lohmann, G., e Oliveira, A. V. M. (2010). A model to identify airport hubs and their importance to tourism in Brazil. *Research in Transportation Economics*, pages 3–11.
- Şahin, G. e Süral, H. (2007). A review of hierarchical facility location models. *Computers & Operations Research*, 34(8):2310–2331.
- Dempe, S., editor (2002). *Foundations of bilevel Programming*. Kuwer:Dordrecht, New York.
- Farahani, R. Z. e Hekmatfar, M., editors (2009). *Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies: Contributions to Management Science*. Physica-Verlag Heidelberg.
- Farahani, R. Z., Hekmatfar, M., Arabani, A. B., e Nikbakhsh, E. (2013). Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques and applications. *Computers & Industrial Engineering*, 64:1096–1109.
- Figueiredo, R. M. A., O’Kelly, M. E., e Pizzolato, N. D. (2014). A two stage hub location model for air transportation on Brazil. *International Transactions in Operational Research (ITOR)*, 21:275–289.
- Fischer, K. (2002). Sequential discrete p -facility models for competitive location planning. *Annals of Operations Research*, pages 253–270.
- Gao, Z., Wu, J., e Sun, H. (2005). Solution algorithm for the bi-level discrete network design problem. *Transportation Research Part B*, 39:479–495.
- Gelhausen, M. C., Bersten, P., e Wilken, D. (2013). Do airport capacity constraints have a serious impact on the future development of air traffic? *Journal of Air Transport Management*, 28:3–13.
- ICAO (2015). Annual report of the council 2013. Internet. <http://www.icao.int/annual-report-2013>.
- Narula, S. C. (1986). Minisum hierarchical location-allocation problems on a network: A survey. *Annals of Operations Research*, 6:257–272.
- O’Kelly, M. E. (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 32(3):393–404.
- Skorin-Kapov, D., Skorin-Kapov, J., e O’Kelly, M. (1996). Tight linear programming relaxations of uncapacitated p -hub median problems. *European Journal of Operational Research*, 94:582–593.
- Sun, H., Gao, Z., e Wu, J. (2008). A bi-level programming model and solution algorithm for the location of logistics distribution centers. *Applied Mathematical Modelling*, 32:610–616.
- Taniguchi, E., Noritake, M., Yamada, T., e Izumitani, T. (1999). Optimal size and location planning of public logistics terminals. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 1:207–222.
- Vicente, L. N. e Calamai, P. H. (1994). Bilevel and multilevel programming: A bibliography review. *Journal of Global Optimization*, 5:291–306.
- Wanke, P. F. (2012). Efficiency of Brazil’s airports: Evidences from bootstrapped DEA and FDH estimates. *Journal of Air Transport Management*, 23:47–53.