O MÉTODO PREVISOR-CORRETOR PRIMAL-DUAL DE REESCALAMENTO NÃO-LINEAR M^2BF APLICADO AO FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO REATIVO

Ricardo B. N. M. Pinheiro
LASEE - Departamento de Engenharia Elétrica, EESC - USP
Av. Trabalhador São-Carlense, 400 - Centro, CEP:13566-590, São Carlos - SP - Brasil
rbnpinheiro@usp.br

Guilherme G. Lage
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Departamento de Engenharia Elétrica, UFSCar
Rodovia Washington Luís (SP-310), km 235
glage@ufscar.br

Geraldo R. M. da Costa
LASEE - Departamento de Engenharia Elétrica, EESC - USP
Av. Trabalhador São-Carlense, 400 - Centro, CEP:13566-590, São Carlos - SP - Brasil
geraldo@sc.usp.br

RESUMO

Este artigo apresenta uma abordagem à nova família de funções penalidades para os métodos lagrangiano aumentado proposto por Matioli e Gonzaga. Nesta nova família, a função barreira duplamente modificada, M^2BF, é definida. A partir do conceito da M^2BF e do princípio de reescalamento não-linear de Polyak, propomos neste trabalho o método previsor-corretor primal-dual de reescalamento não-linear M^2BF. Verificamos o desempenho do método proposto no problema de fluxo de potência ótimo reativo associados aos sistemas elétricos de 5, 14 e 39 barras.

PALAVRAS CHAVE. Métodos de Reescalamento Não-Linear, Função Barreira Logarítmica Duplamente Modificada, Fluxo de Potência Ótimo.

Área Principal: (EN - PO na área de Energia, PM - Programação Matemática)

ABSTRACT

This paper presents an approach to the new family of penalty functions for augmented Lagrangian methods proposed by Matioli and Gonzaga. In this new family, the doubly modified barrier function, M^2BF, is defined. From the concept of M^2BF and from the Polyak′s nonlinear rescaling principle, we propose in this paper the predictor-corrector primal-dual M^2BF nonlinear rescaling methods. We verified the performance of the proposed method through the Reactive Optimal Power Flow problem for the electrical systems of 5, 14 and 39 buses.

KEYWORDS. Nonlinear rescaling Methods. Doubly Modified Logarithm Barrier Function, Optimal Power Flow.

Main Area: (EN - OR in Energy, MP - Mathematical Programming)

1. Introdução

As abordagens teóricas e práticas em otimização iniciam-se desde Newton, Lagrange e Cauchy. Os métodos de otimização para problemas com restrições de igualdade, os quais envolvem multiplicadores como variáveis, recebem o nome de seu inventor, Lagrange. Cauchy, por exemplo, foi o primeiro a aplicar o método do gradiente (método da máxima descida) para resolver problemas de minimizações irrestritos. Apesar destas primeiras contribuições, pequeno progresso foi feito até meados do século XX. Foi quando os computadores digitais de alta velocidade tornaram possíveis a implementação de sofisticados algoritmos e, assim, estimulou fortemente o avanço de novas pesquisas em teoria e métodos de otimização. Atualmente, teoria e métodos de otimização são objetos de intensa investigação. Os principais métodos exatos para resolver problemas de otimização não-linear, com finitas restrições de igualdade e de desigualdade, em variáveis contínuas são os métodos de pontos interiores; os métodos de penalidade quadrática, hiperbólica; e os métodos de lagrangiano aumentado. Vide os trabalhos de Bertsekas (1999); Xavier (2001); Bazaraa et al. (2006); Potra and Wright (2000); Gondzio (2012) para um aprofundado estudo sobre esses ou outros métodos com suas respectivas teorias.

O presente artigo é fortemente embasado nos resultados obtidos por Polyak (1992); Polyak and Teboulle (1997); Griva e Polyak (2006); Matioli e Gonzaga (2008); Polyak (2014). Esses trabalhos apresentam uma abordagem de lagrangiano aumentado (método dos multiplicadores) com funções penalidades de natureza não-quadrática. Uma classe de métodos de lagrangiano aumentado que usufrui dessa propriedade é princípio de reescalamento não-linear de Polyak and Teboulle (1997).

As classes de métodos não-quadráticos mais discutidas na literatura são distâncias de Bregman (1967) e entropias φ-divergências amplamente discutida por Teboulle (1992), pois são poderosas ferramentas para a análise de convergência de tais métodos no problema dual. Um exemplo importante é o método da função barreira logarítmica duplamente modificada (M^2BF) de Matioli e Gonzaga (2008). Os autores estabeleceram, pela primeira vez, a conexão entre o método da função barreira logarítmica modificada (FBM) de Polyak (1992) com distâncias de Bregman e, mais ainda, que as curvas de nível dessas distâncias no espaço dual são elipsoides de Dikin (1967).

Os resultados de convergência primal e dual do algoritmo apresentado por Matioli e Gonzaga (2008); Polyak (2014), o qual consiste em uma técnica de minimizações irrestrita, nos motivaram a investigar uma abordagem primal-dual M^2BF fortemente embasada nos estudos de Griva e Polyak (2006); Pinheiro et al. (2015) e essa abordagem é a principal contribuição deste trabalho. O trabalho de Griva e Polyak (2006) sistematiza a moderna abordagem primal-dual de reescalamento não-linear enquanto que no trabalho de Pinheiro et al. (2015) houve a proposta da abordagem previsor-corretor primal-dual de reescalamento não-linear.

O método resultante da investigação é aqui denominado "método primal-dual M^2BF". Experimentamos com sucesso a performance do método ao problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo, da engenharia elétrica, para os sistemas elétricos de 5, 14 e 39 barras.

2. Reescalamento não-linear M^2BF

Considere o problema de otimização não-linear com restrições de desigualdade conforme (1):

$$\begin{array}{ll} Min & f(\mathbf{x}) \\ s.a.: & h_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall i = 1, ..., r \end{array} \tag{1}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall i = 1, ..., r$ são funções pelo menos de classe C^2. Ao assumirmos que o problema (1) satisfaz uma adequada condição de qualificação apresentada por Andreani et al. (2012), temos que o problema lagrangiano associado ao problema (1) está bem definido. O problema lagrangiano é apresentado como:

$$Min \quad L(\omega) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i h_i(\mathbf{x}) \tag{2}$$

em que $\omega = \left(\mathbf{x}^{\mathbf{T}}, \lambda^{\mathbf{T}}\right)^T \in \Omega = (\mathbb{X} \times \mathbb{L}) \subseteq \mathbb{R}^{n+r}$; Ω é o conjunto viável primal e dual; a componente λ_i do vetor $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_i, ..., \lambda_r)^T \in \mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^r_+$ é o multiplicador de Lagrange associado à restrição $h_i(\mathbf{x}) \leq 0$. As condições necessárias de otimalidade de primeira ordem do problema (2) associada à variável primal $\mathbf{x}$ são apresentadas no sistema (3):

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\omega) = \nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \nabla h_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad , \lambda_i \geq 0. \tag{3}$$

De acordo com Matioli e Gonzaga (2008), seja $\mathbb{H}$ uma família de funções cujos elementos são as funções $\psi : \mathbb{Y} = (-\infty, \rho) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com a possibilidade de $\rho = +\infty$, que possuem as seguintes propriedades:

(i) $\psi(y)$ é de classe C^{∞} sobre $\mathbb{Y}$;

(ii) $\psi(y)$ é estritamente convexa;

(iii) $\psi(0) = 0$; $\psi'(0) = 1$;

(iv) $\lim\limits_{y \to -\infty} \psi'(y) = 0$, $\lim\limits_{y \to \rho^-} \psi'(y) = +\infty$ (Coercividade a direita).

Mostra-se facilmente que a função barreira logarítmica modificada (FBM) de Polyak (1992) é uma $\psi \in \mathbb{H}$. A FBM é apresentada em (4).

$$\psi(y) = -\ln(-y+1). \tag{4}$$

Munido com uma função $\psi \in \mathbb{H}$, Matioli e Gonzaga (2008) desenvolveram uma classe $\mathbb{P}_1$ de funções penalidades para os métodos de lagrangiano aumentado denominada "função penalidade de tipo 1". Uma função $\eta : \mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é elemento de $\mathbb{P}_1$ se:

$$\eta(y, \delta) = \psi(\delta y), \tag{5}$$

onde δ é o estimador do multiplicador de Lagrange correspondente à restrição $y \leq 0$. Para o caso particular em que $\psi(y)$ é a FBM (4), então a função $\eta(y, \delta)$ é denominada "função barreira logarítmica duplamente modificada"$\left(M^2BF\right)$.

Nosso próximo procedimento é a aplicação do método de reescalamento não-linear (RNL) de Polyak (1986), citado por Polyak and Teboulle (1997), à M^2BF. De acordo com Griva e Polyak (2006), o RNL é uma alternativa aos métodos cuja ideia é a trajetória central. Ao contrário desses métodos, o RNL não necessita que o parâmetro de reescala (ou de penalidade no sentido de Matioli e Gonzaga (2008)) decresça ilimitadamente para zero para obter convergência, pois o RNL conta com uma ferramenta extra para essa finalidade: o vetor de multiplicadores de Lagrange.

A função de reescalamento não-linear M^2BF é a função $\nu : \mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ apresentada em (6):

$$\nu(y, \delta, \mu) = \mu\psi\left(\mu^{-1}\delta y\right), \tag{6}$$

em que o escalar $\mu \in \mathbb{R}^*_+$ é denominado "parâmetro de reescala"e a $\psi \in \mathbb{H}$ é a FBM (4). Portanto, de acordo com Matioli e Gonzaga (2008), o problema de lagrangiano aumentado associado ao problema (1) é apresentado em (7).

$$Min \quad L(\omega) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{r} \mu\psi\left(\mu^{-1}\delta_i h_i(\mathbf{x})\right), \tag{7}$$

em que $\omega = \left(\mathbf{x}^{\mathbf{T}}, \lambda^{\mathbf{T}}, \delta^{\mathbf{T}}, \mu\right)^T \in \Omega = \left(\mathbb{X} \times \mathbb{L}^2 \times \mathbb{R}_+^*\right) \subseteq \mathbb{R}^{n+2r+1}$.

Ao aplicarmos no problema (7) as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem associada à variável $\mathbf{x}$, temos:

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\omega) = \nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{r} \delta_i \psi' \left(\mu^{-1} \delta_i h_i(\mathbf{x})\right) \nabla h_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad , \ \delta_i \geq 0, \tag{8}$$

em que a componente δ_i do vetor $\delta = (\delta_1, ..., \delta_i, ..., \delta_r)^T \in \mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}_+^r$ é o estimador do multiplicador de Lagrange referente à restrição $h_i(\mathbf{x}) \leq 0$ do problema (1).

A equação (8) é a principal chave para o método de reescalamento não-linear, pois é de extremo interesse que esta esteja de acordo com o sistema de equações (3). Seja $\mathbf{x}^*$ uma solução ótima. Por assumirmos uma adequada condição de qualificação, então existe um multiplicador de Lagrange λ^* tal que o par primal-dual $(\mathbf{x}^*,\lambda^*)$ é solução para o sistema (3). Matioli e Gonzaga (2008) mostraram que existe um par $(\mathbf{x}^*,\delta^*)$ e um $\bar{\mu}$ finito e suficientemente pequeno tal que a terna $(\mathbf{x}^*,\delta^*, \bar{\mu})$ é solução para o problema (7). Estes resultados nos permitem estabelecer a principal correspondência entre as variáveis duais ótimas λ^* e δ^*. A correspondência é apresentada em (9):

$$\lambda_i^* = \psi' \left(\bar{\mu}^1 \delta_i^* h_i(\mathbf{x}^*)\right) \delta_i^* \quad \forall i = 1, ..., r. \tag{9}$$

O método de reescalamento não-linear consiste de uma sequência de minimizações irrestrita do problema lagrangiano (7) para o problema original (1) seguido pelas atualizações dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange δ_i. Todavia, para o aumento da taxa de convergência, Polyak e Griva (2004) mostram que o parâmetro de reescala μ também deve ser decrementado. Portanto, resolver o problema (7) gera uma sequência $\left\{\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}}\left(\delta^{\mathbf{k}}, \mu_k\right)\right\}$ que nos assegura de que $\lim\limits_{k\to\infty} h_i\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}}\left(\delta^{\mathbf{k}}, \mu_k\right)\right) = h_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$ e que $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}}\left(\delta^{\mathbf{k}}, \mu_k\right)\right) = f(\mathbf{x}^*)$ sempre que $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k = 0$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \delta^{\mathbf{k}} = \lambda^*$.

O Algoritmo 1, cujas provas de sua consistência são apresentadas de acordo com Matioli (2001); Matioli e Gonzaga (2008); Polyak (2014), sintetiza o método de reescalamento não-linear M^2BF.

Algoritmo 1 Método de Reescalamento Não-Linear M^2BF

Procedimento Inicial:

Defina $\psi \in \mathbb{H}$ a função barreira logarítmica modificada (4), $\mu_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\delta_i > 0$, $\mathbf{x^0}$ tal que $h_i\left(\mathbf{x^0}\right) < \delta_{i_0}^{-1}\mu_0$, $\forall i = 1, ..., r$. Defina $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ suficientemente pequeno e um contador $k = 0$. Calcule $\nabla_{\mathbf{x}} L\left(\omega^{\mathbf{0}}\right)$ de acordo com (8) e siga para o procedimento principal.

Procedimento Principal:

Enquanto $\left\|\nabla_x L\left(\omega^{\mathbf{k}}\right)\right\| > \varepsilon$**, faça:**

(i) $\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}} = \arg\min \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\mathbf{x}) + \mu_k \sum_{i=1}^{r} \psi\left(\mu_k^{-1} \delta_{i_k} h_i(\mathbf{x})\right)\right\}$;

(ii) $\mu_{k+1} = \alpha_\mu \mu_k \quad 0 < \alpha_\mu < 1$;

(iii) $\delta_i^{k+1} = \psi'\left(\mu_{k+1}^{-1} \delta_{i_k} h_i\left(\mathbf{x^{k+1}}\right)\right) \delta_{i_k}$.

Faça $k = k + 1$

O procedimento (i) do Algoritmo 1 é denominado "ciclo interno"; os ciclos (ii) e (iii) são denominados "ciclo externo". Uma alternativa ao Algoritmo 1 é a abordagem primal-dual reescalamento não-linear desenvolvida por Griva e Polyak (2006). A expectativa é que toda a sistematização da teoria que valida o método primal-dual reescalamento não-linear, desenvolvida para métodos de lagrangiano aumentado cuja função penalidade é de tipo 2, deverá ser validada para os métodos de lagrangiano aumentado, cuja função penalidade é de tipo 1. Um estudo inicial e rigoroso rumo a esta sistematização é de acordo com as conclusões do trabalho de Polyak (2014), mas, de antemão, o autor nos garante que a abordagem primal-dual está assegurada.

Com base nas equações (3) e (9) temos a seguinte constatação: resolver uma ciclo completo do Algoritmo 1 equivale a resolver o sistema não-linear primal-dual (10) e (11) uma única vez pelo método de Newton.

$$\nabla f\left(\mathbf{x}\right)+\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x})^{T}\lambda=\mathbf{0} \tag{10}$$

$$\lambda=\dot{\Psi}\left(\mu_{k}^{-1}\Delta_{k}\mathbf{h}\left(\mathbf{x}\right)\right)\delta, \tag{11}$$

onde $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(\delta^{\mathbf{k}},\mu_{k}\right)$, $\lambda=\lambda\left(\delta^{\mathbf{k}},\mu_{k}\right)$, $\nabla\mathbf{h}\left(\mathbf{x}\right)\in\mathbb{R}^{r\times n}$ é a matriz jacobiana associada ao funcional $\mathbf{h}\left(\mathbf{x}\right)=\left(h_{1}\left(\mathbf{x}\right),...,h_{i}\left(\mathbf{x}\right),...,h_{r}\left(\mathbf{x}\right)\right)^{T}$, $\dot{\Psi}\left(\mu_{k}^{-1}\Delta_{k}\mathbf{h}\left(\mathbf{x}\right)\right)=diag\left(\psi'\left(\mu_{k}^{-1}\delta_{i_k}h_{i}\left(\mathbf{x}\right)\right)\right)_{i=1}^{r}$ e $\Delta_{k}=diag\left(\delta_{i_k}\right)_{i=1}^{r}$.

Todavia, visando uma abordagem previsor-corretor, utilizamos a abordagem primal-dual reescalamento não-linear de Pinheiro et al. (2015). Neste trabalho, os autores utilizaram um método de lagrangiano aumentado com função penalidade de tipo 2. Para a abordagem previsor-corretor, modificamos sutilmente a equação (11) conforme apresentado em (12).

$$\dot{\Psi}^{-1}\left(\mu_{k}^{-1}\Delta_{k}\mathbf{h}\left(\mathbf{x}\right)\right)\lambda-\delta=\mathbf{0}. \tag{12}$$

A partir das equações (10) e (12) segue nas seções 3 e 4 a principal proposta e contribuição deste trabalho: o método previsor-corretor primal-dual de reescalamento não-linear M^2BF e sua aplicação em problemas de Fluxo de Potência Ótimo Reativo.

3. O método primal-dual M^2BF

Nesta seção consideramos a formulação geral de programação não-linear conforme (13):

$$\begin{array}{lll} Min & f\left(\mathbf{x}\right) & \\ s.a.: & g_{t}\left(\mathbf{x}\right)=0 & \forall t=1,...,m \\ & h_{i}\left(\mathbf{x}\right)\leq 0 & \forall i=1,...,r \end{array} \tag{13}$$

em que $f,\ g_t\ e\ h_i$ são funções pelo menos de classe C^2. Acrescentamos às restrições de desigualdades as variáveis de folga positivas $\mathbf{z_1}=\left(z_{1_1},...,z_{1_i},...,z_{1_r}\right)^{T}\in\mathbb{Z}_1\subseteq\mathbb{R}_{+}^{r}$. Cada variável de folga é penalizada com a função reescalamento não-linear M^2BF conforme Sousa et al. (2012). Assim, temos:

$$\begin{array}{lll} Min & f\left(\mathbf{x}\right)+\mu\sum\limits_{i=1}^{r}\psi\left(-\mu^{-1}\delta_{1_i}z_{1_i}\right) & \\ s.a.: & g_{t}\left(\mathbf{x}\right)=0 & \forall t=1,...,m<n \\ & h_{i}\left(\mathbf{x}\right)+z_{1_i}=0, & \forall i=1,...,r \end{array} \tag{14}$$

com $\left(\mathbf{x^T},\mathbf{z_1^T},\delta_{\mathbf{1}}^{\mathbf{T}},\mu\right)^{T}\in\left(\mathbb{X}\times\mathbb{Z}_1\times\mathbb{L}_1\times\mathbb{R}_{+}^{*}\right)\subseteq\mathbb{R}^{n+2r+1}$.

Transformamos o problema (14) em um irrestrito e equivalente por meio do problema de lagrangiano aumentado (15):

$$Min\quad L\left(\omega\right)=f\left(\mathbf{x}\right)+\sum_{i=1}^{r}\mu\psi\left(-\mu^{-1}\delta_{1_i}z_{1_i}\right)+\lambda_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}}\mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right)+\lambda_{\mathbf{1}}^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{h}\left(\mathbf{x}\right)+\mathbf{z_1}\right) \tag{15}$$

em que $\omega=\left(\mathbf{x^T},\mathbf{z_1^T},\lambda_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}},\lambda_{\mathbf{1}}^{\mathbf{T}},\delta_{\mathbf{1}}^{\mathbf{T}},\mu\right)^{T}\in\Omega=\left(\mathbb{X}\times\mathbb{Z}_1\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_1^2\times\mathbb{R}_{+}^{*}\right)\subseteq\mathbb{R}^{n+m+3r+1}$; $\mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right)=\left(g_{1}\left(\mathbf{x}\right),...,g_{t}\left(\mathbf{x}\right),...,g_{m}\left(\mathbf{x}\right)\right)^{T}$; $\mathbf{h}\left(\mathbf{x}\right)=\left(h_{1}\left(\mathbf{x}\right),...,h_{i}\left(\mathbf{x}\right),...,h_{r}\left(\mathbf{x}\right)\right)^{T}$; a componente

λ_{0_t} do vetor $\lambda_{\mathbf{0}} = (\lambda_{0_1}, ..., \lambda_{0_t}, ..., \lambda_{0_m})^T \in \mathbb{L}_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ é o multiplicador de Lagarange associado à restrição $g_t(\mathbf{x}) = 0$; a componente λ_{1_i} do vetor $\lambda_{\mathbf{1}} = (\lambda_{1_1}, ..., \lambda_{1_1}, ..., \lambda_{1_r})^T \in \mathbb{L}_1 \subseteq \mathbb{R}^r_+$ é o multiplicador de Lagarange associado à restrição $h_i(\mathbf{x}) + z_{1_i} = 0$; o vetor dual $\delta_{\mathbf{1}} = (\delta_{1_1}, ..., \delta_{1_i}, ..., \delta_{1_r})^T \in \mathbb{L}_1 \subseteq \mathbb{R}^r_+$ é o estimador dos multiplicadores de Lagrange ou parâmetro dual associado a restrição $-\mathbf{z_1} \leq \mathbf{0}$.

Desde que $\delta_{\mathbf{1}}$ e μ são parâmetros, então está claro que a otimização é feita sobre a variável $\varphi(\delta_{\mathbf{1}}, \mu) = \left(\mathbf{x^T}(\delta_{\mathbf{1}}, \mu), \mathbf{z_1^T}(\delta_{\mathbf{1}}, \mu), \lambda_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}}(\delta_{\mathbf{1}}, \mu), \lambda_{\mathbf{1}}^{\mathbf{T}}(\delta_{\mathbf{1}}, \mu)\right)^T \in \mathbb{R}^{n+m+2r}$. As condições necessárias de otimalidade de KKT são obtidas ao expressarmos o sistema de equações não-lineares primal-dual $\nabla L(\omega) = \mathbf{0}$ em (16):

$$\begin{array}{rcl} \nabla_{\mathbf{x}} L(\omega) & = & \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^{\mathbf{T}} \lambda_{\mathbf{0}} + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^{\mathbf{T}} \lambda_{\mathbf{1}} = \mathbf{0} \\ \nabla_{\mathbf{z_1}} L(\omega) & = & \dot{\Psi}\left(-\mu^{-1} \Delta_1 \mathbf{z_1}\right)^{-1} \lambda_{\mathbf{1}} - \delta_{\mathbf{1}} = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_{\mathbf{0}}} L(\omega) & = & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_{\mathbf{1}}} L(\omega) & = & \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{z_1} = \mathbf{0} \end{array} \tag{16}$$

onde $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz jacobiana do funcional $\mathbf{g}(\mathbf{x})$; $\Delta_1 = diag\,(\delta_{1_i})_{i=1}^r$ e $\dot{\Psi}(\centerdot) = \dot{\Psi}\left(-\mu^{-1} \Delta_1 \mathbf{z_1}\right) = diag\left(-\mu^{-1} \delta_{1_i} z_{1_i}\right)_{i=1}^r$. O método consiste em resolvermos uma sequência de sistemas lineares $A_k \tilde{\mathbf{d}}^{\mathbf{k}} = \mathbf{b^k}$ oriundos da aproximação de Taylor de primeira ordem sobre (16). A matriz simétrica dos coeficientes $A_k \in \mathbb{R}^{(n+m+2r) \times (n+m+2r)}$ é definida conforme (17):

$$A_k = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_k & \mathrm{O}_{n \times r} & \nabla \mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right)^{\mathbf{T}} & \nabla \mathbf{h}\left(\mathbf{x^k}\right)^{\mathbf{T}} \\ \mathrm{O}_{r \times n} & \mu_k^{-1} \dot{\Psi}_k(\centerdot)^{-1} \ddot{\Psi}_k(\centerdot)\, \Delta_{1_k} \Lambda_{1_k} & \mathrm{O}_{r \times m} & I_r \\ \nabla \mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right) & \mathrm{O}_{m \times r} & \mathrm{O}_{m \times m} & \mathrm{O}_{m \times r} \\ \nabla \mathbf{h}\left(\mathbf{x^k}\right) & I_r & \mathrm{O}_{r \times m} & \mathrm{O}_{r \times r} \end{pmatrix}; \tag{17}$$

enquanto que o vetor de resíduos $\mathbf{b^k}$ é expresso como:

$$\mathbf{b^k} = \begin{pmatrix} -\nabla f\left(\mathbf{x^k}\right) - \nabla \mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right)^{\mathbf{T}} \lambda_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}} - \nabla \mathbf{h}\left(\mathbf{x^k}\right)^{\mathbf{T}} \lambda_{\mathbf{1}}^{\mathbf{k}} \\ -\mu_k^{-1} \dot{\Psi}_k(\centerdot)^{-1} \ddot{\Psi}_k(\centerdot)\, \Delta_{1_k} D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^{\mathbf{k}} + \dot{\Psi}_k(\centerdot)\, \delta_{\mathbf{1}}^{\mathbf{k}} - \lambda_{\mathbf{1}}^{\mathbf{k}} \\ -\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right) \\ -\mathbf{h}\left(\mathbf{x^k}\right) - \mathbf{z_1^k} \end{pmatrix}; \tag{18}$$

por fim, o vetor de direções de busca primal-dual é apresentado em (19):

$$\tilde{\mathbf{d}}^{\mathbf{k}} = \left(\left(\tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}}\right)^T, \left(\tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{z_1}}^{\mathbf{k}}\right)^T, \left(\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^{\mathbf{k}}\right)^T, \left(\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^{\mathbf{k}}\right)^T\right)^T, \tag{19}$$

Em que: $\mathcal{K}_k = \nabla^2 f\left(\mathbf{x^k}\right) + \sum_{t=1}^{m} \lambda_{0_t}^k \nabla^2 g_t\left(\mathbf{x^k}\right) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_{1_i}^k \nabla^2 h_i\left(\mathbf{x^k}\right)$; $\ddot{\Psi}(\centerdot) = \ddot{\Psi}\left(-\mu_k^{-1} \Delta_{1_k} \mathbf{z_1^k}\right) = diag\left(\psi''\left(-\mu_k^{-1} \delta_{1_i}^k z_{1_i}^k\right)\right)_{i=1}^r$; $\Lambda_{1_k} = diag\left(\lambda_{1_i}^k\right)_{i=1}^r$; I_r é a matriz identidade de ordem r; $D_{z_1^k} = diag\left(d_{z_{1_i}}^k\right)_{i=1}^r$ é a matriz diagonal cujos elementos são as direções de busca primal relacionadas à $\mathbf{z_1^k}$ e $\mathbf{d}_{\lambda_1}^{\mathbf{k}}$ é o vetor de busca dual associado à $\lambda_{\mathbf{1}}^{\mathbf{k}}$.

3.1. As direções de busca primal-dual do procedimento previsor

O procedimento previsor consiste em tornar nulo os termos quadráticos referentes às direções de busca primal $\mathbf{z_1^k}$ e dual $\lambda_{\mathbf{1}}^{\mathbf{k}}$, pois não conhecemos estas informações *a priori*. Não assumimos $\mu_k = 0$, pois, se assim for, a função de reescalamento não-linear M^2BF (6) não está definida. Nesse sentido, a abordagem previsor-corretor do método primal-dual apresentado neste trabalho é mais próxima conceitualmente ao trabalho de Pinheiro et al. (2015) do que do trabalho de Wu et al.

(1994), para o tradicional método de pontos interiores. Logo, o conjunto de equações associadas ao vetor direções de busca que caracterizam o procedimento previsor são apresentadas em (20).

$$\begin{aligned}
&\mathbf{d^k_{\lambda_0}} = \left(\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right)\theta_k^{-1}\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right)^T\right)^{-1}\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right)\theta_k^{-1}\mathbf{v}^{\mathbf{k}}_{\mu} + \left(\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right)\theta_k^{-1}\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right)^T\right)^{-1}\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right) - \lambda^{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}}\\
&\mathbf{d^k_x} = \theta_k^{-1}\left(\mathbf{v}^{\mathbf{k}}_{\mu} - \nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right)^T\left(\lambda^{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}} + \mathbf{d^k_{\lambda_0}}\right)\right)\\
&\mathbf{d^k_{z_1}} = -\nabla\mathbf{h}\left(\mathbf{x^k}\right)\mathbf{d^k_x} - \mathbf{h}\left(\mathbf{x^k}\right) - \mathbf{z^k_1}\\
&\mathbf{d^k_{\lambda_1}} = -\mu_k^{-1}\dot{\Psi}_{1_k}(\centerdot)^{-1}\ddot{\Psi}_{1_k}(\centerdot)\Delta_{1_k}\Lambda_{1_k}\mathbf{d^k_{z_1}} + \dot{\Psi}_{1_k}(\centerdot)\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{1}} - \lambda^{\mathbf{k}}_{\mathbf{1}}
\end{aligned} \tag{20}$$

onde $\theta_k = \mathcal{K}_k + \mu_k^{-1}\nabla\mathbf{h}\left(\mathbf{x^k}\right)^{\mathbf{T}}\dot{\Psi}_{1_k}(\centerdot)^{-1}\ddot{\Psi}_{1_k}(\centerdot)\Delta_{1_k}\Lambda_{1_k}\nabla\mathbf{h}\left(\mathbf{x^k}\right)$ é a matriz hessiana $\frac{\partial^2 L(\omega^{\mathbf{k}})}{\partial\mathbf{x}\partial\mathbf{x}}$ e $\mathbf{v}^{\mathbf{k}}_{\mu} = -\nabla f\left(\mathbf{x^k}\right) - \nabla\mathbf{h}\left(\mathbf{x^k}\right)^{\mathbf{T}}\dot{\Psi}_k(\centerdot)\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{1}} + \mu_k^{-1}\nabla\mathbf{h}\left(\mathbf{x^k}\right)^{\mathbf{T}}\dot{\Psi}_k(\centerdot)^{-1}\ddot{\Psi}_k(\centerdot)\Delta_{1_k}\Lambda_{1_k}\left(-\mathbf{h}\left(\mathbf{x^k}\right) - \mathbf{z^k_1}\right)$.

3.2. As direções de busca primal-dual do procedimento corretor

Uma vez conhecidas as direções de busca primal-dual do procedimento previsor dado em (20), então a proposta do procedimento corretor é resolver o cálculo das direções de busca conforme (21).

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\tilde{d}^k_{\lambda_0}} = \left(\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right)\theta_k^{-1}\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right)^T\right)^{-1}\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right)\theta_k^{-1}\mathbf{\tilde{v}}^{\mathbf{k}}_{\mu} + \left(\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right)\theta_k^{-1}\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right)^T\right)^{-1}\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right) - \lambda^{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}}\\
&\mathbf{\tilde{d}^k_x} = \theta_k^{-1}\left(\mathbf{\tilde{v}}^{\mathbf{k}}_{\mu} - \nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x^k}\right)^T\left(\lambda^{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}} + \mathbf{\tilde{d}^k_{\lambda_0}}\right)\right)\\
&\mathbf{\tilde{d}^k_{z_1}} = -\nabla\mathbf{h}\left(\mathbf{x^k}\right)\mathbf{\tilde{d}^k_x} - \mathbf{h}\left(\mathbf{x^k}\right) - \mathbf{z^k_1}\\
&\mathbf{\tilde{d}^k_{\lambda_1}} = -\mu_k^{-1}\dot{\Psi}_k(\centerdot)^{-1}\ddot{\Psi}_k(\centerdot)\Delta_{1_k}\Lambda_{1_k}\mathbf{\tilde{d}^k_{z_1}} - \mathbf{c^k} + \dot{\Psi}_k(\centerdot)\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{1}} - \lambda^{\mathbf{k}}_{\mathbf{1}}
\end{aligned} \tag{21}$$

em que $\mathbf{c^k} = \mu_k^{-1}\dot{\Psi}_k(\centerdot)^{-1}\ddot{\Psi}_k(\centerdot)\Delta_{1_k}D_{z_1^k}\mathbf{d^k_{\lambda_1}}$ e, finalmente, $\mathbf{\tilde{v}}^{\mathbf{k}}_{\mu} = \mathbf{v}^{\mathbf{k}}_{\mu} + \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x})^T\mathbf{c^k}$.

3.3. Cálculo do tamanho do passo primal $\bar{\alpha}_p$ e do passo dual $\bar{\alpha}_d$

Uma vez calculadas as direções de busca primal-dual do procedimento corretor, então o cálculo do passo primal e dual é definido de acordo com (22).

$$\bar{\alpha}_p = \min\left\{\min_{-z^k_{1_i}\leq 0 \ e \ \tilde{d}^k_{z_{1_i}}<0}\left\{\frac{-z^k_{1_i}}{\tilde{d}^k_{z_{1_i}}}\right\}, 1\right\} \quad \bar{\alpha}_d = \min\left\{\min_{\lambda^k_{1_i}\geq 0 \ e \ \tilde{d}^k_{\lambda_{1_i}}<0}\left\{\frac{-z^k_{1_i}}{\tilde{d}^k_{z_i}}\right\}, 1\right\}, \forall i = 1, ..., r. \tag{22}$$

Note que não necessitamos de um fator $\sigma = 0,9995$ como é necessário nos métodos de pontos interiores tradicionais. Isso ocorre por a M^2BF e suas derivadas de primeira e de segunda ordem estarem definidas nas condições de fronteira. Após o cálculo do tamanho do passo, atualizamos as variáveis do problema:

$$\begin{gathered}
\left(\left(\mathbf{x^{k+1}}\right)^T, \left(\mathbf{z^{k+1}_1}\right)^T, \left(\lambda^{\mathbf{k+1}}_{\mathbf{0}}\right)^T, \left(\lambda^{\mathbf{k+1}}_{\mathbf{1}}\right)^T\right)^T = \\
\left(\left(\mathbf{x^k}\right)^T, \left(\mathbf{z^k_1}\right)^T, \left(\lambda^{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}}\right)^T, \left(\lambda^{\mathbf{k}}_{\mathbf{1}}\right)^T\right)^T + \left(\bar{\alpha}_p\left(\mathbf{\tilde{d}^k_x}\right)^T, \bar{\alpha}_p\left(\mathbf{\tilde{d}^k_{z_1}}\right)^T, \left(\mathbf{\tilde{d}^k_{\lambda_0}}\right)^T, \bar{\alpha}_d\left(\mathbf{\tilde{d}^k_{\lambda_1}}\right)^T\right)^T
\end{gathered} \tag{23}$$

3.4. O ciclo externo: Atualização dos parâmetros de reescala e dual

A atualização do parâmetro de reescala procede de acordo com (24).

$$\mu_{k+1} = \alpha_\mu \mu_k, \tag{24}$$

para algum $\alpha_\mu \in (0,1)$ previamente estabelecido. Após a atualização, efetuamos o seguinte teste heurístico: Se $\delta_{1_i}^k z_{1_i}^{k+1} > -\mu^{k+1}$, então (24) permanece. Caso contrário, μ^{k+1} é atualizado de acordo com (25). O sinal $''-''$ é devido ao fato de que $z_i^{k+1} < 0$.

$$\mu_{k+1} = -(1-\alpha_\mu)\min\left\{z_{1_i}^{k+1}\right\},\ \forall i = 1,...,r. \tag{25}$$

Para a atualização do parâmetro dual, utilizamos a expressão (26) a seguir:

$$\delta^{\mathbf{k+1}} = \lambda^{\mathbf{k+1}}, \tag{26}$$

isto é, de acordo com Pinheiro et al. (2015), cada componente δ_{1_i} de $\delta_{\mathbf{1}}$ é substituída pela respectiva componente λ_{1_i} de $\lambda_{\mathbf{1}}$ ora calculada pelo método de Newton.

3.5. Algoritmo

Segue o algoritmo computacional do método primal-dual proposto neste trabalho.

Algoritmo 2 Método previsor-corretor primal-dual de reescalamento não-linear M^2BF

Procedimento Inicial:

Defina $\psi \in \mathbb{H}$ a função barreira logarítmica modificada (4); os parâmetros $\alpha_\mu \in (0,1)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\delta_i > 0$; as variáveis primais $\mathbf{x^0}$, $\mathbf{z_1^0} > \mathbf{0}$ tal que $z_{1_i}^0 < \delta_{i_0}^{-1}\mu_0$; e as variáveis duais $\lambda_{\mathbf{0}}^{\mathbf{0}}$, $\lambda_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} > \mathbf{0}$. Defina $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ suficientemente pequeno e um contador $k = 0$. Calcule o vetor de resíduos $\mathbf{b^0}$ dado em (18) e siga para o procedimento principal.

Procedimento Principal:

Enquanto $\left\|\mathbf{b^k}\right\| > \varepsilon$**, faça:**
Procedimento Previsor
Determine as direções de busca primal-dual conforme apresentado em (20).
Procedimento Corretor
Refine as direções de busca primal-dual através de (21).
Cálculo do tamanho dos passos primal e dual e atualização da solução
Calcule o tamanho dos passos primal e dual de acordo com (22); Após este procedimento, utilize (23) para atualizar as soluções primal e dual.
Atualização dos parâmetros
Atualize o parâmetro de reescala utilizando (24) e use (25) se necessário;
Atualize o parâmetro dual por meio de (26)
Faça $k = k + 1$
Calcule $\mathbf{b^k}$ utilizando (18).

---

4. Resultados Numéricos

4.1. O Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR)

De acordo com Roman and Rosehart (2006); Platbrood et al. (2014), o FPOR é um problema de otimização não-linear, não-convexo, estático, de grande porte com variáveis contínuas e discretas e com restrições de equilíbrio. Por suas características e dificuldades variadas, o FPOR é um excelente problema para verificarmos a performance de um algoritmo de otimização tal como é o método primal-dual M^2BF. A formulação do FPOR aplicado neste trabalho, o qual tem por objetivo a minimização das perdas de potência ativa em megawatts (MW), é conforme (27):

$$\begin{array}{lll}
Min & f(\mathbf{V},\alpha) \sum\limits_{k,m\in\mathcal{L}\cup\mathcal{T}} g_{km}\left(\frac{1}{(t_{km})^2}V_k^2 + V_m^2 - 2\frac{1}{t_{km}}V_kV_m\cos(\alpha_k-\alpha_m)\right) & \\
s.a.: & P_{G_k} - P_{C_k} - \sum\limits_{m\in\mathcal{V}_k} P_{km}(\mathbf{V},\alpha) = 0 & \forall k\in\mathcal{C}\cup\mathcal{G}' \\
& Q_{G_k} - Q_{C_k} + b_k^{sh}V_k^2 - \sum\limits_{m\in\mathcal{V}_k} Q_{km}(\mathbf{V},\alpha) = 0 & \forall k\in\mathcal{C} \\
& Q_{Ger_k}^{\min} \le Q_{C_k} - b_k^{sh}V_k^2 + \sum\limits_{m\in\mathcal{V}_k} Q_{km}(\mathbf{V},\alpha) \le Q_{Ger_k}^{\max} & \forall k\in\mathcal{G} \\
& V_k^{\min} \le V_k \le V_k^{\max}, & \forall k\in\mathcal{B}
\end{array} \tag{27}$$

em que:

$$P_{km}(\mathbf{V},\alpha) = g_{km}\frac{1}{t_{km}^2}V_k^2 + \frac{1}{t_{km}}V_kV_m\left[g_{km}\cos(\alpha_k-\alpha_m) + b_{km}\,\mathrm{sen}(\alpha_k-\alpha_m)\right];$$
$$Q_{km}(\mathbf{V},\alpha) = -\left(b_{km}\frac{1}{t_{km}^2} + b_{km}^{sh}\right)V_k^2 + \frac{1}{t_{km}}V_kV_m\left[b_{km}\cos(\alpha_k-\alpha_m) - g_{km}\,\mathrm{sen}(\alpha_k-\alpha_m)\right];$$

são, respectivamente, às expressões para o fluxo de potência ativa e reativa que fluem da barra k para a barra m com a consideração de que barra k é a barra do *tap* dos ramos associados aos transformadores em-fase; $\mathcal{B}$ é o conjunto de todas as barras do sistema elétrico; $\mathcal{C}$ é o conjunto de todas as barras de carga do sistema elétrico; $\mathcal{G}$ é o conjunto de todas as barras geradoras do sistema elétrico; $\mathcal{G}'$ é o conjunto de todas as barras geradoras exceto a barra *slack*; $\mathcal{T}$ é o conjunto dos ramos $k-m$ que representam transformadores em-fase com *tap* fixo; $\mathcal{L}$ é o conjunto dos ramos $k-m$ que representam as linhas de transmissão; g_{km} é a condutância série do ramo $k-m$; b_{km} é a susceptância série do ramo $k-m$; V_k é a magnitude de tensão associada à barra k; V_m é a magnitude de tensão associada à barra m; t_{km} é o tap do transformador em-fase do ramo $k-m$; α_k: é o ângulo de fase associada a tensão na barra k; α_m é o ângulo de fase associada a tensão na barra m; P_{G_k} é a potência ativa gerada pela barra k; P_{C_k} é a potência ativa consumida pela barra k; P_{km} é o fluxo de potência ativa no ramo $k-m$; Q_{G_k} é a potência reativa gerada pela barra k; Q_{C_k} é a potência reativa consumida pela barra k; b_k^{sh} é a susceptância shunt conectada diretamente à barra k; Q_{km} é o fluxo de potência reativa no ramo $k-m$; $Q_{Ger_k}^{\min}$ e $Q_{Ger_k}^{\max}$ são, respectivamente, os limitantes inferior e superior de geração de potência reativa associada à barra k; $V_k^{\min}$ e $V_k^{\max}$ são, respectivamente, os limitantes inferior e superior da magnitude de tensão associada à barra k.

A formulação do FPOR apresentada em (27) é uma formulação simplificada em relação ao FPOR proposto Lage (2013). As principais diferenças são que aqui consideramos os *taps* dos transformadores e as susceptâncias *shunt* de barra fixos também não consideramos as restrições de equilíbrio associadas às restrições de dispositivos de controle de tensão. As variáveis do problema são as magnitudes de tensão e os ângulos de tensão associadas às barras do sistema elétrico e essas variáveis são do tipo contínuas.

4.2. Resultados do método primal-dual M^2BF aplicado ao FPOR.

O método primal-dual M^2BF foi implementado em MATLAB® R2013a e o tempo computacional não é considerado neste trabalho. A performance do método foi avaliado para a resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo apresentado em (27) para os sistemas elétricos de 5, 14 e 39 barras. Além disso, os dados de entrada de cada sistema elétrico são os originais de acordo com o pacote MATPOWER descrito por Zimmerman et al. (2011).

Para todas as barras e de todos os sistemas elétricos estudados, os dados estão em pu e assumimos $0.95 \le V_k \le 1.05$ para todo $k = 1, ..., card(\mathcal{B})$, em que $card(\bullet)$ é o cardinal de um conjunto. Os dados iniciais são sintetizados na Tabela 1. O cálculo das variáveis de folga $\mathbf{z_1}$ e dos multiplicadores de Lagrange $\lambda_\mathbf{0}$ e $\lambda_\mathbf{1}$ iniciais são conforme Pinheiro et al. (2015). A Tabela 2 as características de cada sistema elétrico.

Para qualquer que seja o método de otimização, a Tabela 3 sintetiza as perdas otimizadas bem como o número de restrições ativas associadas as magnitudes de tensão e das barras geradoras

Tabela 1: *Dados de entrada de variáveis e parâmetros.*

Variáveis e parâmetros	Valores
$V_k, \ \ k = 1, ..., card\,(\mathcal{B})$	1
$\alpha_k, \ \ k = 1, ..., card\,(\mathcal{B})$	0
$\delta_{1_i}, \ i = 1, ..., 2card\,(\mathcal{B}) + 2card\,(\mathcal{G})$	1
μ	0,05
α_μ	0,25
ε	10^{-9}

Tabela 2: *Características de cada sistema elétrico.*

	5 barras	IEEE-14	39 barras
N°de ramos	6	20	46
N°de barras de carga	1	9	29
N°de geradores	4	5	10
N°de *taps*	0	3	12
N°de *shunts* de barra	0	1	0
N°de Restrições de Igualdade	5	22	67
N°de restrições de desigualdade canalizada	9	19	49

de cada sistema. Obviamente, as informações atribuídas na Tabela 3 foram obtidos pelo método primal-dual M^2BF.

Tabela 3: *Número de restrições ativas e perdas mínimas para cada sistema elétrico.*

Sistema Elétrico	Número de Restrições Ativas				Perdas (MW)
	$V^{\min}$	$V^{\max}$	$Q_{ger}^{\min}$	$Q_{ger}^{\max}$	
5 Barras	0	1	0	2	3,12450900097656
IEEE-14	0	3	0	0	13,7611082262539
39 Barras	0	3	0	2	44,4002156402608

A Tabela 4 sintetiza os resultados inerentes à número de ciclos totais para satisfazer a ordem de convergência, o erro máximo do vetor residual e o parâmetro de reescala finais.

Tabela 4: *Número de ciclos totais, precisão e o parâmetro de reescalamento final.*

Sistema Elétrico	N°Ciclos k	$\left\Vert \mathbf{b^k} \right\Vert_\infty$	μ_k
5 Barras	15	7,31E-10	1,88E-09
IEEE-14	13	4,03E-10	2,98E-09
39 Barras	18	8,76E-10	2,67E-09

Embora uma precisão na ordem de $\varepsilon = 10^{-5}$ sejam satisfatórios ao FPOR para obtermos os dados técnicos ótimos em pu, os resultados apresentados na Tabela 4 nos mostram que o método primal-dual M^2BF pode atingir grandes precisões com baixo número de ciclos. Para as situações gerais, onde centenas ou milhares de sub-problemas de Fluxo de Potência Ótimo devem ser resolvidos (como é o caso para a solução do FPO probabilístico de Yu and Rosehart (2012)) devemos ter em mente que o algoritmo deve ser robusto e não deve acumular erros. Portanto, o método primal-dual M^2BF é uma alternativa viável para resolver problemas de FPOR e outros problemas de programação não-linear e não-convexas com grande precisão.

5. Conclusões

Neste trabalho aplicamos o método primal-dual de reescalamento não-linear com abordagem previsor-corretor à nova família de funções penalidade para os métodos de lagrangiano aumentado. Dentre as funções penalidades que pertencem à nova família, experimentamos a abordagem da função barreira logarítmica duplamente modificada (M^2BF). O método resultante é a proposta do método primal-dual previsor-corretor M^2BF. O algoritmo do método foi implementado em MATLAB® e foi aplicado ao problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR) para os casos base de 5, 14 e 39 barras. Os resultados desta aplicação nos mostram que a abordagem é viável para resolver problemas de programação não-linear e não-convexa. As propostas de trabalhos futuros estão na abordagem do método em melhorias na formulações do FPOR e em sistemas elétricos maiores como o IEEE-300 barras.

6. Agradecimentos

Esta pesquisa foi financiada parcialmente pela CAPES e FAPESP.
ïż£

Referências

Andreani, R., Haeser, G., Schuverdt, M., and Silva, P. (2012). Two New Weak Constraint Qualifications and Applications. *SIAM Journal on Optimization*, 22(3):1109–1135.

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., and Shetty, C. M. (2006). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley-Interscience, Hoboken, N.J., 3 edition edition.

Bertsekas, D. P. (1999). *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Belmont, Mass, 2nd edition edition.

Bregman, L. M. (1967). The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7(3):200–217.

Dikin, I. I. (1967). Iterative solution of problems of linear and quadratic programming. *Soviet Mathematics. Doklady*, 8:674–675.

Gondzio, J. (2012). Interior point methods 25 years later. *European Journal of Operational Research*, 218(3):587–601.

Griva, I. and Polyak, R. A. (2006). Primal-dual nonlinear rescaling method with dynamic scaling parameter update. *Mathematical Programming*, 106(2):237–259.

Lage, G. G. (2013). *O fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas e restrições de atuação de dispositivos de controle de tensão*. Tese (Doutorado), Universidade de São Paulo.

Matioli, L. C. (2001). *Uma nova metodologia para construção de funções de penalização para algoritmos de lagrangeano aumentado*. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

Matioli, L. C. e Gonzaga, C. C. (2008). A new family of penalties for augmented Lagrangian methods. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 15(10):925–944.

Pinheiro, R. B. N., Balbo, A. R., Baptista, E. C., and Nepomuceno, L. (2015). Interior - exterior point method with global convergence strategy for solving the reactive optimal power flow problem. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 66:235–246.

Platbrood, L., Capitanescu, F., Merckx, C., Crisciu, H., and Wehenkel, L. (2014). A Generic Approach for Solving Nonlinear-Discrete Security-Constrained Optimal Power Flow Problems in Large-Scale Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 29(3):1194–1203.

Polyak, R. (1992). Modified barrier functions (theory and methods). *Mathematical Programming*, 54(1-3):177–222.

Polyak, R. (2014). Lagrangian Transformation and Interior Ellipsoid Methods in Convex Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 164(3):966–992.

Polyak, R. and Griva, I. (2004). Primal-Dual Nonlinear Rescaling Method for Convex Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 122(1):111–156.

Polyak, R. and Teboulle, M. (1997). Nonlinear rescaling and proximal-like methods in convex optimization. *Mathematical Programming*, 76(2):265–284.

Polyak, R. A. (1986, *apud* Polyak, R. and Teboulle, M. (1997)). Controlled processes in extremal and equilibrium problems, VINITI, deposited manuscript, Moscow (in Russian).

Potra, F. A. and Wright, S. J. (2000). Interior-point methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124(1-2):281–302.

Roman, C. and Rosehart, W. (2006). Complementarity model for load tap changing transformers in stability based OPF problem. *Electric Power Systems Research*, 76(6-7):592–599.

Sousa, V. A., Baptista, E. C., and da Costa, G. R. M. (2012). Optimal reactive power flow via the modified barrier Lagrangian function approach. *Electric Power Systems Research*, 84(1):159–164.

Teboulle, M. (1992). Entropic Proximal Mappings with Applications to Nonlinear Programming. *Mathematics of Operations Research*, 17(3):670–690.

Wu, Y.-C., Debs, A., and Marsten, R. (1994). A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(2):876–883.

Xavier, A. E. (2001). Hyperbolic Penalty: A New Method for Nonlinear Programming with Inequalities. *International Transactions in Operational Research*, 8(6):659–671.

Yu, H. and Rosehart, W. (2012). An Optimal Power Flow Algorithm to Achieve Robust Operation Considering Load and Renewable Generation Uncertainties. *IEEE Transactions on Power Systems*, 27(4):1808–1817.

Zimmerman, R., Murillo-Sánchez, C., and Thomas, R. (2011). MATPOWER: Steady-State Operations, Planning, and Analysis Tools for Power Systems Research and Education. *IEEE Transactions on Power Systems*, 26(1):12–19.