

## **PROGRAMAÇÃO DE TRIPULAÇÃO NO TRANSPORTE DE ÔNIBUS URBANO: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA**

**Rafael de Paula Nunes**

Universidade de Fortaleza, Programa de Pós Graduação em Informática Aplicada  
Av. Washigton Soares 1321, CEP: 60811-905, Fortaleza, Ceará, Brasil  
Fanor Devry Brasil  
Av. Santos Dumont 7800, CEP: 60191-156, Fortaleza, Ceará, Brasil  
rafaelpaulanunes@gmail.com

**Napoleão Vieira Nepomuceno**

Universidade de Fortaleza, Programa de Pós Graduação em Informática Aplicada  
Av. Washigton Soares 1321, CEP: 60811-905, Fortaleza, Ceará, Brasil  
napoleaovn@unifor.br

### **RESUMO**

Neste trabalho, propomos um modelo em Programação Linear Inteira para a solução do Problema de Programação de Tripulação em transporte de ônibus urbano. Diante da escassez de mão-de-obra qualificada, buscamos minimizar a quantidade de motoristas utilizados na escala de programação, respeitando-se tanto restrições trabalhistas previstas pela legislação como restrições culturais da empresa de transporte público. Aplicamos o modelo em um cenário de utilização de banco de horas e de limitação do uso de horas-extras. Diferentes técnicas de determinação de tarefas foram adotadas com o intuito de tornar o problema tratável. A flexibilidade do modelo permitiu um melhor estudo sobre o impacto da adoção de determinadas regras na elaboração das escalas. Além disso, os resultados obtidos mostraram-se promissores comparados às soluções praticadas pela empresa de transporte estudada na cidade de Fortaleza, Ceará.

**PALAVARAS CHAVE.** Problema de Programação de Tripulação, Programação Linear Inteira, Transporte Público.

**ÁREA PRINCIPAL.** Logística e Transportes

### **ABSTRACT**

In this paper, we propose an Integer Linear Programming model to solve the Crew Scheduling Problem in urban bus transportation. Due to the difficulty of hiring qualified drivers, we aim at minimizing the total number of employees used in the scheduling, respecting both legal constraints and cultural restrictions imposed by the public transportation company. We apply the model in a scenario of compensatory time off usage and of limitation of extra time performed by drivers. Different techniques for the determination of tasks have been adopted in order to make the problem tractable. The flexibility of the model provided a better study of the impact of adopting certain rules in the determination of schedules. In addition, computational results showed to be promising compared to the solutions applied by a company of urban bus transportation studied in the city of Fortaleza, Ceará.

**KEYWORDS.** Crew Scheduling Problem, Integer Linear Programming, Public Transportation.

**MAIN AREA.** Logistic and Transportation

## 1. Introdução

No Brasil, o principal meio de locomoção utilizado pelas populações de grandes centros urbanos é o transporte público coletivo, em sua grande maioria, através de serviços de ônibus, trem e metrô. Segundo o Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas – IPEA (2011), 60% da população dos centros urbanos brasileiros faz uso da rede de transporte público. Os que usam o serviço apontam o custo como motivo determinante para sua escolha, e os que não usam o serviço indicam a falta de agilidade como o fator determinante para sua não utilização.

Apenas 8 dos grandes centros urbanos de nosso país são atendidos por rede metroviária. Por conta de privatizações no setor e falta de investimento do poder público, os modais de transporte ferroviário e metroviário vêm perdendo cada vez mais espaço, segundo o Instituto Latino-Americano de Estudos Socioeconômicos – ILAESE (2012). De acordo com Silva e Gualda (2000), as privatizações ocorridas no setor de transporte público urbano na última década têm forçado as companhias de ônibus a buscar formas mais eficientes de gerenciar recursos materiais e humanos, objetivando o lucro e sem comprometer a qualidade do serviço.

Dentre os custos das empresas de transporte público, a mão-de-obra representa uma das maiores parcelas (Silva e Marcone, 2006). O planejamento de operações dessas empresas é um trabalho complexo, que envolve quatro diferentes etapas: 1) definição de linhas de operação, 2) definição das tabelas de horários de uma determinada linha, 3) programação dos veículos que serão operados e 4) atribuição das tarefas para os motoristas (Silva e Gualda, 2000). Em geral, as etapas 1 e 2 são de responsabilidade do poder público. Com base em análise das demandas da população, as prefeituras, através de órgãos municipais reguladores, determinam quais linhas e em quais horários estas devem operar. A etapa 3 envolve conceitos relacionados aos veículos que operarão nas linhas. Alguns trabalhos como o de Mesquita et al. (2011) integram as etapas 3 e 4.

A última etapa, objetivo deste trabalho, é um caso particular do Problema de Programação de Tripulação (PPT) e é de grande utilidade para o sistema de transporte público pois, dentre outras aplicações, trata da escala de trabalho dos motoristas de ônibus. O problema consiste em organizar a escala de trabalho, observando-se todas as restrições envolvidas no processo, de forma que o conjunto de horários definidos pelo órgão municipal seja atendido plenamente. Deve também objetivar a redução de custos das empresas, como gastos com horas-extras e/ou quantidade de funcionários.

Neste trabalho, buscamos reduzir a quantidade de motoristas utilizados nas escalas através de melhorias no planejamento das operações das empresas. O trabalho visou também assegurar a qualidade de vida dos motoristas, incorporando restrições culturais da empresa, evitando a geração de escalas que impliquem em dificuldades operacionais ou riscos, por conta de sobrecarga de trabalho, para os motoristas. Propomos um modelo em Programação Linear Inteira (PLI) para a solução do PPT em transporte de ônibus urbano em um cenário de utilização de banco de horas e de limitação do uso de horas-extras.

Através do estudo de diferentes linhas de uma empresa sediada na cidade de Fortaleza, Ceará, definimos uma fórmula empírica que determina um limite superior para a quantidade inicial de motoristas repassados para o modelo em PLI. O modelo foi testado também com diferentes técnicas de determinação das tarefas a serem realizadas. Os resultados de alocação de tarefas mostraram-se bastante satisfatórios do ponto de vista da quantidade de motoristas utilizados quando comparados com resultados da empresa estudada. Objetivos relacionados ao tempo de execução do planejamento da escala e à limitação do uso de hora-extra, bem como o eficiente uso do banco de horas semanal, foram alcançados com o modelo proposto.

O restante do trabalho está organizado na seguinte forma: na Seção 2, apresentamos os principais conceitos relacionados ao Problema de Programação de Tripulação. Na Seção 3, apresentamos o modelo proposto, destacando algumas decisões importantes que guiaram a modelagem matemática. A Seção 4 apresenta os resultados obtidos com os experimentos realizados em diferentes linhas e técnicas de determinação de tarefas. Na Seção 5, apresentamos as considerações finais sobre o trabalho.

## 2. Conceitos

O Problema de Programação de Tripulação é largamente estudado em países desenvolvidos e seus resultados são amplamente utilizados em serviços como: transporte terrestre e aéreo de passageiros, coleta de resíduos, segurança e saúde (Aggarwal, 1982) (Ernst et al. 2004). Consiste em um problema de combinatória onde um conjunto de horários pré-definidos deve ser alocado a um conjunto de motoristas, de modo que nenhum horário deixe de ser atendido e que as restrições trabalhistas, operacionais e culturais das empresas sejam atendidas (Wren e Rosseau, 1995). Essas características fazem do PPT um dos problema mais difíceis de otimizar, pertencendo à classe NP-difícil (Martello e Toth, 1986)(Carraraesi e Gallo, 1984). Para um melhor entendimento do PPT, alguns conceitos devem ser apresentados antes:

- **Linha:** Define um trajeto que deve ser seguido por diversos veículos de uma empresa.
- **Tabela:** Indica a existência de um veículo numa linha. Uma linha pode possuir diversas tabelas em um mesmo dia.
- **Tipo de Dia:** Pode ser útil, sábado ou domingo. Uma mesma linha pode possuir uma quantidade diferente de tabelas dependendo do tipo de dia. Isso ocorre pois nem sempre a demanda de passageiros de uma determinada linha é a mesma durante toda a semana.
- **Horário:** Informa um detalhe operacional de uma tabela. Pode ser, por exemplo, a definição do horário em que o veículo sai da garagem da empresa para iniciar sua operação ou o horário de passagem em um determinado posto de controle da linha.
- **Viagem:** Representa o intervalo de tempo entre um dado horário e o horário subsequente.
- **Posto de Controle:** Representa um local, ponto de passagem ou parada, dentro de uma linha. Nestes postos é possível realizar a substituição de motoristas.
- **Tipo de Horário:** Identifica qual evento ocorrerá, naquele horário, para o motorista daquele veículo: Saída, Lanche, Recolher Veículo, Entrada, Passagem, etc.
- **Motorista Efetivo:** É um motorista com grande tempo de empresa e que conquistou o direito de ser escalado sempre na mesma linha e com horário relativamente fixo.
- **Motorista Folguista:** Em geral, trata-se de um motorista novato cujas jornadas servem para cobrir folgas de motoristas efetivos ou para executar os últimos horários de uma tabela que não puderam ser alocadas para um motorista efetivo.

Órgãos municipais ficam responsáveis por repassar as definições de linhas, tabelas, horários e postos de controle, necessárias para o planejamento da escala por parte das empresas. Os horários devem ser seguidos a rigor sob risco de perda das concessões de operação.

De acordo com Gomes e Gualda (2011), o PPT costuma ser dividido na literatura em dois diferentes sub-problemas: o Problema de Determinação de Tarefas (PDT) e o Problema de Atribuição de Escalas (PAE). Ainda segundo Gomes e Gualda (2011), esta decomposição se justifica pela natureza combinatória do problema. De fato, a utilização de técnicas para a resolução do PDT, embora possa comprometer a qualidade da solução final, colabora com a redução do tamanho do PAE, facilitando o tratamento computacional do PPT. Diversos trabalhos como (Mapa, 2004) e (Silva e Marcone, 2006) obtiveram boas soluções para o PPT através desta decomposição. Neste trabalho, seguimos a mesma idéia diante da quantidade de tabelas e viagens presentes nas instâncias das linhas estudadas.

A Figura 1 ilustra a transformação das viagens em tarefas e a atribuição destas às jornadas, à medida que o PDT e o PAE são aplicados, respectivamente.

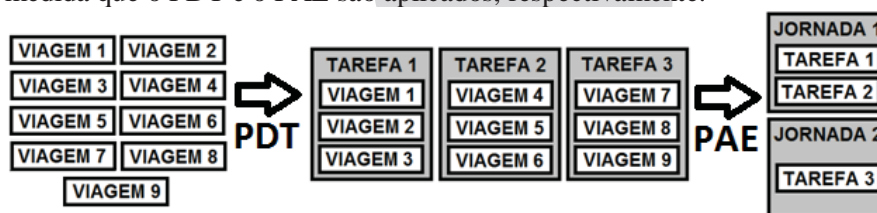


Figura 1. Elaboração de escala com uso de PDT e PAE.

Outro conceito importante relacionado à elaboração da escala se refere ao escopo de operação. A Figura 2 apresenta um exemplo de como linhas e tabelas se relacionam com empresas e postos de controle. É possível perceber que diferentes linhas de uma mesma empresa podem compartilhar um mesmo posto (por exemplo, o Posto 3 faz parte das Linhas 1 e 4), e o mesmo pode ocorrer com diferentes empresas (como o Posto 2, atendido pelas Empresas 1 e 2).

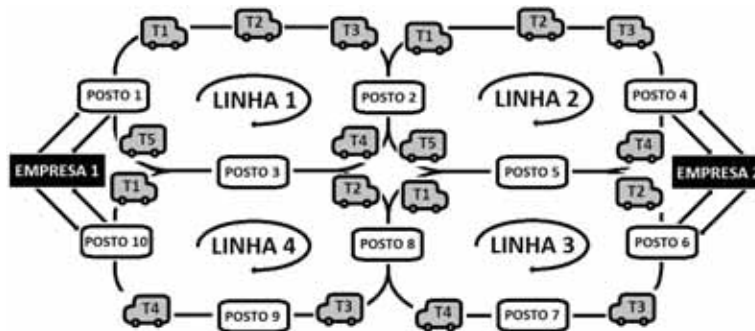


Figura 2. Ilustração de linhas e tabelas de empresas de transporte público urbano.

A escolha do escopo para elaboração de escala é uma questão relacionada à gestão das empresas. Diversas dificuldades operacionais são adicionadas ao planejamento da escala à medida que o escopo torna-se mais abrangente. As opções de escopo existentes são:

- **Tabela:** Um motorista pode executar apenas horários de uma mesma tabela.
- **Linha:** Um motorista pode realizar tarefas de duas ou mais tabelas da mesma linha.
- **Empresa:** É o caso mais abrangente, o motorista pode assumir tarefas de quaisquer linhas desde que pertençam à mesma empresa.

### 3. Modelo Proposto

Na literatura, o PPT é comumente tratado como um *Set Covering Problem* (SCP) ou como um *Set Partition Problem* (SPP). Prata (2009) sugere a abordagem (SCP) por conta da redução no tempo de execução mesmo que exija um pós-processamento para remoção de dupla alocação de tarefas. Park e Ryu (2006) sugerem uma abordagem com *Maximal Covering Problem* (MCP) que relaxa ainda mais o problema. Mesquita *et al.* (2008) propõem um *Set Partition Covering* (SPC), que faz uma mistura entre SCP e SPP e consegue uma baixa taxa de dupla alocação de tarefas. Nós tratamos o PPT como um SPP que evita a necessidade de pós-processamento para remoção de dupla alocação de tarefas.

Desenvolvemos um modelo genérico em PLI para resolver o PPT e optamos pelo tratamento de PDT e PAE de forma não integrada. Em geral, as viagens possuem duração em minutos muito pequena, e o agrupamento destas em tarefas factíveis mostra-se interessante pois reduz a dimensão da instância de entrada do PAE e, conseqüentemente, restringe o espaço de busca do PLI (Smith e Wren 1988).

A implementação do modelo permite a seleção das restrições e a definição dos parâmetros com o objetivo de flexibilizar o trabalho de elaboração da escala. A utilização do escopo de empresa, por sua maior flexibilidade no planejamento das escalas, seria a opção ideal para um melhor aproveitamento das horas da jornada semanal dos motoristas. No entanto, os primeiros experimentos realizados, que levavam em consideração somente o escopo de linha, já apresentaram demora excessiva no processamento para grandes linhas. Tal percepção foi decisiva para a adoção do escopo de linha neste trabalho.

Uma limitação adicional foi incorporada ao escopo de linha, permitindo a troca de tabelas somente de um dia para outro. Tal medida foi adotada para evitar a introdução de mais complexidade ao modelo, evitando a criação de restrições que precisassem contabilizar na jornada dos motoristas o tempo de troca entre tabelas. Dessa forma as empresas ficam livres das dificuldades operacionais de deslocar os motoristas entre diferentes postos de controle para a

realização da troca de tabela. De certa forma, essa decisão agrada as empresas que possuem o hábito de escalar, sempre que possível, o mesmo veículo para a mesma tabela e que consideram interessante o fato deste veículo não ser operado por diversos motoristas, aumentando assim o senso de responsabilidade dos motoristas com os veículos.

### 3.1. Índices

É necessário formalizarmos alguns índices, parâmetros, funções de indexação e variáveis de decisão, para a criação do modelo em PLI. Como índices temos:

- $m$ : É o  $m$ -ésimo motorista onde  $m \in \mathcal{M} = \{0, 1, \dots, M - 1\}$  e  $M$  é a quantidade de motoristas disponíveis para a escala.
- $s$ : É a  $s$ -ésima semana onde  $s \in \mathcal{S} = \{0, 1, \dots, S - 1\}$  e  $S$  é a quantidade em semanas de planejamento da escala.
- $d$ : É o  $d$ -ésimo dia da semana  $s$  onde  $d \in \mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e 0 representa a segunda-feira, seguindo até o domingo que é representado pelo 6.
- $t$ : É a  $t$ -ésima tabela do dia  $d$  onde  $t \in \mathcal{T}_d = \{0, 1, \dots, T_d - 1\}$  e  $T_d$  é a quantidade de tabelas do dia  $d$ .
- $f$ : É a  $f$ -ésima tarefa da tabela  $t$  onde  $f \in \mathcal{F}_t = \{0, 1, \dots, F_t - 1\}$  e  $F_t$  é a quantidade de tarefas da tabela  $t$ .
- $e$ : É o  $e$ -ésimo dia da escala onde  $e \in \mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, \dots, E - 1\}$  e  $E$  é a quantidade de dias da escala.

### 3.2. Parâmetros

O modelo precisa de diversos parâmetros de entrada, alguns fornecidos pelo órgão público responsável por controlar a concessão das linhas às empresas, outros pelo responsável pela geração da escala e que são definidos por: Consolidação das Leis Trabalhistas (CLT), acordos coletivos das categoria e regras culturais de cada empresa.

- $TF_{s,d,t,f}$ : O tamanho, em minutos, da tarefa  $f$  da tabela  $t$  do dia  $d$  da semana  $s$ , onde  $TF_{s,d,t,f} \in \{\mathbb{Z}_+^*\}$ .
- $HI_{s,d,t,f}$ : A hora de início da tarefa  $f$  da tabela  $t$  do dia  $d$  da semana  $s$ .
- $HT_{s,d,t,f}$ : A hora de término da tarefa  $f$  da tabela  $t$  do dia  $d$  da semana  $s$ .
- $QDUF_m$ : Quantidades de dias entre a última folga e a data de início da escala de um motorista  $m$ , onde  $QDUF_m \in \{\mathbb{Z}_+\}$ .
- $QSUFD_m$ : Quantidade de semanas desde a última folga de domingo e a data de início da escala de um motorista  $m$ , onde  $QSUFD_m \in \{\mathbb{Z}_+\}$ .
- $HTUD_m$ : Hora de término da jornada de trabalho do motorista  $m$  no último dia da escala precedente. Caso o motorista não tenha trabalhado nesse dia, o valor será igual a 0:00h.
- $QHED$ : Quantidade máxima de horas extras diárias permitidas onde  $QHED \in \{\mathbb{Z}_+\}$ . O valor padrão deste parâmetro é de 2h.
- $QMDEJ$ : Quantidade mínima de descanso entre jornadas, em horas, onde  $QMDEJ \in \{\mathbb{Z}_+^*\}$ . O valor padrão deste parâmetro é de 11h.
- $QMDSF$ : Quantidade máxima de dias sem folga, onde  $QMDSF \in \{0, 1, \dots, 6\}$ . O valor padrão deste parâmetro é de 6 dias.
- $QMAHTT$ : Quantidade máxima de horas de um turno de trabalho, onde  $QMAHTT \in \{\mathbb{Z}_+^*\}$ . O valor padrão deste parâmetro é de 7h20.
- $QMSSFD$ : Quantidade máxima de semanas sem folga no domingo na escala, onde  $QMSSFD \in \{\mathbb{Z}_+^*\}$ . O valor padrão deste parâmetro é de 6 semanas.
- $QMHEJ$ : Quantidade máxima de horas extras para cada semana da escala, onde  $QMHEJ \in \{\mathbb{Z}_+\}$ . O valor deste parâmetro é definido pela empresa.
- $QMAHPS$ : Quantidade máxima de horas não aproveitadas por motorista para cada

semana da escala, onde  $QMAHPS \in \{\mathbb{Z}_+\}$ . O valor deste parâmetro é definido pela empresa.

$QHJS$ : Jornada semanal de trabalho do motorista, obrigatoriamente paga pela empresa, em horas, onde  $QHJS \in \{\mathbb{Z}_+\}$ . O valor padrão deste parâmetro é de 44h.

### 3.3. Funções de Indexação

Definimos duas funções de indexação para o modelo. Tais funções têm como objetivo realizar o mapeamento entre os dias corridos da escala  $e$  e as semanas e seus dias,  $s$  e  $d$ , respectivamente.

$DC(e) = e \bmod 7$  Informa o dia  $d$  da semana  $s$  que corresponde ao dia de escala  $e$ . O operador  $\bmod$  determina o resto da divisão inteira.

$SC(e) = e \div 7$  Informa a semana  $s$  onde se encontra o dia  $d$  que corresponde ao dia de escala  $e$ . O operador  $\div$  determina o quociente da divisão inteira.

### 3.4. Variáveis de Decisão

Algumas variáveis de decisão foram criadas para o modelo.

$x_{m,s,d,t,f}$ : Indica se a tarefa  $f$  da tabela  $t$  do dia  $d$  da semana  $s$  foi uma tarefa atribuída ao motorista  $m$ , onde  $x_{m,s,d,t,f} \in \{0, 1\}$ .

$y_{m,s,d}$ : Indica se, no dia  $d$  da semana  $s$  o motorista  $m$  trabalhou, onde  $y_{m,s,d} \in \{0, 1\}$ .

$z_m$ : Indica se o motorista  $m$  foi utilizado na escala ou não, onde  $z_m \in \{0, 1\}$ .

$r_{m,s,d,t,f}$ : Indica se, na tarefa  $f$  da tabela  $t$  do dia  $d$  da semana  $s$ , o motorista  $m$  encerrou a jornada diária, onde  $r_{m,s,d,t,f} \in \{0, 1\}$ .

$u_{m,s}$ : Indica a quantidade em minutos trabalhada a mais ou a menos em relação a  $QHJS$  pelo motorista  $m$  na semana  $s$ , onde  $u_{m,s} \in \{(-QMAHPS) * 60, QHED * QMDSF * 60\}$ .

$v_{m,s}$ : Indica a quantidade de horas-extras a ser paga ao motorista  $m$  na semana  $s$ , onde  $v_{m,s} \in \{0, QHED * QMDSF * 60\}$ .

### 3.5. Modelo de PLI

A definição de um limite superior factível para a quantidade de motoristas é um fator importante para a solução do PPT. Utilizar um critério muito conservador pode elevar o tempo de solução do problema sem que haja ganho por conta desta decisão. Por outro lado, a utilização de um valor muito baixo pode causar inviabilidade. No modelo proposto, adotamos um método simples que: (1) contabiliza a quantidade de horas de todas as tarefas das tabelas da linha na primeira semana de planejamento e (2) divide esse valor pela quantidade de horas semanais que um motorista deve trabalhar sem a adoção de horas-extras. Um fator de multiplicação  $g > 1$  foi adotado para evitar inviabilidade em virtude de concessões de folga e outras restrições que garantem mais qualidade de vida aos motoristas no planejamento da escala.

$$M = g * \left\lceil \frac{\sum_{d=0}^6 \sum_{t=0}^{T_d-1} \sum_{f=0}^{F_t-1} (TF_{0,d,t,f})}{(60 * QHJS)} \right\rceil$$

A função objetivo minimiza os motoristas utilizados no planejamento de  $S$  semanas.

$$\sum_{m=0}^{M-1} z_m \quad (1)$$

As restrições (2) garantem que todas as tarefas são atendidas por algum motorista.

$$\sum_{m=0}^{M-1} x_{m,s,d,t,f} = 1, \quad \forall s \in \mathcal{S}, \forall d \in \mathcal{D}, \forall t \in \mathcal{T}_d, \forall f \in \mathcal{F}_t \quad (2)$$

Nas restrições (3), identificamos a partir das variáveis  $x$  se um dado motorista  $m$  trabalhou no dia  $d$  da semana  $s$ .

$$y_{m,s,d} \geq x_{m,s,d,t,f}, \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall s \in \mathcal{S}, \forall d \in \mathcal{D}, \forall t \in \mathcal{T}_d, \forall f \in \mathcal{F}_t \quad (3)$$

E, a partir de  $y$ , verificamos nas restrições (4) se o motorista foi utilizado na escala.

$$z_m \geq y_{m,s,d}, \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall s \in \mathcal{S}, \forall d \in \mathcal{D} \quad (4)$$

Nas restrições (5) e (6), determinamos a última tarefa da jornada de um motorista.

$$r_{m,s,d,t,f} \geq x_{m,s,d,t,f-1} - x_{m,s,d,t,f}, \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall s \in \mathcal{S}, \forall d \in \mathcal{D}, \forall t \in \mathcal{T}_d, \forall f \in \{1, 2, \dots, F_t - 1\} \quad (5)$$

$$r_{m,s,d,t,F_t} \geq x_{m,s,d,t,F_t-1}, \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall s \in \mathcal{S}, \forall d \in \mathcal{D}, \forall t \in \mathcal{T}_d \quad (6)$$

Para garantir que um motorista trabalhe em uma única tabela em um dado dia, escrevemos as restrições (7).

$$\sum_{t=0}^{T_d-1} \sum_{f=1}^{F_t} r_{m,s,d,t,f} \leq 1, \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall s \in \mathcal{S}, \forall d \in \mathcal{D} \quad (7)$$

Todo motorista tem direito a um intervalo mínimo de descanso entre o fim de sua jornada diária e o início da jornada subsequente. É o que escrevemos nas restrições (8). As restrições (9), em particular, consideram o último dia de trabalho da escala anterior.

$$x_{m,SC(e),DC(e),t_1,f_1} + x_{m,SC(e+1),DC(e+1),t_2,f_2} \leq 1, \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall e \in \{0, 1, 2, 3, \dots, (E-2)\}, \forall t_1 \in \{0, 1, \dots, T_{DC(e)} - 1\}, \forall t_2 \in \{0, 1, \dots, T_{DC(e+1)} - 1\}, \quad (8)$$

$$\forall f_1 \in \{0, 1, \dots, F_{t_1} - 1\} \wedge HT_{SC(e),DC(e),t_1,f_1} > 24:00h - QMDEJ, \quad \forall f_2 \in \{0, 1, \dots, F_{t_2} - 1\} \wedge HI_{SC(e+1),DC(e+1),t_2,f_2} + 24:00h - HT_{SC(e),DC(e),t_1,f_1} < QMDEJ$$

$$x_{m,0,0,t,f} = 0, \quad \forall m \in \mathcal{M} \wedge HTUD_m > 24:00h - QMDEJ, \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, T_0 - 1\}, \quad \forall f \in \{0, 1, \dots, F_t - 1\} \wedge HI_{0,0,t,f} + 24:00h - HTUD_m < QMDEJ \quad (9)$$

As restrições (10) limitam a quantidade de horas diárias de trabalho de um motorista.

$$\sum_{t=0}^{T_d-1} \sum_{f=0}^{F_t-1} (TF_{s,d,t,f} * x_{m,s,d,t,f}) \leq 60 * (QMAHTT + QHED), \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall s \in \mathcal{S}, \forall d \in \mathcal{D} \quad (10)$$

O total de horas das tarefas atribuídas a um motorista deve ser igual à quantidade de horas de sua jornada semanal de trabalho, admitindo-se a existência de horas-extras e horas não aproveitadas, representadas pela variável de folga  $u_{m,s}$  nas restrições (11).

$$\sum_{d=0}^6 \sum_{t=0}^{T_d-1} \sum_{f=0}^{F_t-1} (TF_{s,d,t,f} * x_{m,s,d,t,f}) = (QHJS * 60 * z_m) + u_{m,s}, \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall s \in \mathcal{S} \quad (11)$$

Sempre que um motorista realizar mais do que a quantidade de horas de sua jornada semanal de trabalho, deverá ser remunerado por estas horas-extras. Entretanto, caso realize menos horas do que deveria, não haverá prejuízo para o motorista. Ou seja, serão horas não aproveitadas pela empresa. A contabilização destas horas-extras é realizada por  $v_{m,s}$ .

$$v_{m,s} \geq u_{m,s}, \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall s \in \mathcal{S} \quad (12)$$

As restrições (13) limitam a quantidade de hora-extra ao máximo que a empresa de transporte está disposta a pagar por semana na escala.

$$\sum_{m=0}^{M-1} v_{m,s} \leq QMHES * 60, \quad \forall s \in \mathcal{S} \quad (13)$$

Nenhum motorista pode trabalhar mais do que certa quantidade de dias consecutivos. As restrições (14) determinam a concessão de folgas. As restrições (15), em particular, consideram os dias de trabalho da escala anterior.

$$\sum_{e_2=e}^{e+QMDSF} y_{m,SC(e_2),DC(e_2)} \leq QMDSF, \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall e \in \{0,1,2,3,\dots,(E - QMDSF - 1)\} \quad (14)$$

$$\sum_{e=0}^{QMDSF - QDUF_m} y_{m,SC(e),DC(e)} \leq QMDSF - QDUF_m, \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (15)$$

As restrições (16) regulamentam a concessão de folga em dia de domingo, pois tem tratamento especial em virtude de acordos coletivos. Em particular, as restrições (17) fazem a ligação com os dados da escala anterior.

$$\sum_{s_2=s}^{s+QMSSFD} y_{m,s_2,6} \leq QMSSFD, \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall s \in \{0,1,\dots,S - QMSSFD - 1\} \quad (16)$$

$$\sum_{s=0}^{QMSSFD - QSUFD_m} y_{m,s,6} \leq QMSSFD - QSUFD_m, \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (17)$$

#### 4. Resultados Obtidos

Os testes computacionais foram realizados em um computador *Dell XPS 8700* com sistema operacional *Microsoft Windows 7 Professional 64bits*, 16GB de memória *RAM DDR3 Dual Channel* de 1600 MHz e processador *Intel Core i7 4790* de 3.6Ghz com 8 núcleos. Utilizamos o *IBM ILOG Cplex* como ferramenta de programação matemática. A codificação foi feita em linguagem *Java*. Foi desenvolvido um aplicativo com a *IDE Borland Delphi 7* que importou os arquivos fornecidos pelo órgão público gestor, com dados das linhas das empresas, para um sistema gerenciador de banco de dados *Firebird 2.1*. Este aplicativo é a implementação do PDT e recebe como entrada: linha que desejamos otimizar, quantidade de semanas de planejamento e o tipo de PDT utilizado. Como resultado, estima a quantidade de motoristas  $M$ , conforme proposto na Sessão 3.5, e gera a entrada para o PLI desenvolvido no *Cplex*, que é a implementação do PAE. O *Cplex* recebe ainda todos os parâmetros de entrada da Sessão 3.2.

Para demonstrar a importância da definição da quantidade  $M$  de motoristas disponíveis no modelo, realizamos um estudo de performance em 2 linhas de médio porte e 2 linhas de grande porte, para um PDT com tamanho máximo de tarefa de 7h20. Conforme ilustrado na



Figura 3, demonstra-se que o tempo de execução tende a aumentar à medida que a quantidade de motoristas  $M$  aumenta.

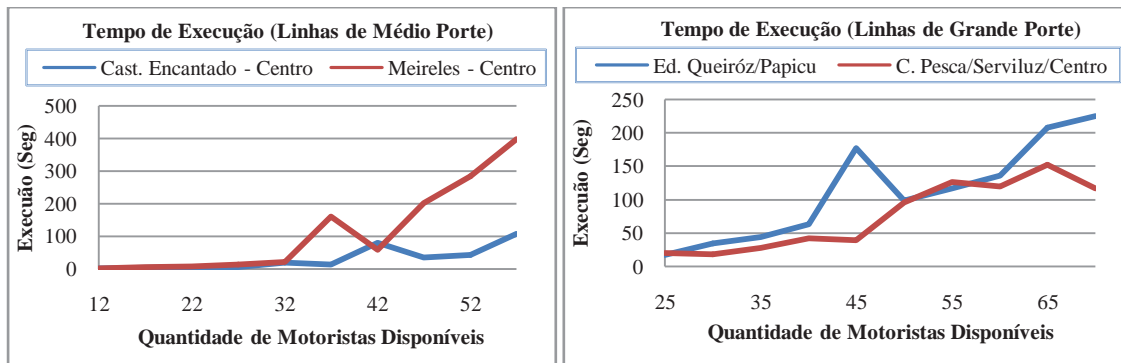


Figura 3. Análise do tempo de execução para planejamento de 4 semanas e PDT de 7h20.

Para este mesmo cenário, ilustramos na Figura 4 a redução, embora pequena, da quantidade de motoristas efetivamente utilizados em uma solução ótima de acordo com a quantidade  $M$  de motoristas disponíveis. Note que tal redução só é possível porque, na prática, cada motorista possui valores particulares para os parâmetros  $HTUD_m$ ,  $QDUF_m$  e  $QSUFD_m$  que se refletem nas restrições (9), (15) e (17) respectivamente. Portanto, aumentando-se o universo de motoristas disponíveis, é possível se obter soluções mais eficientes. Esta influência ficou mais evidente na linha Edson Queiróz/Papicu, onde a quantidade reduziu de 25 para 23 motoristas.

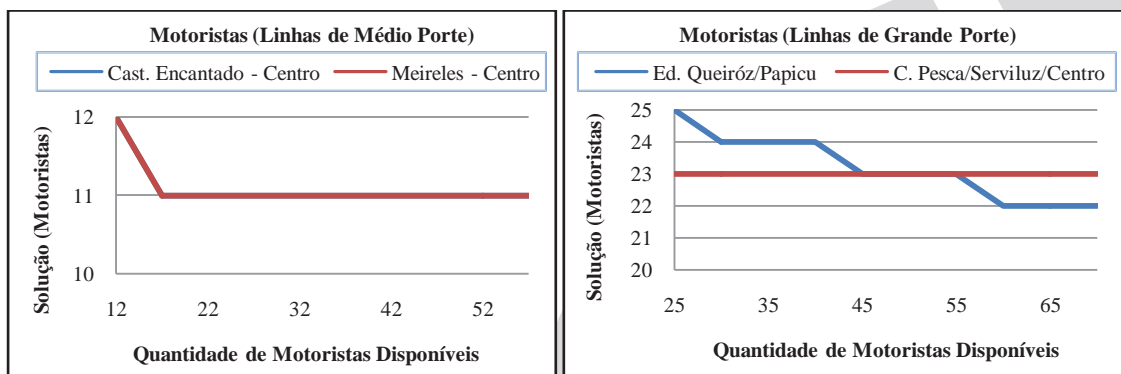


Figura 4. Análise da solução (motoristas) para planejamento de 4 semanas e PDT de 7h20.

As Tabelas de 1 a 4 apresentam os resultados obtidos para estas mesmas linhas. O planejamento foi de 4 semanas e o tempo de execução foi limitado em 1 hora. A quantidade inicial de motoristas foi determinada pela fórmula proposta na Sessão 3.5, considerando  $g = 2$ . Os parâmetros de entrada  $QMHEs$  e  $QMAHPS$  receberam valores de 50h e 44h respectivamente. Os demais parâmetros foram utilizados com seus valores padrões. Consideramos ainda três abordagens de PDT: sua não utilização, posto de controle fixo e tamanho máximo de tarefa.

Tabela 1. Resultados com diferentes tipos de PDT, linha Castelo Encantado-Centro.

	Tipos de PDT												
	Sem PDT	Posto Fixo			Tamanho Máximo de Tarefa								
		Posto 7	Posto 378	60 Min.	120 Min.	180 Min.	240 Min.	300 Min.	360 Min.	420 Min.	480 Min.	540 Min.	
Tempo de Execução	lh	lh	lh	lh	lh	lh	lh	6,25s	5,31s	3,61s	2,30s	3,21s	
Tarefas	3076	1296	1904	2588	904	632	464	384	328	284	260	244	
Horas Extras	-	2:59	-	-	0:00	0:04	0:41	0:00	0:00	2:03	20:44	82:13	
Horas não Aproveitadas	-	1507:07	-	-	1002:00	826:04	474:41	650:00	650:00	300:03	318:44	380:13	
Motoristas	-	17	-	-	15	14	12	13	13	11	11	11	
Solução	Não	Viável	Não	Não	Viável	Viável	Viável	Ótima	Ótima	Ótima	Ótima	Ótima	
GAP	-	57%	-	-	46%	42%	32%	0%	0%	0%	0%	0%	

Tabela 2. Resultados com diferentes tipos de PDT, linha Meireles-Centro.

	Tipos de PDT											
	Sem PDT	Posto Fixo		Tamanho Máximo de Tarefa								
		Posto 7	Posto 378	60 Min.	120 Min.	180 Min.	240 Min.	300 Min.	360 Min.	420 Min.	480 Min.	540 Min.
Tempo de Execução	1h	1h	1h	1h	1h	1h	1h	1h	4,97s	5,58s	2,80s	-
Tarefas	3040	1272	1892	2488	900	628	460	364	328	284	256	224
Horas Extras	-	0:00	0:00	-	0:00	0:00	1:36	0:00	0:00	2:51	23:36	-
Horas não Aproveitadas	-	1183:12	1464:00	-	1034:48	858:48	684:24	682:48	682:48	333:39	354:24	-
Motoristas	-	15	17	-	15	14	13	13	13	11	11	-
Solução	Não	Viável	Viável	Não	Viável	Viável	Viável	Viável	Ótima	Ótima	Ótima	Inviável
GAP	-	52%	56%	-	47%	43%	39%	15%	0%	0%	0%	-

Tabela 3. Resultados com diferentes tipos de PDT, linha Edson Queiroz/Papicu.

	Tipos de PDT											
	Sem PDT	Posto Fixo		Tamanho Máximo de Tarefa								
		Posto 18	Posto 85	60 Min.	120 Min.	180 Min.	240 Min.	300 Min.	360 Min.	420 Min.	480 Min.	540 Min.
Tempo de Execução	1h	-	1h	1h	1h	1h	1h	1h	36,66s	1:37s	39,51s	15,58s
Tarefas	6328	2960	3228	5252	1912	1376	1068	880	708	656	512	476
Horas Extras	-	-	-	-	-	-	0:00	0:00	0:00	6:11	12:45	88:08
Horas não Aproveitadas	-	-	-	-	-	-	3234:12	1826:12	1298:12	776:23	430:57	506:20
Motoristas	-	-	-	-	-	-	38	30	27	24	22	22
Solução	Não	Inviável	Não	Não	Não	Não	Viável	Viável	Ótima	Ótima	Ótima	Ótima
GAP	-	-	-	-	-	-	51%	14%	0%	0%	0%	0%

Tabela 4. Resultados com diferentes tipos de PDT, linha Caça e Pesca/Serviluz/Centro.

	Tipos de PDT											
	Sem PDT	Posto Fixo		Tamanho Máximo de Tarefa								
		Posto 84	Posto 421	60 Min.	120 Min.	180 Min.	240 Min.	300 Min.	360 Min.	420 Min.	480 Min.	540 Min.
Tempo de Execução	1h	1h	1h	1h	1h	1h	1h	1h	5:46s	2:31s	36,17s	49,53s
Tarefas	5160	2516	2444	4448	2232	1468	1048	840	760	684	536	532
Horas Extras	-	-	-	-	-	-	0:00	0:00	25:03	00:00	25:18	67:22
Horas não Aproveitadas	-	-	-	-	-	-	3314:52	3312:52	521:55	496:52	522:10	564:14
Motoristas	-	-	-	-	-	-	39	39	23	23	23	23
Solução	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Viável	Viável	Ótima	Ótima	Ótima	Ótima
GAP	-	-	-	-	-	-	51%	51%	0%	0%	0%	0%

A primeira abordagem de PDT torna a execução do problema impraticável. De fato, execuções foram realizadas com limite de tempo de 12 horas e, mesmo assim, não foi possível sequer identificar solução viável para nenhuma das linhas. A utilização de PDT com posto fixo, uma abordagem onde selecionamos um dos postos de controle da linha como único local onde é permitida a troca de motoristas, apesar de apresentar relativa vantagem operacional para a empresa, não foi satisfatória. Isto porque, considerando-se o limite de 1 hora para o tempo de execução, apenas três de oito testes apresentaram soluções viáveis mas com *gap* de otimalidade superior a 50%, e nem mesmo solução viável foi obtida em quatro outras instâncias.

Nove diferentes instâncias de PDT de tamanho máximo de tarefa foram testadas. A redução do tempo de execução e a melhoria da qualidade das soluções ficaram evidentes à medida que o tamanho máximo da tarefa aumentava. Ao contrário do que a percepção inicial pudesse indicar, reduzir o tamanho das tarefas, em geral, não melhorou o aproveitamento dos motoristas, em virtude do aumento do tamanho do problema e da limitação do tempo de execução estabelecido. Ainda assim, percebemos na Tabela 1 um caso em que um PDT de 240 minutos encontrou uma solução viável com quantidade de motoristas inferior à solução ótima de um PDT de 300 minutos. Tal fato sugere que soluções ainda melhores poderiam ser encontradas com tarefas menores se um limite de processamento maior fosse usado. Nos casos em que o PDT foi superior a 360 minutos, a solução ótima sempre foi encontrada para problemas viáveis.

Sobre as horas não aproveitadas, apesar da sua redução com o aumento do tamanho das tarefas, os valores são considerados altos. Tais horas podem ser aproveitadas pelas empresas na escala de motoristas em outras linhas. Entretanto o ideal seria sua redução através da aplicação de

um segundo PLI com função objetivo que vise sua redução (Vilas Boas e Silva, 2014). Implementamos este segundo PLI, com base no PLI original, com a adição de uma nova restrição que limita a quantidade de motoristas ao valor encontrado no PLI original e a substituição da função objetivo por uma que maximiza o valor de uma nova variável de decisão  $w_{m,s} \in \{-QMAHPS, 0\}$ . Tal variável representa a quantidade de horas não aproveitadas de um dado motorista  $m$  na semana  $s$ . Dessa forma, observamos a eliminação de horas-extras e a redução das horas não aproveitadas em 21%, 6%, 17% e 11%, quando comparadas às soluções encontradas para PDT de 540min nas linhas das Tabelas de 1, 3 e 4, e PDT de 480min para a Tabela 2.

Ainda sobre a quantidade de motoristas, as soluções encontradas para duas das linhas apresentadas foram comparadas com as escalas praticadas pela empresa estudada. Para a linha Meireles-Centro, obtivemos redução de 47,62%. Já na linha Castelo Encantado-Centro, a redução foi de 59,26%. Importante esclarecer que a empresa em questão planeja suas escalas com escopo de empresa e, por este motivo, mais de 60% dos motoristas utilizados eram folguistas e, portanto, sub-aproveitados nas linhas em questão por serem compartilhados com outras linhas.

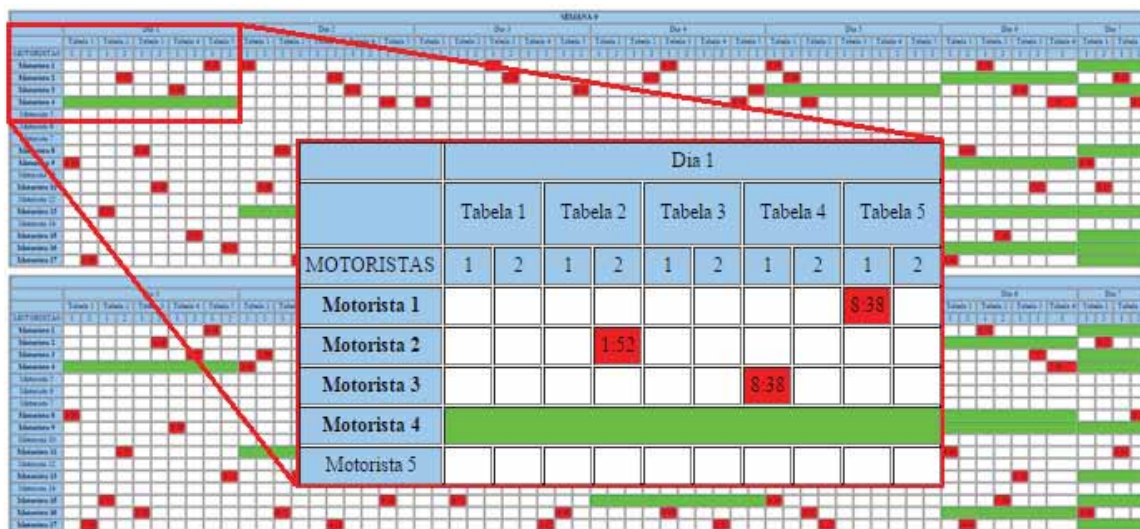


Figura 5. Representação gráfica de solução para a linha Castelo Encantado-Centro.

Na Figura 5, ilustramos a solução para as duas primeiras semanas da linha Castelo Encantado-Centro com PDT de 540 minutos. Os resultados são apresentados separadamente por semanas e as colunas representam as tarefas de cada uma das tabelas dos sete dias da semana, começando na segunda-feira. As linhas representam os motoristas que foram disponibilizados para a escala, e cada célula destacada em vermelho representa uma tarefa que foi atribuída a um motorista. As células destacadas em verde indicam os dias em que um motorista recebeu folga. Nesta representação, é fácil perceber a concentração de folgas em dia de domingo, como já esperado, por conta das restrições (16) e (17). É possível perceber também a grande quantidade de motoristas com duas folgas semanais. Isso ocorre por conta das restrições (14) e (15) terem sido configuradas com o parâmetro  $QMDSF$  igual a 6 dias, por questões trabalhistas.

## 5. Conclusão

Neste trabalho, nós implementamos com sucesso um modelo em PLI para o PPT com objetivo principal de reduzir a quantidade de motoristas utilizados na escala. O planejamento da escala foi realizado com escopo de linha e abordagem de *Set Partition Problem* (SPP).

Com relação às soluções encontradas pelo modelo, obtivemos resultados expressivos quando comparados às soluções adotadas pela empresa estudada. O uso de técnicas de PDT se mostrou eficiente em termos de tempo de execução para a abordagem de escopo de linha.

Como trabalho futuro, sugerimos o desenvolvimento de um PDT sensível ao tipo de dia. Este tipo de PDT poderia criar tarefas de tamanhos não necessariamente iguais para dias úteis, sábados e domingos e, com isso, gerar partições que fossem mais compatíveis com a quantidade diária de horas que um motorista deve trabalhar. Acreditamos também que as restrições (7) possam ser flexibilizadas com o intuito de reduzir a quantidade de motoristas utilizados na escala no escopo de linha. Além disso, sugerimos a incorporação dos conceitos de motoristas efetivos e folguistas ao modelo, bem como a utilização do escopo por empresa para as empresas que operam poucas linhas, pois tais decisões podem viabilizar a descoberta de soluções ainda melhores.

## Referências

- Aggarwal, C. A focussed review of scheduling in services, *European Journal of Operational Research*, v. 9, n. 2, p. 114-121, 1982.
- Carraresi, P.; Gallo, G. A multi-level bottleneck assignment approach to the bus driver's rostering problem. *European Journal of Operation Research*, v. 16, p. 163-173, 1984.
- Ernst, A. T.; Jiang, H.; Krishnamoorthy, M.; Sier, D. Staff scheduling and rostering: A review of applications, methods and models. *European Journal of Operational Research*, v. 153, n. 1, p. 3-27, 2004.
- Gomes, W.; Gualda, N. Modelagem integrada do problema de programação de tripulantes de aeronaves. Transportes, São Paulo, Brasil, v. XIX, p. 23-32, 2011.
- IPEA, Pesquisa de Mobilidade Urbana, SISP – Sistema de Indicadores de Percepção Social. Brasil, p. 6-10, 2011.
- ILAESE, Transportes Urbanos no Brasil, Brasil, p. 6-7, 2012.
- Mapa, S. Redução de Custos da Programação Diária de Tripulações de Ônibus Urbano via Metaheurísticas. Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil, 2004.
- Martello, S.; Toth, P. A heuristic approach to the bus driver scheduling problem. *European Journal of the Operational Research*, v. 24, n. 1, p. 106–117, 1986.
- Mesquita, M.; Paias, A. Set partitioning/covering-based approaches for the integrated vehicle and crew scheduling problem. *Computers & Operations Research* v.35, p.1562–1575, 2008.
- Mesquita, M.; Moz, M.; Paias, A.; Paixão, J.; Pato, M.; Respício, A. A new model for the integrated vehicle-crew-rostering problem and a computational study on rosters. *Journal of Scheduling*, v. 14, p. 319-334, 2011.
- Park, T.; Ryu, K. R. Crew pairing optimization by a genetic algorithm with unexpressed genes. *Journal of Intelligent Manufacturing*, v. 17, n. 4, p. 375–383, 2006.
- Prata, B. A. Programação integrada de veículos e motoristas uma visão geral. *Revista Eletrônica Sistemas & Gestão*, Brasil, v.4, n.3, p. 182-204, 2009.
- Silva, G.; Gualda, N. Um Algoritmo de Geração de Arcos para Solução do Problema de Programação de Veículos. Transportes, São Paulo, Brasil, v. 8, n. 1, p. 36, 2000.
- Silva, G.; Marcone, J.; Atzingen, J. Métodos Exatos para resolver o problema de programação de tripulação. Ouro Preto, Brasil, Transportes v. XIV, p. 25-32, 2006.
- Smith, B. M.; Wren, A. A bus crew scheduling system using a set covering formulation. *Transportation Research*, v. 22A, p.97-108, 1988.
- Vilas Boas, M.; Silva, G. Modelos de Programação Inteira para Problema do Rodízio de Tripulação de Ônibus Urbano. XLVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Salvador, Brasil, p. 1680-1691, 2014.
- Wren, A.; Rosseau, J. M. Bus Driver Scheduling – an Overview. VIth International Workshop on Computer Aided Scheduling of Public Transport, Lisbon, Portugal, 1993.