

## O PROBLEMA DE ROTAS DE COBERTURA MULTIVEÍCULO COM UMA RESTRIÇÃO DE EQUILÍBRIO NO NÚMERO DE VÉRTICES ENTRE ROTAS

**Rodolfo Cunha Oliveira**

Faculdade de Ciências Aplicadas - Universidade Estadual de Campinas  
Rua Pedro Zaccaria, 1300 - Caixa Postal 1068, CEP 13484-350 - Limeira - São Paulo  
cunha.rodolfo@gmail.com

**Washington Alves de Oliveira**

Faculdade de Ciências Aplicadas - Universidade Estadual de Campinas  
Rua Pedro Zaccaria, 1300 - Caixa Postal 1068, CEP 13484-350 - Limeira - São Paulo  
washington.oliveira@fca.unicamp.br

**Antonio Carlos Moretti**

Faculdade de Ciências Aplicadas - Universidade Estadual de Campinas  
Rua Pedro Zaccaria, 1300 - Caixa Postal 1068, CEP 13484-350 - Limeira - São Paulo  
antonio.moretti@fca.unicamp.br

### RESUMO

O Problema de Rotas de Cobertura multiveículo ( $m$ -PRC) é definido sobre um grafo  $G = (V \cup W, E)$ , onde  $V$  é o conjunto de vértices que *podem* ser visitados,  $W$  é o conjunto de vértices que *devem* ser cobertos, mas não são visitados, ou seja, cada vértice em  $W$  deve estar a uma distância pré-determinada de pelo menos um vértice de  $V$  pertencente a uma rota, e  $E$  é o conjunto de arestas. O  $m$ -PRC consiste em determinar até  $m$  ciclos Hamiltonianos de tamanho total mínimo em um subconjunto  $T \subseteq V$ , de maneira a cobrir todos os vértices em  $W$ . Neste trabalho, resolvemos o  $m$ -PRC utilizando diversas heurísticas e apresentamos uma nova formulação para o  $m$ -PRC como um problema de fluxo em redes, que permite obter soluções exatas com a utilização do Solver CPLEX. Experimentos computacionais são apresentados e mostram que a nossa abordagem é promissora.

**PALAVRAS CHAVE.** Rotas de cobertura, Modelo de fluxo em redes, Heurísticas.

**Área Principal:** Pesquisa Operacional

### ABSTRACT

The multi-vehicle Covering Tour Problem ( $m$ -CTP) is defined on a graph  $G = (V \cup W, E)$ , where  $V$  is a set of vertices that *can* be visited and  $W$  is a set of vertices that *must* be covered, but are not visited. Each vertex in  $W$  must lie within a known distance of at least one vertex of  $V$  that belongs to the route. Given the cost of each edge  $(v_i, v_j) \in E$ , the  $m$ -CTP consists in finding up to  $m$  Hamiltonian cycles over a subset of  $V$ , such that cost is minimal, while covering all vertices  $v_\ell \in W$ . In this study, the  $m$ -CTP is solved by various heuristics and a new formulation is presented as a network flow problem which allows obtaining exact solutions through the CPLEX Solver. Computational results are presented and show that our approach is promising.

**KEYWORDS.** Covering tour, Two-commodity flow model, Heuristics.

**Main Area:** Operational Research

## 1. Introdução

O Problema de Rotas de Cobertura multiveículo ( $m$ -PRC) é uma generalização do Problema de Roteamento de Veículos (PRV) ao acrescentar um tipo de cobertura de vértices. O  $m$ -PRC foi proposto a primeira vez na literatura como *multi-vehicle covering tour problem* ( $m$ -CTP) [6], onde é modelado como um problema de programação linear inteiro NP-difícil, o que justifica o uso de heurísticas na sua resolução.

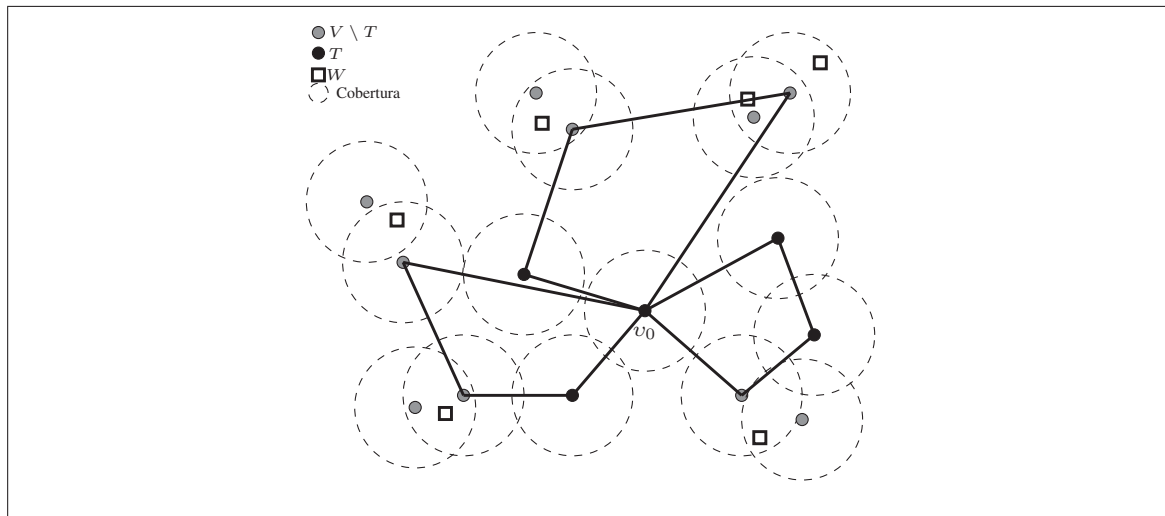
O  $m$ -PRC [6] é definido sobre um grafo  $G = (V \cup W, E)$  não direcionado, onde  $V$  é um conjunto de vértices que *podem* ser visitados,  $T \subseteq V$  é um conjunto de vértices que *devem* ser visitados,  $W$  é um conjunto de vértices que devem ser *cobertos*, mas não visitados, e  $E = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V \cup W, i < j\}$  é um conjunto de arestas. Definimos  $c_{ij}$  como o custo da aresta  $(v_i, v_j) \in E$  e supomos que cada vértice em  $V$  cobre um subconjunto de  $W$ . O vértice  $v_k \in V$  cobre o vértice  $v_\ell \in W$  quando  $c_{k\ell}$  é menor ou igual a um valor fixo  $c$ . O problema consiste em determinar múltiplas rotas de custo total mínimo em um subconjunto de  $V$  cobrindo todos vértices em  $W$ , satisfazendo: 1. Cada rota na solução inicia e termina no depósito; 2. Cada vértice em  $V$  pertence a no máximo uma rota e cada vértice em  $V \setminus T$  pertence a exatamente uma rota; 3. Cada vértice de  $W$  deve ser coberto por uma rota, no sentido de que deva situar-se dentro de uma distância  $c$  de um vértice pertencente a uma rota; 4. O número de vértices em uma rota, excluindo o depósito, não pode exceder um determinado valor  $\rho$ ; 5. O tamanho de cada rota não pode exceder um determinado valor  $q$ .

Neste trabalho vamos considerar o modelo para o  $m$ -PRC proposto em [8], no qual, diferente de [6], todas os veículos disponíveis são usados, são descartadas as restrições de capacidade dos veículos e é incluído um determinado equilíbrio no número de vértices visitados nas diferentes rotas. Ou seja, os itens 4 e 5 acima são excluídos e, na solução, o número de rotas deve ser igual ao número de veículos e as rotas devem ser *balanceadas*, no sentido de que o número de vértices pertencentes a cada rota é aproximadamente o mesmo. Resolvemos o  $m$ -PRC utilizando diversas heurísticas e apresentamos uma nova formulação para o  $m$ -PRC como um problema de fluxo em redes, que permite obter soluções exatas com a utilização do Solver CPLEX. Experimentos computacionais são apresentados e mostram que a nossa abordagem é promissora.

A Figura 1 ilustra uma típica solução viável para o  $m$ -PRC, onde os círculos pequenos representam os vértices em  $V$ , os quadrados representam os vértices em  $W$  e os círculos pontilhados representam o raio de cobertura fixo  $c$ .

O  $m$ -PRC pode modelar problemas inerentes a desenhos de redes de transportes. Como é o caso do problema de localização de caixas de correios (Labbé e Laporte [7]), em que caixas de correio são posicionadas em um número limitado de endereços ( $T \subseteq V$ ) cobrindo um conjunto de regiões ( $W$ ) dentro de uma cidade. O objetivo é determinar um conjunto de rotas mínimas para  $m$  caminhões coletores de cartas, tais que, dado um limite máximo de endereços de coleta que cada caminhão pode realizar, cada rota inicia e termina o seu trajeto na Central de Correios (depósito). Outra aplicação é encontrada em Doerner e Hart [2] no modelamento do problema de pronta resposta e suporte pós-desastres, onde rotas para equipes em hospitais móveis são construídas de tal forma que todas as vítimas em uma região afetada tenha uma determinada facilidade de acesso ao socorro. Hachicha et al. [6] desenvolvem vários procedimentos heurísticos para resolver o  $m$ -PRC e resolve um problema com dados reais associado com o planejamento de equipes médicas móveis no Distrito de Suhum, Gana.

Oliveira et al. [8] apresentam novas heurísticas e estendem o trabalho de Hachicha et al. [6] ao propor uma versão balanceada do  $m$ -PRC no planejamento de rotas policiais para o patrulhamento urbano preventivo. Neste caso, são construídas rotas equilibradas quanto ao número de vértices nas diferentes rotas para uma quantidade fixa de veículos. Todos os veículos policiais disponíveis devem ser designados para o patrulhamento. Cada vértice presente na solução representa um endereço (coordenada geográfica) que pode resultar em uma parada total do veículo por um período de tempo (contato com a população). Assim, busca-se não apenas rotas curtas, mas



**Figura 1:** Solução viável para o  $m$ -PRC

também que os diferentes veículos visitem uma quantidade equilibrada de endereços. As pessoas em cada ponto geográfico visitado e, em outros pontos próximos a este, visualizam a viatura e podem ser atendidas pelos agentes policiais. Os agentes por sua vez, também visualizam toda a proximidade daquele ponto visitado, contribuindo assim, para o aumento da sensação de segurança. Simms et al. [9] aplicam o  $m$ -PRC na indústria leiteira, enquanto Stahlbock e Voß [10] no ambiente de terminais de contêineres.

Hà et al. [5] introduz um modelo para o  $m$ -PRC como um problema de fluxo em redes, onde a restrição de tamanho da rota é relaxada, ou seja,  $q = +\infty$ . Este modelo não apresenta as usuais restrições de eliminação de subrotas e é resolvido utilizando uma metaheurística e um algoritmo exato. Para algumas aplicações do  $m$ -PRC as restrições de capacidade não são necessárias, como por exemplo numa campanha de vacinação onde a equipe de saúde deve vacinar a população em diversos locais. Neste caso, o tempo de viagem entre os locais é relativamente pequeno em relação ao tempo de serviço em cada local. Então, pode-se considerar que cada veículo consegue atender somente um número limitado de localidades e a restrição de tamanho de rota pode ser desconsiderada.

O objetivo principal deste trabalho é resolver de forma exata o problema balanceado proposto por Oliveira et al. [8] para validar a qualidade das soluções obtidos por diversas heurísticas. Para isso, estendemos o trabalho de Hà et al. [5] e apresentamos uma nova formulação para o  $m$ -PRC como um problema de fluxo em redes, no qual o equilíbrio entra as rotas é considerado. Nós referimos este problema como  $m$ -PRC- $\rho\tilde{\rho}$ , onde  $\rho$  é o limite superior e  $\tilde{\rho}$  é o limite inferior no número de visitas por rota. Esta versão pode modelar as aplicações onde a restrição no tamanho da rota não é importante e pode ser relaxada, e também é adequada ao problema balanceado [8], pois a diferença no número de vértices nas diferentes rotas não pode ser maior que  $r = \rho - \tilde{\rho}$ . Como contribuição neste trabalho, apresentamos a nova formulação  $m$ -PRC- $\rho\tilde{\rho}$ , que permita a resolução do  $m$ -PRC balanceado de forma exata com a utilização de um Solver e, portanto, permite comparar e validar as diversas heurísticas para o  $m$ -PRC.

As heurísticas foram implementadas em linguagem C e validamos o código comparando os resultados obtidos da resolução de vários exemplares gerados aleatoriamente. O restante do trabalho está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 descrevemos a nossa formulação para o  $m$ -PRC. Os procedimentos heurísticos são descritos na Seção 3. Na Seção 4 discutimos os resultados computacionais e, na Seção 5, apresentamos as nossas conclusões.

## 2. Nova formulação $m$ -PRC- $\rho\tilde{\rho}$

Apresentamos uma nova formulação para o  $m$ -PRC, denominada  $m$ -PRC- $\rho\tilde{\rho}$ . Considere  $G = (V \cup W, E_1 \cup E_2)$  um grafo não-direcionado, onde  $V \cup W$  é o conjunto de vértices e  $E_1 \cup E_2$  é o conjunto de arestas. Definimos  $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$  como o conjunto de  $n$  vértices que podem ser visitados e  $W = \{w_1, \dots, w_\ell\}$  como o conjunto de vértices que devem ser cobertos. Tome  $T = \{v_0, \dots, v_{t-1}\} \subset V$  como o conjunto de vértices que devem ser visitados. O vértice  $v_0$  é o depósito, onde estão disponíveis  $m$  veículos idênticos. Uma distância  $c_{ij}$  está associada a cada aresta em  $E_1 = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V, i < j\}$  e uma distância  $d_{ij}$  está associada a cada aresta em  $E_2 = \{(v_i, w_j) : v_i \in V \setminus T, w_j \in W\}$ . A nossa ideia é uma extensão da formulação proposta por Hà et al. [5], onde acrescentamos mais uma variável de fluxo para poder controlar o número mínimo de visitas por rotas. Cada vértice de  $V \setminus \{v_0\}$  tem uma demanda unitária e cada veículo tem uma capacidade  $\rho$  em relação ao número de vértices visitados, enquanto que ele não pode visitar menos que  $\tilde{\rho}$  vértices. Se  $T = V$ , o  $m$ -PRC- $\rho\tilde{\rho}$  torna-se um PRV.

Primeiramente, o grafo original  $G$  é estendido para o grafo  $\hat{G} = (\hat{V} \cup W, \hat{E}_1 \cup E_2)$  resultante da adição do *depósito artificial*  $v_n$  (uma cópia do depósito  $v_0$ ). Para isso, definimos os conjuntos  $\hat{V} = V \cup \{v_n\}$ ,  $V' = \hat{V} \setminus \{v_0, v_n\}$ ,  $\hat{E}_1 = E_1 \cup \{(v_i, v_n), v_i \in V'\}$ , e  $c_{in} = c_{0i} \forall v_i \in V'$ .

Nesta formulação o número de veículos  $m$  é uma constante e  $q = +\infty$ . Sejam as variáveis binárias  $x_{ij}$  igual 1 se a aresta  $(v_i, v_j)$ ,  $i \neq j$ , é usada na solução e 0 caso contrário, e  $y_i$  igual a 1 se o vértice  $v_i$  é visitado na solução e 0 caso contrário. As variáveis  $f_{ij}$  e  $f_{ji}$  são duas variáveis de fluxo que representam as arestas de uma solução viável. Se um veículo viaja de  $v_i$  a  $v_j$ , o fluxo  $f_{ij}$  é o número de vértices que o veículo na aresta  $(v_i, v_j)$  ainda pode visitar, enquanto que o fluxo  $f_{ji}$  é o número de vértices já visitados (ou seja,  $f_{ji} = \rho - f_{ij}$ ). Na nossa formulação as variáveis  $x_{ij}$  também são variáveis de fluxo, pois elas fornecem o sentido de entrada e saída do fluxo em cada vértice e, diferentemente de [5], garantem que cada rota de veículo inicie no depósito e termine no depósito artificial. Os coeficientes  $\lambda_{i\ell}$  são binários e assumem valor 1 se e somente se  $w_\ell \in W$  pode ser coberto por  $v_i \in V \setminus T$ , ou seja,  $d_{i\ell} \leq c$ . O  $m$ -PRC- $\rho\tilde{\rho}$  pode ser formulado como segue.

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{\{v_i, v_j\} \in \hat{E}} c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

Sujeito a

$$\sum_{v_i \in V \setminus T} \lambda_{i\ell} y_i \geq 1, \quad w_\ell \in W \quad (2)$$

$$\sum_{v_i \in \hat{V}, i \neq k} x_{ik} + \sum_{v_j \in \hat{V}, j \neq k} x_{kj} = 2y_k, \quad v_k \in V' \quad (3)$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1, \quad v_i, v_j \in V', i < j \quad (4)$$

$$\sum_{v_i \in \hat{V}, i \neq k} x_{ik} \leq 1, \quad v_k \in V' \quad (5)$$

$$\sum_{v_j \in \hat{V}, j \neq k} x_{kj} \leq 1, \quad v_k \in V' \quad (6)$$

$$\sum_{v_j \in \hat{V}} (f_{ij} - f_{ji}) = 2y_i, \quad v_i \in V' \quad (7)$$

$$\sum_{v_j \in \hat{V}} f_{0j} = \sum_{v_i \in \hat{V}} y_i \quad (8)$$

$$\sum_{v_j \in \hat{V}} f_{nj} = m\rho \quad (9)$$

$$f_{0j} \geq x_{0j}\tilde{\rho}, \quad \forall v_j \in V' \quad (10)$$

$$f_{ij} + f_{ji} = \rho(x_{ij} + x_{ji}), \quad \{v_i, v_j\} \in \hat{E}, i < j \quad (11)$$

$$x_{i0} = 0, \quad v_i \in V' \quad (12)$$

$$x_{nj} = 0, \quad v_j \in V' \quad (13)$$

$$f_{ij} \geq 0, f_{ji} \geq 0, \quad \{v_i, v_j\} \in \widehat{E} \quad (14)$$

$$y_i = 1, \quad v_i \in T \setminus \{v_0\} \quad (15)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \{v_i, v_j\} \in \widehat{E} \quad (16)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad v_i \in V'. \quad (17)$$

A função objetivo (1) é a soma total dos custos das rotas. As restrições (2) proíbem vértices de  $W$  não cobertos. As restrições (3)–(13) controlam o fluxo das variáveis  $x$  e  $f$ . Se o vértice  $v_k \in V'$  é visitado, por (3)–(6), ele é visitado no máximo uma vez na solução e tem apenas uma aresta ativa na entrada e uma aresta ativa na saída do fluxo. Se  $v_i \in V'$  é visitado na solução, (7) define que o fluxo de entrada menos o fluxo de saída em  $v_i$  é igual a 2, e igual a 0 caso contrário. O fluxo de saída da fonte  $v_0$ , restrição (8), é igual ao total de vértices visitados na solução, enquanto que o fluxo de saída do terminal  $v_n$ , restrição (9), é igual a capacidade total da frota de veículos em número de vértices. Assim (8), (9) e (11) garantem que cada rota na solução tenha no máximo  $\rho$  vértices. Por outro lado, as restrições (10) garantem que cada rota formada na solução tenha pelo menos  $\tilde{\rho}$  vértices. As restrições (14)–(17) definem o conjunto das variáveis.

### 3. Heurísticas

Descrevemos abaixo os três procedimentos heurísticos usados na resolução do  $m$ -PRC- $\rho\tilde{\rho}$ . Cada procedimento é dividido em 4 fases e são baseados no trabalho de Hachicha et al. [6] e Oliveira et al. [8]. A primeira fase consiste em dividir o problema em  $m$  subproblemas menores. A estratégia usada nesta divisão fornece o nome para cada heurística, a Gananciosa (*Greedy*) [8], a Varredura (*Sweep*) [6, 8] e a Rota Primeiro/Cluster Segundo (*Route-First/Cluster-second*) [6, 8]. Após a determinação dos clusters, na segunda fase, a heurística H-1-PRC Modificada [6, 8] resolve um 1-PRC para cada cluster e  $m$  rotas equilibradas, que iniciam e terminam no depósito e cobrem o conjunto  $W$ , são criadas ao final desta fase. Por fim, dois procedimentos de pós-otimização são executados em sequência com o objetivo de melhorar a solução atual: na terceira fase, a Eliminação de Multicobertura (*Multicover Elimination*) [8]; e na quarta fase, a 2-opt Balanceada (*Balanced 2-opt*) [6, 8]. A Tabela 1 ilustra cada uma das fases de cada heurística.

Para as rotinas apresentadas a seguir, é necessário conhecer cada subconjunto de vértices em  $W$  que é coberto por um vértice específico de  $V$ . O subconjunto de  $W$  coberto por um dado  $v_i \in V$  é denotado por  $C_i = \{w_\ell \in W \mid i \in S_\ell\}$ , onde  $S_\ell = \{v_i \in V \setminus T \mid c_{i\ell} \leq c\}$  e  $c$  é o raio de cobertura. Definimos ainda  $T^* = T \setminus \{v_0\}$ .

#### 3.1. Heurística Gananciosa

Inicialmente uma única rota  $R = (h_0, h_1, \dots, h_z)$  é criada. Ela contém todos os vértices de  $T$  e aqueles vértices de  $V \setminus T$  capaz de cobrir todos os vértices de  $W$ . Para formar esta rota, inicializamos  $h_0 = v_0$ ,  $R = (h_0)$  e  $L = T^* \cup W$ . Então, selecionamos o vértice mais próximo relativo ao vértice anteriormente selecionado em  $L$ , e o conjunto  $L$  é gradualmente esvaziado da seguinte forma. Se o vértice  $h$  selecionado pertence ao conjunto  $T$ , então ele é simplesmente adicionado a  $R$ , e  $\{h\} \cup C_h$  é removido de  $L$ . No entanto, se  $h$  pertence a  $W$ , então selecionamos

Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
Gananciosa			
Varredura	H-1-PRC Modificada	Eliminação de Multicobertura	2-opt Balanceada
Rota Primeiro/Cluster Segundo			

Tabela 1: Fases de cada heurística



um vértice em  $S_h$  que cobre o maior número de vértices ainda não cobertos, digamos o vértice  $k$ . O vértice  $k$  é adicionado a rota  $R$  e  $C_k$  é removido de  $L$ .

Nesta heurística e nas duas a seguir, uma vez que a rota  $R$  é sequencialmente construída, a sequência de vértices  $R^* = R \setminus \{0\}$  é considerada como uma lista circular. Para aplicar a Fase 2, dividimos  $V$ ,  $T$  e  $W$  em  $m$  subconjuntos (clusters) a partir de uma partição de  $R^*$ . Em cada iteração dos Passos 1–3 abaixo  $m$  clusters são construídos.

- Passo 1: Tome  $i := 1$ ,  $u := h_i$ ,  $p := \lfloor \frac{z}{m} \rfloor$  e  $q := z - mp$ , onde  $z$  representa o número de vértices em  $R^*$ ;
- Passo 2: Começando do vértice  $u$  em  $R^*$ , selecione  $q$  subconjuntos de vértices sequenciais de tamanho  $p + 1$  e  $m - q$  subconjuntos de tamanho  $p$  ( $m = q + m - q$  clusters);
- Passo 3: Faça  $i := i + 1$ . Se  $z$  é múltiplo de  $m$  e  $i = p$ , pare. Se  $z$  não é múltiplo de  $m$  e  $i = p + 1$ , pare. Caso contrário, atualize  $u = h_i$  e volte ao Passo 2.

Os vértices em  $V$  no  $k$ -ésimo subconjunto ( $k = 1, \dots, m$ ) união com  $\{0\}$  são denotados por  $V_k$  e o  $k$ -ésimo subconjunto de  $W$  é  $W_k = \bigcup \{C_i | i \in V_k\}$ .

### 3.2. Heurística Varredura

A diferença entre esta rotina e a anterior está na estratégia para construir a rota inicial  $R$ . O processo de varredura é aplicado nos vértices de  $T \cup W$ . O procedimento inicia com  $h_0 = v_0$ ,  $R = (h_0)$  e  $L = T^* \cup W$ . Escolhemos um vértice arbitrário  $\bar{h} \in L$  e consideramos uma semi-reta que origina em  $h_0$  e passa por  $\bar{h}$ . Neste procedimento, selecionamos um vértice  $h$  de  $L$  utilizando um critério que “varre” todos os vértices de  $L$ , ou seja, selecionamos o próximo  $h \in L$  de acordo com a ordem crescente dos ângulos  $\theta_h = \widehat{h h_0 h}$ . Então, na sequência, o conjunto  $L$  é gradualmente esvaziado e os clusters são construídos tal como na heurística Gananciosa.

### 3.3. Heurística Rota Primeiro / Cluster Segundo

Novamente, a diferença entre esta heurística e a heurística Gananciosa está na estratégia utilizada para construir a rota inicial  $R$ . Aqui, uma solução viável de um 1-PRC para  $V$ ,  $T$  e  $W$  é determinada através da Heurística H-1-PRC Modificada. Digamos que  $R = (h_0, h_1, \dots, h_z)$ ,  $h_0 = v_0$ , que contém todos os vértices de  $T$  e cobre todos os vértices de  $W$  seja a solução encontrada. Então  $R^*$  é dividida em clusters menores como na heurística Gananciosa.

### 3.4. Heurística H-1-PRC Modificada

A heurística H-1-PRC Modificada [8] é baseada na heurística H-1-PRC de Gendreau et al. [4], e combina a heurística Primal1 [1] para o problema de cobertura com a heurística GENIUS [3] para o Problema do Caixeiro Viajante (PCV). Ela é usada para resolver cada 1-PRC no processo de resolução do  $m$ -PRC. Durante resolução de um 1-PRC, combinamos a heurística Primal1 proposta por Balas e Ho[1] para garantir a cobertura do conjunto  $W$ .

A H-1-PRC Modificada utiliza o seguinte fato. Se um conjunto de vértices que deve ser visitado (suporte ótimo de  $y$ ) é conhecido, então o PRC é reduzido a um PCV. Isto sugere a construção de um Problema de Cobertura, considerando o aspecto *cobertura* separadamente. Por outro lado, cada rota de um PCV é construída de modo incremental [3, 4]. Assim, as heurísticas GENIUS e Primal1 são combinadas afim de produzir a H-1-PRC Modificada descrita a seguir.

**Passo 1 (inicialização).** Faça  $H := T$ ,  $\bar{z} := \infty$ . A definição atual de  $f$  é (1).

**Passo 2 (construção da rota).** Construa um ciclo Hamiltoniano de custo  $z$  com todos os vértices de  $H$ , usando GENIUS.

**Passo 3** (*critério de parada*). Se pelo menos um vértice de  $W$  não é coberto por um vértice de  $H$ , vá para o Passo 4. Se  $z \leq \bar{z}$ , faça  $\bar{z} := z$  e  $\bar{H} := H$ . Se a definição atual de  $f$  é a última, pare com a melhor solução dada pela rota  $\bar{H}$  de custo  $\bar{z}$ . Caso contrário, remova de  $H$  todos os vértices associados com multicobertura de vértices em  $W$  e vá para o Passo 2 com a próxima definição de  $f$ .

**Passo 4** (*seleção de vértice*). Calcule para todo vértice  $v_h \in V \setminus H$  um coeficiente  $c_h$  igual ao custo de sua inserção mais barata na rota atual  $H$ . Determine o melhor vértice  $v_{h^*}$  para incluir em  $H$  de acordo com a definição atual de  $f$ . Faça  $H := H \cup \{v_{h^*}\}$  e vá para o Passo 2.

Vértices são gradualmente selecionados e adicionados ao conjunto de vértices que devem ser visitados, então uma nova solução aproximada ao PCV envolvendo a inserção de cada um dos vértices é obtida (utilizando GENIUS), este procedimento acaba uma vez que todos os vértices em  $W$  foram cobertos. A seleção de cada vértice é feita considerando uma das três funções de mérito: (1)  $f(c_j, b_j) = \frac{c_j}{\log_2 b_j}$ ; (2)  $f(c_j, b_j) = \frac{c_j}{b_j}$ ; (3)  $f(c_j, b_j) = c_j$ , onde  $b_j$  representa o número de vértices em  $W$  cobertos pela inclusão do vértice  $v_j$  utilizando o coeficiente  $c_j$ , que representa o custo de inserir este vértice na solução aproximada do PCV, obtida através da heurística GENI. Quando todo o conjunto é coberto a melhor solução é salva e todos os vértices associados a multicobertura são removidos para reiniciar o processo de inserção, mas com uma nova definição para  $f$ .

### 3.5. Eliminação de Multicobertura

A Fase 3 é composta pela heurística Eliminação de Multicobertura, onde já temos um conjunto inicial de  $m$  rotas construídas pelas heurísticas anteriores. Se um nó em  $W$  é coberto por mais de uma rota, nós podemos melhorar a solução através da eliminação de um dos vértices adicionais. Note que somente vértices em  $V \setminus T$  podem ser removidos da solução. Se um vértice  $v_i$  pode ser removido, então consideramos a solução alternativa obtida ao deletar as arestas incidentes em  $v_i$  e adicionando as arestas que conectam seus vizinhos. Uma vez que as distâncias satisfazem a desigualdade triangular, a remoção de um vértice sempre implica em um decréscimo na função objetivo. Este procedimento é dividido em dois passos. Primeiro, uma lista de candidatos para remoção associados a multicobertura é construída. Em seguida, a lista é examinada sequencialmente para remover o maior número possível de vértices redundantes.

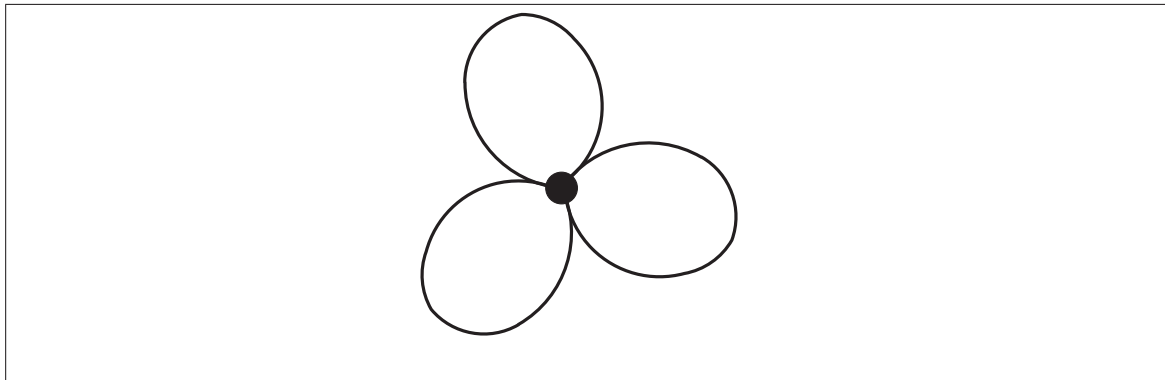
**Passo 1** Examine todos os vértices na rota que pertencem à  $V \setminus T$  e faça uma lista de vértices redundantes de ordem decrescente, considerando o decréscimo na função objetivo resultante da sua remoção.

**Passo 2** Considere todos os vértices na lista ordenada e remova os vértices cuja remoção não resulte na falta de cobertura ou de equilíbrio entre rotas.

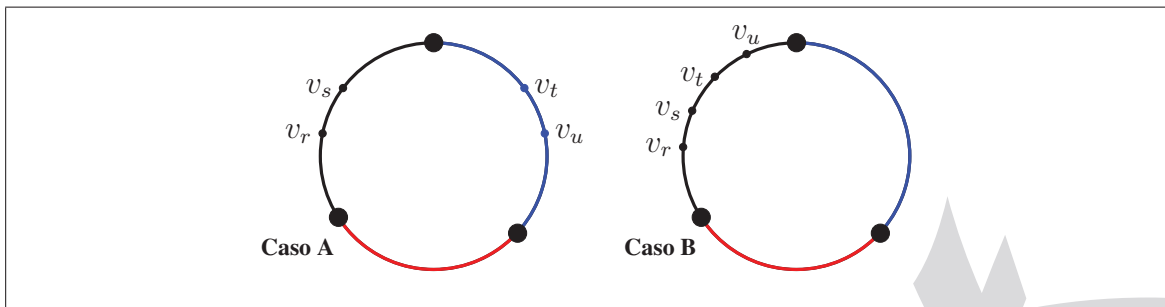
Esta heurística complementa as duas fases anteriores atacando o problema de forma global (considera todas as rotas), uma vez que na fase anterior as rotas são construídas localmente e permite a ocorrência de vértices em diferentes rotas associados a multicobertura. Esta heurística é simples e, mesmo quando ela não encontra melhora alguma, seu baixo tempo de execução interfere pouco no tempo final de resolução.

### 3.6. Heurística 2-opt Balanceada

A Fase 4 é composta pela heurística 2-opt Balanceada [8], uma modificação da heurística 2-opt\* [6], que mantém o equilíbrio entre rotas considerando o número de vértices visitados. Ao chegar nesta fase, já temos um conjunto inicial de  $m$  rotas, e o procedimento abaixo é executado.



**Figura 2:** Solução inicial viável para um  $m$ -PRC [6]



**Figura 3:** Caso A e Caso B: bases replicadas no Passo 1 da heurística 2-opt balanceado [6]

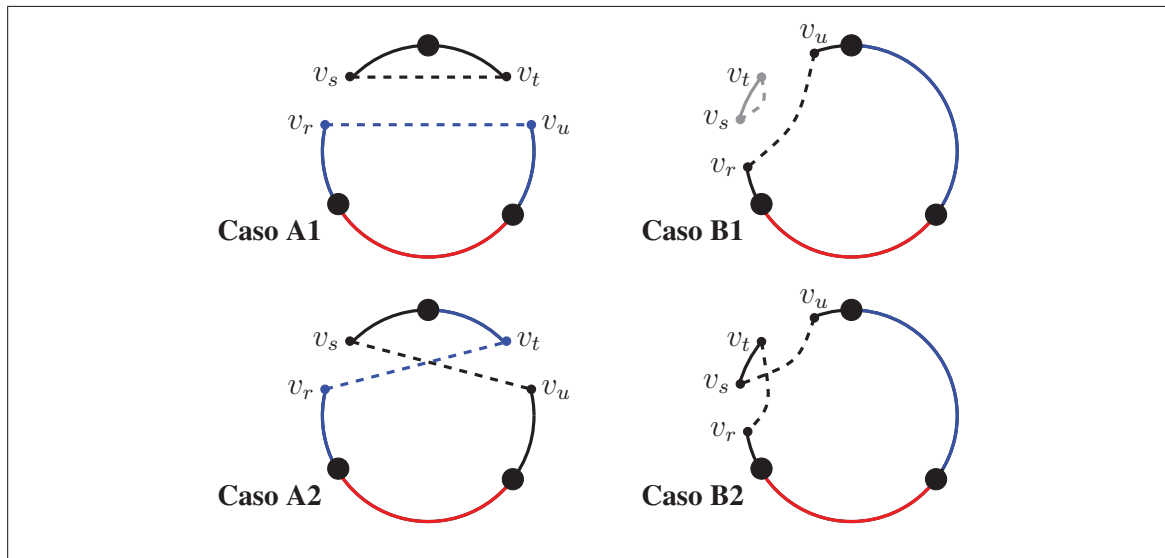
**Passo 1** Seja  $\rho$  o menor número de vértices por rota, excluindo o depósito. Transforme as  $m$  rotas em uma única rota, substituindo o vértice do depósito por  $m$  cópias artificiais do mesmo, tal como nas Figuras 2 e 3. Faça uma lista de todos os pares possíveis de arestas distintas nesta rota.

**Passo 2** Considere a lista de pares de arestas sequencialmente. Seja  $\{(v_r, v_s), (v_t, v_u)\}$  o par atual. Considere as duas possibilidades de reposição: (i)  $(v_r, v_t)$  e  $(v_s, v_u)$ ; (ii)  $(v_r, v_u)$  e  $(v_s, v_t)$ . A reposição pode dividir a rota única em duas (Figura 4). Se isso acontecer, as novas rotas correspondem a uma solução viável apenas se cada uma delas contém pelo menos uma cópia do depósito. Além disso, o número de vértices na(s) rota(s) entre cada par de cópias do vértice depósito (ou no caso onde uma das subrotas geradas pela substituição contém apenas uma cópia do vértice depósito) deve ser de pelo menos  $\rho$ . Para cada solução factível, é calculado o valor da função objetivo. Se existe melhora, então retorne ao Passo 1, com a melhor solução encontrada, incluindo o novo conjunto de  $m$  rotas. Se o final da lista é atingido sem uma melhora factível, avance ao Passo 3 com a melhor solução encontrada até o momento.

**Passo 3** Faça uma lista de todos os pares de vértices, excluindo o depósito, e que pertencem a rotas distintas. Considere-os sequencialmente. Para cada par, calcule o valor da solução alternativa resultante da troca entre estes vértices. Guarde a solução com melhor valor na função objetivo.

Esta heurística de pós-otimização é mais robusta que a anterior e por este motivo a escolhemos para a última etapa em cada heurística para o  $m$ -PRC. Note que as possíveis trocas de arestas e vértices nos Passos 2 e 3 não destroem o equilíbrio entre as rotas.





**Figura 4:** Novas rotas para os Casos A e B da Figura 3 [6]

#### 4. Resultados computacionais

Implementamos as heurísticas em linguagem C e os exemplares foram rodados em um Intel i7-3630QM com 4 núcleos lógicos (2 físicos) e 8GB RAM DDR3. A constante  $c$  é gerada de acordo com os dados de cada exemplar:  $c = \max\{\max_{v_h \in V \setminus T} \min_{v_\ell \in W} \{c_{h\ell}\}, \max_{v_\ell \in W} \{c_{\ell, h(\ell)}\}\}$ , onde  $h(\ell)$  é o índice do vértice em  $V \setminus T$  que é o segundo mais próximo a  $v_\ell$ . Assim, podemos garantir que  $S_\ell = \{v_h \in V : c_{h\ell} \leq c\}$  e  $|S_\ell| \geq 2$  para cada  $v_\ell \in W$ .

Os vértices de cada exemplar foi gerado aleatoriamente através da função  $rand()$  normalizada numa região quadrada  $[0, 100] \times [0, 100]$ . Comparamos os resultados heurísticas com as soluções exatas obtidas pelo Solver CPLEX na plataforma AIMMS em tempo inferior a 3600s. O depósito ficou restrito ao quadrado  $[35, 65] \times [35, 65]$ . Os conjuntos  $T$  e  $V$  foram definidos ao tomar os primeiros  $|T|$  e  $|V|$  pontos, respectivamente. Todos os outros pontos foram atribuídos a  $W$ . Os exemplares testados são combinações dos seguintes valores:  $|V| = 50, 75, 100$ ;  $|W| = 50, 75, 100$ ; e  $|T| = \lceil \frac{|V|}{8} \rceil, \lceil \frac{|V|}{4} \rceil, \lceil \frac{|V|}{2} \rceil$ . Para cada combinação de  $V, T$  e  $W$  foram gerados 5 exemplares, totalizando de 45 exemplares. Observe na Tabela 2 esta divisão, onde  $r$  representa a máxima diferença entre o número de vértices visitados nas diferentes rotas.

Os parâmetros  $\rho$  e  $\tilde{\rho}$  que representam o maior e menor número de vértices permitidos em uma rota, respectivamente, foram escolhidos a partir do melhor resultado entre as três heurísticas. Ou seja, a heurística que encontrou a melhor solução em uma dado exemplar, forneceu os valores de  $\rho$  e  $\tilde{\rho}$  utilizados na solução exata.

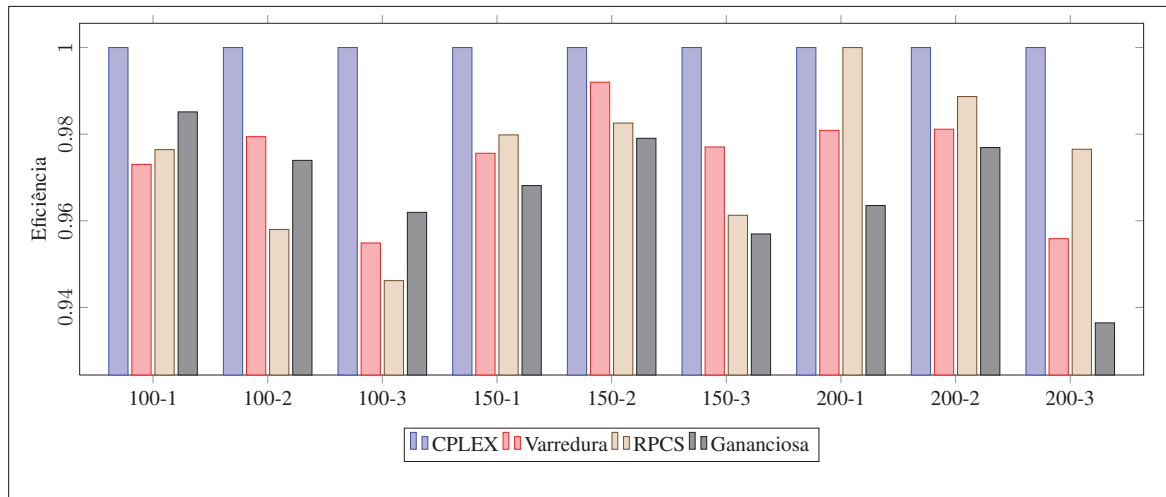
A Tabela 3 contém informações quanto ao custo da melhor rota encontrada, o melhor limitante do modelo relaxado encontrado em 3600s no Solver e o índice de qualidade (QI). QI é a

Exemplar	Quantidade	Dimensão	$ V $	$ W $	$ T $	$r$	$m$
Classe 100-1	5	100	50	50	25	4	3
Classe 100-2	5	100	50	50	13	4	3
Classe 100-3	5	100	50	50	7	4	3
Classe 150-1	5	150	75	75	38	4	3
Classe 150-2	5	150	75	75	19	4	3
Classe 150-3	5	150	75	75	10	4	3
Classe 200-1	5	200	100	100	50	4	3
Classe 200-2	5	200	100	100	25	4	3
Classe 200-3	5	200	100	100	13	4	3

Tabela 2: Dados dos exemplares gerados aleatoriamente

Exemplar	CPLEX 12.6			Varredura		RP/CS		Gananciosa	
	Custo	Limitante	T(s)	QI	Custo	QI	Custo	QI	Custo
100-1-1	524.004	524.004	25.7	1.053	551.668	1.079	565.151	1.015	531.847
100-1-2	488.181	458.943	3600.0	1.059	517.090	1.011	493.671	1.033	504.193
100-1-3	590.554	590.554	2575.1	1.010	596.367	1	590.554	1.018	601.128
100-1-4	539.713	539.713	699.6	1.010	545.011	1.017	548.688	1	539.713
100-1-5	487.712	487.712	11.3	1.011	492.944	1.016	495.585	1.011	492.944
100-2-1	395.425	395.425	15.9	1	395.425	1	395.425	1	395.425
100-2-2	450.141	450.141	784.5	1.006	452.737	1.075	483.971	1.006	452.737
100-2-3	442.846	442.846	48.8	1	442.847	1.005	444.937	1.029	455.552
100-2-4	394.654	394.654	25.359	1.038	409.738	1.137	448.579	1.038	409.738
100-2-5	425.097	425.097	201.6	1.063	451.704	1.006	427.665	1.061	451.085
100-3-1	395.536	395.536	2639.7	1.046	413.598	1.093	432.484	1.046	413.598
100-3-2	357.908	357.908	5.8	1	357.908	1.016	363.559	1	357.908
100-3-3	338.811	338.811	8.7	1.063	360.042	1.055	357.552	1.023	346.617
100-3-4	299.311	299.311	12.7	1.026	307.026	1.026	307.026	1.026	307.026
100-3-5	352.456	352.456	124.8	1.100	387.858	1.085	382.591	1.100	387.858
150-1-1	586.119	569.509	3600.0	1.029	602.831	1	586.119	1.054	617.748
150-1-2	569.475	532.438	3600.0	1.051	598.276	1.076	612.931	1.001	569.869
150-1-3	579.801	526.687	3600.0	1.018	590.000	1.013	587.487	1.009	585.139
150-1-4	623.331	618.095	3600.0	1.001	624.157	1	623.331	1.061	661.183
150-1-5	570.838	533.472	3600.0	1.029	587.581	1.016	579.984	1.037	592.054
150-2-1	452.097	429.107	3600.0	1.024	463.142	1	452.097	1	452.097
150-2-2	579.779	500.118	3600.0	1*	575.263	1.016	584.409	1*	575.263
150-2-3	460.390	442.222	3600.0	1.033	475.801	1.014	466.837	1.045	481.118
150-2-4	540.017	512.833	3600.0	1.003	541.379	1.050	567.212	1.054	569.086
150-2-5	492.581	482.197	3600.0	1*	489.608	1.019	499.115	1.024	501.331
150-3-1	365.071	365.071	1249.1	1.086	396.492	1.086	396.492	1.089	397.499
150-3-2	494.161	479.368	3600.0	1.021	504.725	1.032	509.996	1.039	513.437
150-3-3	450.963	437.465	3600.0	1.031	464.987	1.090	491.396	1.075	484.768
150-3-4	501.449	453.328	3600.0	1.011	506.837	1.024	513.457	1.007	505.149
150-3-5	471.062	460.840	3600.0	1*	463.317	1*	463.317	1.046	484.508
200-1-1	711.437	672.504	3600.0	1.010	710.809	1*	703.598	1.024	720.174
200-1-2			3600.0		699.289		724.361		751.863
200-1-3	628.587	584.261	3600.0	1.041	654.479	1.012	636.285	1.068	671.239
200-1-4	627.039	590.665	3600.0	1.021	640.103	1.000	627.188	1.037	650.106
200-1-5			3600.0		681.350		679.710		675.032
200-2-1	544.407	498.305	3600.0	1.021	555.822	1.031	561.507	1	544.407
200-2-2	528.470	499.898	3600.0	1.010	533.945	1.026	542.173	1.055	557.667
200-2-3	576.344	521.820	3600.0	1.020	588.108	1.043	601.169	1.045	602.030
200-2-4	541.262	493.017	3600.0	1.049	549.650	1*	523.868	1.049	549.423
200-2-5	550.911	529.873	3600.0	1.041	566.542	1*	544.042	1.016	552.633
200-3-1	508.063	436.179	3600.0	1.057	537.005	1.032	524.377	1.076	546.667
200-3-2	504.916	463.480	3600.0	1.031	520.571	1.023	516.287	1.039	524.611
200-3-3	439.456	386.324	3600.0	1.080	474.481	1.027	451.276	1.077	473.245
200-3-4	496.733	472.707	3600.0	1.008	500.702	1.001	497.137	1.044	518.565
200-3-5	423.304	384.433	3600.0	1.061	449.256	1.041	440.458	1.111	470.437

Tabela 3: Resultados obtidos com a resolução dos exemplares



**Figura 5:** Eficiência das 3 heurísticas em relação ao Solver Cplex 12.6

divisão entre o custo da solução encontrada por uma heurística e o melhor custo obtido para aquele exemplar entre todas as heurísticas. O símbolo \* significa que a solução obtida pela heurística foi melhor do que a solução do Solver após 3600s. Optou-se por omitir o tempo de resolução das heurísticas, visto que em nenhum caso ele superou 2 segundos. Dentre os 45 exemplares, somente em 200-1-2 e 200-1-5 o Solver não obteve uma solução inteira dentro do prazo de 3600s. Note que em 4 exemplares (100-1-3, 100-1-4, 100-2-1, 100-3-2) o ótimo foi atingido pelas heurísticas. Observando os dados, notamos que os piores valores de QI, 1.100, 1.137 e 1.111 são atingidos pelas heurísticas Varredura, Rota Primeiro / Cluster Segundo e Gananciosa, respectivamente. Outra informação que podemos inferir da Tabela 3 é que considerando o melhor custo obtido entre as três heurísticas para cada exemplar, e então, selecionando o pior resultado entre todos os exemplares, ou seja, olhando apenas para os valores destacados em cinza na tabela, o pior valor é de 1.086 no exemplar 150-3-1. Os valores de QI indicam que as heurísticas têm comportamento semelhante.

A Figura 5 ilustra a eficiência de cada heurística quando comparadas com o CPLEX 12.6, considerando a média entre os custos de cada classe e a média total dos custos de todos os exemplares com solução obtida entre o limite máximo de 3600s. Para os exemplares dimensionalmente pequenos, heurística Gananciosa atinge os melhores valores, entretanto, a medida que o tamanho do problema aumenta, os demais procedimentos superam a Gananciosa. Nos exemplares com 200 vértices, a heurística Rota Primeiro / Cluster Segundo se destaca, superando as outras duas na média das três classes com 200 vértices. Finalmente, notamos que na média de todos os exemplares existe um empate entre a heurística de Varredura e a heurística Rota Primeiro / Cluster Segundo.

## 5. Conclusões

Introduzimos uma nova formulação para o  $m$ -PRC como um problema de fluxo em redes. Isso possibilitou resolver de forma exata uma versão equilibrada no número de vértices nas diferentes rotas deste problema. Usamos o Solver CPLEX 12.6 na plataforma AIMMS. Os resultados foram usados para validar a implementação e a qualidade das soluções subótimas obtidas através de várias heurísticas para um conjunto de exemplares gerados aleatoriamente.

**Agradecimentos:** O primeiro autor foi suportado pela CAPES.

## Referências

- [1] E. Balas and A. Ho. Set covering algorithms using cutting planes, heuristics, and subgradient optimization: A computational study. *Mathematical Programming*, 12:37–60, 1980.

- [2] K. F. Doerner and R. F. Hartl. Health care logistics, emergency preparedness, and disaster relief: New challenges for routing problems with a focus on the austrian situation. In Bruce Golden, S. Raghavan, and Edward Wasil, editors, *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*, volume 43 of *Operations Research/Computer Science Interfaces*, pages 527–550. Springer US, 2008.
- [3] M. Gendreau, A. Hertz, and G. Laporte. New insertion and postoptimization procedures for the traveling salesman problem. *Operations Research*, 40:1086–1094, 1992.
- [4] M. Gendreau, G. Laporte, and F. Semet. The covering tour problem. *Operations Research*, 45(4):568–576, 1997.
- [5] M. H. Hà, N. Bostel, A. Langevin, and LM Rousseau. An exact algorithm and a metaheuristic for the multi-vehicle covering tour problem with a constraint on the number of vertices. *European Journal of Operational Research*, 226(2):211 – 220, 2013.
- [6] M. Hachicha, M. J. Hodgson, G. Laporte, and F. Semet. Heuristics for the multi-vehicle covering tour problem. *Computers & Operations Research*, 27(1):29 – 42, 2000.
- [7] M. Labbé and G. Laporte. Maximizing user convenience and postal service efficiency in post box location. *Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science*, 26:21–35, 1986.
- [8] W. A. Oliveira, A. C. Moretti, and E. F. Reis. The multi-vehicle covering tour problem: building routes for urban patrolling. *submitted article*, 2014.
- [9] J. C. Simms. Fixed and mobile facilities in dairy practice. *Veterinary Clinics of North America - Food Animal Practice*, 5:591–601, 1989.
- [10] R. Stahlbock and S. Voß. Vehicle routing problems and container terminal operations - an update of research. In Bruce Golden, S. Raghavan, and Edward Wasil, editors, *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*, volume 43 of *Operations Research/Computer Science Interfaces*, pages 551–589. Springer US, 2008.