AVALIAÇÃO ESTOCÁSTICA DA EFICIÊNCIA E AGRUPAMENTO HIERÁRQUICO EM PERÍODOS DE BAIXA DO MERCADO

Paulo Rotela Junior
Universidade Federal da Paraíba - Cidade Universitária, João Pessoa-PB, 58051-900
paulo.rotela@gmail.com

Giancarlo Aquila
Universidade Federal de Itajubá -Av. BPS, 1303, Itajubá-MG, CEP: 37500-903
giancarlo.aquila@yahoo.com

Luiz Célio de S Rocha
Universidade Federal de Itajubá - Av. BPS, 1303, Itajubá-MG, CEP: 37500-903
luizrochamg@hotmail.com

Pedro Paulo Balestrassi
Universidade Federal de Itajubá - Av. BPS, 1303, Itajubá-MG, CEP: 37500-903
ppbalestrassi@gmail.com

Edson O Pamplona
Universidade Federal de Itajubá - Av. BPS, 1303, Itajubá-MG, CEP: 37500-903
pamplona@unifei.edu.br

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta para formação de portfólios robustos a partir da análise estocástica da eficiência de ativos de empresas negociados na BM&FBovespa, com foco em períodos de baixa do mercado. Para isso, informações sobre o mercado em todas as suas fases e informações de períodos de baixa do mercado foram submetidos a uma análise de eficiência estocástica utilizando o modelo *Chance Constrained* DEA, juntamente com uma abordagem de agrupamento hierárquico. Em seguida, os ativos eficientes foram submetidos a um modelo de alocação de capital para obter sua participação ideal. Os portfólios formados em ambos os cenários foram analisados e comparados. A aplicação conjunta das abordagens abastecidas com informações de períodos de baixa do mercado foi capaz de formar carteiras robustas que levam a um maior retorno acumulado no período de validação, e ainda resultou em portfólios com menores betas.
PALAVRAS CHAVE. Programação Restringida por Chances, Análise de Eficiência, Portfólios.

Tópicos GF – Gestão Financeira

ABSTRACT

The aim of this paper is to present a proposal for the formation of robust portfolios from the stochastic analysis of the efficiency of business assets traded on BM&FBovespa, focusing on low market periods. For this, information on the market in all its phases and information market downturns were employed in a Stochastic efficiency analysis using the Chance Constrained DEA model, along with a hierarchical clustering approach. Then the efficient assets were subject to a capital allocation model for their ideal proportion. Portfolios formed in both scenarios were analyzed and compared. The joint application of approaches supplied with information down market periods was able to form robust portfolios that lead to higher cumulative return in the validation period, and also resulted in portfolios with lower betas.
KEYWORDS. Chance Constrained Programming, Efficiency Analysis, Portfolios.

Paper Topics GF – Financial Management

1. INTRODUÇÃO

Mais de sessenta anos após o desenvolvimento do modelo de Markowitz (1952), esta clássica abordagem de média-variância, considerada pioneira, ainda é o principal modelo utilizado na prática da alocação de ativos e gestão de carteira, e vem dando origem a novas propostas desenvolvidas por acadêmicos (ZOPOUNIDIS, DOUMPOS e FABOZZI, 2014). Tanto para investidores como para o meio acadêmico, o processo de seleção de investimentos em ativos de risco permanece sendo um desafio para a gestão financeira (MARKOWITZ, 2014).

Charnes, Cooper e Rhodes (1978) desenvolveram o conceito de Análise Envoltória de Dados – DEA (*Data Envelopment Analysis*), utilizada para avaliação e comparação de unidades organizacionais, que utilizam múltiplos insumos para produzir várias saídas em um determinado período de tempo (KAO e LIU, 2014). A Análise Envoltória de Dados é um método não paramétrico que vem se destacando dentre as modelagens quantitativas no auxílio à tomada de decisão, auxiliando os gestores das mais diversas áreas, inclusive a financeira (LIU *et al.*, 2013; EMROUZNEJAD e TAVANA, 2014; AZADI *et al*., 2015).

Tal conceito, que desde então tem sido amplamente discutido, vem dando origem a variações dos clássicos modelos DEA até os dias de hoje. Em algumas destas, segundo Rotela Junior *et al.* (2015), o raciocínio incerto e aproximado já pode ser considerado, como o proposto por Azadi *et al.* (2015), um modelo DEA com coeficientes *Fuzzy*, ou o proposto por Sengupta (1987), que associou a Programação Restringida por Chances (*Chance Constrained Programming* - CCP), proposta por Charnes e Cooper (1963), ao modelo DEA (JIN, ZHOU e ZHOU, 2014).

Os modelos da DEA vêm sendo aplicados de diferentes maneiras na área de finanças. E, de acordo com Liu *et al.* (2013), os periódicos mais importantes da área haviam publicado, até sua pesquisa, mais de 50 aplicações para a DEA em finanças. Mais recentemente a DEA continua sendo utilizada na formação e avaliação da eficiência de portfólios, como os apresentados por Rotela Junior, Pamplona e Salomon (2014) e Rotela Junior *et al*. (2015).

De acordo com Kim, Kim e Fabozzi (2014) e Kim *et al*. (2015), os modelos clássicos da otimização de portfólios, como os propostos por Markowitz (1952) e Sharpe (1963), não podem ser considerados robustos, já que são muito sensíveis às pequenas variações de suas entradas. Então, mais recentemente os pesquisadores e estudiosos começaram a incorporar a incerteza, por erros de estimativa diretamente no processo de otimização do portfólio, por meio de técnicas matemáticas que se referem à otimização robusta (FABOZZI *et al*., 2007; FABOZZI, HUANG e ZHOU, 2010; KIM *et al.*, 2014; KAPSOS, CHRISTOFIDES e RUSTEM, 2014; KIM *et al*., 2015).

Entretanto, apesar de alguns trabalhos como o de Bertsimas e Sim (2004) já terem confirmado uma relação entre o aumento do retorno de um portfólio de pior estado e o aumento da robustez, Kim *et al.* (2015) acreditam que a robustez dos modelos de portfólios robustos é provavelmente alcançada apostando-se sistematicamente na informação de períodos de pior estado do mercado, ou seja, na formação de um portfólio robusto, períodos de baixa (*bear market*) são mais relevantes do que períodos de alta da bolsa (*bull market*). Logo, as informações de retorno de ações em dias com pior desempenho são de suma importância para alcançar um portfólio considerado robusto (KIM *et al.*, 2015).

Em função da discussão anteriormente realizada, o objetivo geral deste artigo é apresentar uma proposta para formação de portfólios robustos a partir da análise estocástica de eficiência de ações de empresas negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo, utilizando o modelo *Chance Constrained Data Envelopment Analysis* (CCDEA) associado a uma sistemática de agrupamento hierárquico (*Hierarchical Clustering*).

2. *CHANCE CONSTRAINED* DEA

Entre as várias ferramentas de medição da eficiência, tais como os métodos convencionais de estatística, métodos não paramétricos e métodos de inteligência artificial, a Análise Envoltória de Dados - DEA (*Data Envelopment Analysis*) pode efetivamente medir a eficiência relativa de unidades tomadoras de decisão – DMU´s (*Decision Making Units*), que utilizam múltiplos insumos ou entradas (*inputs*) para produzir múltiplas saídas (*outputs*) (EMROUZNEJAD e TAVANA, 2014).

Os modelos DEA utilizados com maior frequência na literatura são do tipo determinístico, e não consideram os erros aleatórios das variáveis de entrada (*inputs*) e saída (*outputs*). Segundo Jin, Zhou e Zhou (2014) a aleatoriedade generalizada nos processos de avaliação são provenientes dos erros na coleta de dados.

Uma das primeiras tentativas de preencher tal lacuna envolveu o desenvolvimento da Restrição por Chances em modelos matemáticos da Análise Envoltória de Dados (CHARNES e COOPER, 1959), a fim de incorporar variações estocásticas nos dados, o que pode ser visto nos trabalhos de Banker (1986), Sengupta (1987), Sueyoshi (2000), e em trabalhos mais recentes como Jin, Zhou e Zhou (2014).

Sengupta (1987) incorporou as variáveis estocásticas na formulação DEA CCR, e em seguida, transformou-o em um modelo determinístico equivalente, cujo equivalente é apresentado conforme (1)-(4) (JIN, ZHOU e ZHOU, 2014):

$$\max \sum_{q=1}^{b} u_q . \bar{y}_{oq} \tag{1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{p=1}^{a} v_p \, \bar{x}_{op} = 1 \tag{2}$$

$$\sum_{p=1}^{a} v_p \, \beta_i (\bar{x}_{ip} + \Phi^{-1}(1-\alpha_i) a_{ip} \, \sigma) - \sum_{q=1}^{b} u_q (\bar{y}_{iq} + \Phi^{-1}(1-\alpha_i) b_{iq} \sigma) \geq 0_i \quad i = 1, 2, ..., n \tag{3}$$

$$u_q, v_p, w_r \geq 0 \tag{4}$$

No qual, $u_1,\ldots,u_b$, $v_1,\ldots,v_a$ são pesos a serem estimados pelo modelo. Já os símbolos u_q e v_r representam os pesos dos multiplicadores relacionados a *q-ésima* saída e *p-ésima* entrada, respectivamente. Para as restrições, o modelo formula a proporção de ser inferior ou igual a β_i, que representa um nível de eficiência esperado para a *i-ésima* DMU, que segundo Jin, Zhou e Zhou (2014), possui variação [0,1], sendo definido como um nível de aspiração. Já α_i é considerado um critério de risco em nome da utilidade de um tomador de decisão. Por outro lado, $1-\alpha_i$ indica a probabilidade de atingir a exigência, sendo considerado um nível de confiança. Assim como β_i, o critério de risco (α_i) é um valor medido no intervalo entre 0 e 1. Já, Φ representa uma função de distribuição normal padrão, e Φ^{-1} é o inverso da função.

3. ABORDAGEM DE PIOR ESTADO DE MERCADO

Tem sido relatado que a correlação entre ativos financeiros aumenta durante baixas do mercado (*bear market*). E o mercado acionário não é diferente, é o que afirmam Kim *et al.* (2015). Então, os investidores não podem se beneficiar do efeito da diversificação quando ele é mais necessário. E, para piorar as coisas, a correlação dentro do mercado de capitais tem aumentado ao longo de períodos mais recentes (KIM *et al.*, 2015).

Como as ações durante períodos de crise se apresentam mais positivamente correlacionadas, modelos como o de Markowitz (1952) podem não ser adequados para proteger investidores. Para superar este problema, duas soluções têm sido apresentadas: empregar variáveis de entrada menos sensíveis aos dados históricos ou inserir conjuntos de incerteza sobre os parâmetros de entrada nos modelos tradicionais e em seguida reformular os modelos a fim de obter a melhor solução de pior caso (problemas *max-min*), conforme detalhado anteriormente na abordagem proposta por Fabozzi *et al.* (2007).

No trabalho proposto por Kim *et al.* (2015), estes fazem a suposição de que o mercado pode ser dividido em vários estados. A proposição provada por Kim *et al.* (2015, p. 4) é a de que "quando vários estados existem em um mercado, o portfólio estático de média-variância ideal para um investidor avesso ao risco é o portfólio robusto, no qual seu retorno esperado é constante em todos os estados".

Assim, em concordância com Kim, Kim e Fabozzi (2014), a principal contribuição do trabalho de Kim *et al.* (2015) é a de demonstrar a importância das informações de retorno de ações em dias com pior desempenho para alcançar um portfólio considerado robusto. Embora diversos trabalhos nessa área foquem a estrutura de conjuntos de incerteza, Bertsimas e Sim (2004) já haviam confirmado uma relação entre o aumento do retorno de um portfólio de pior estado e o aumento da robustez.

Outra valiosa contribuição da pesquisa desenvolvida por Kim *et al.* (2015) é a afirmação de que, durante períodos de crise (*market crashes*), ativos com um baixo beta reduzem o risco geral do portfólio e oferecem melhores retornos do que os ativos que possuem beta mais alto.

4. MATERIAIS E MÉTODOS

A presente pesquisa utilizou a base científica proposta por Markowitz (1952) para apresentar um método para a seleção de portfólios de ações, considerando variáveis estocásticas. Como visto, a Análise Envoltória de Dados (DEA) vem sendo adotado como mais uma ferramenta no auxílio à otimização de carteiras. Vários autores têm apresentado as técnicas da Análise Envoltória de Dados associada às abordagens que permitem incorporar a incerteza a tais modelos, por meio da Lógica *Fuzzy* ou ainda aliada a *Chance Constrained Programming.*

Entretanto, como afirmado anteriormente, Kim *et al.* (2015) acreditam que a robustez dos modelos de portfólios robustos, otimizados por meio da abordagem *max-min*, é provavelmente alcançada apostando-se sistematicamente na informação de períodos de pior estado do mercado.

Baseado em tais afirmações, esta etapa da pesquisa tem como objetivo analisar o comportamento de portfólios montados utilizando a avaliação da eficiência sob condições de risco e incerteza considerando apenas informações de pior estado de mercado, e compará-los aos resultados obtidos pelo mesmo modelo quando consideradas informações de um período qualquer. Para isso, será utilizado o modelo *Chance Constrained* DEA, abastecido de informações de pior estado do mercado, associado a modelos como o de agrupamento hierárquico (*Hierarchical Clustering* - *Clustering* Hierárquico) e o proposto por Sharpe, conforme apresentado na Figura 1.

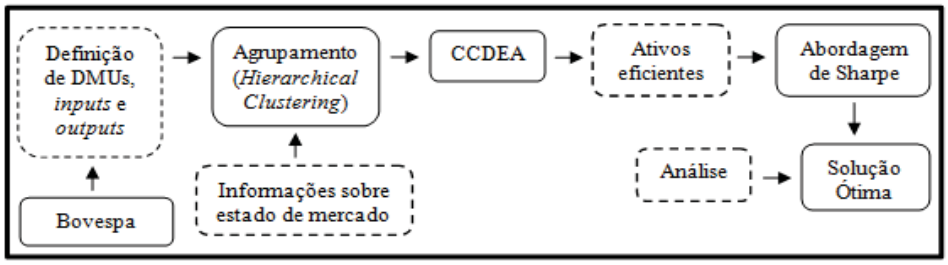

Figura 1- Fluxograma da quinta etapa da pesquisa.

Para compor a amostra, optou-se por ativos negociados na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo e que possuem participação no Índice Bovespa (Ibovespa). Entretanto, era necessário que tais ativos apresentassem informações de um longo horizonte de tempo.

Para melhor identificar o período de crise, a mesma estratégia proposta por Kim *et al.* (2015) foi adotada.

Selecionados os 61 ativos (A1-A61) que compõem a amostra, deu-se início a seleção do conjunto de indicadores de entrada e saída (*inputs* e outputs) utilizados na análise de eficiência. Como esta etapa pode ser considerada independente das demais, analisaram-se novamente as variáveis apresentadas na literatura. Para isso, utilizou-se o trabalho de Rotela Junior *et al.* (2015). Levou-se em consideração também a afirmação feita por Kim *et al.* (2015), de que em períodos de crise, ativos com baixo beta reduzem o risco do portfólio e proporcionam melhor retorno do que ativos com alto beta.

Então, para esta etapa da pesquisa, optou-se pela utilização do retorno, liquidez do ativo e lucro-preço (LP) como variáveis de saída do modelo (*outputs*). E, como variáveis de entrada (*inputs*) foram adotadas o beta, preço-lucro (PL) e a volatilidade. As informações coletadas com auxílio do *software* Economática® correspondem a dados diários compreendidos entre os meses de novembro de 2009 e novembro de 2014. Vale ressaltar que, nesta etapa do trabalho as variáveis de entrada foram consideras independentes, assim como as variáveis de saída.

O trabalho propõe uma comparação entre os portfólios otimizados com informações sem definição de estados de mercado e portfólios otimizados considerando o pior estado de mercado. Para a definição do período de pior estado do mercado, optou-se pela definição de *n* igual a quatro.

Considerando as informações de todo o período, para cada DMU (ativo), foi possível calcular a média e variância de cada uma das variáveis adotadas para a análise de eficiência, para cada um dos cenários determinados, sendo estes informações completas do mercado e pior estado do mercado.

Utilizou-se o agrupamento hierárquico (*Hierarchical Clustering*), agrupando por grau de similaridade das DMU´s, levando-se em consideração as médias e variâncias de todas as quatro variáveis selecionadas para o modelo. Tal iniciativa ajudou a agrupar aumentando significantemente o grau de similaridade. A Figura 2 apresenta o agrupamento das DMU´s em estudo, quando considerados todas as informações dos ativos desde 2009 a 2014.

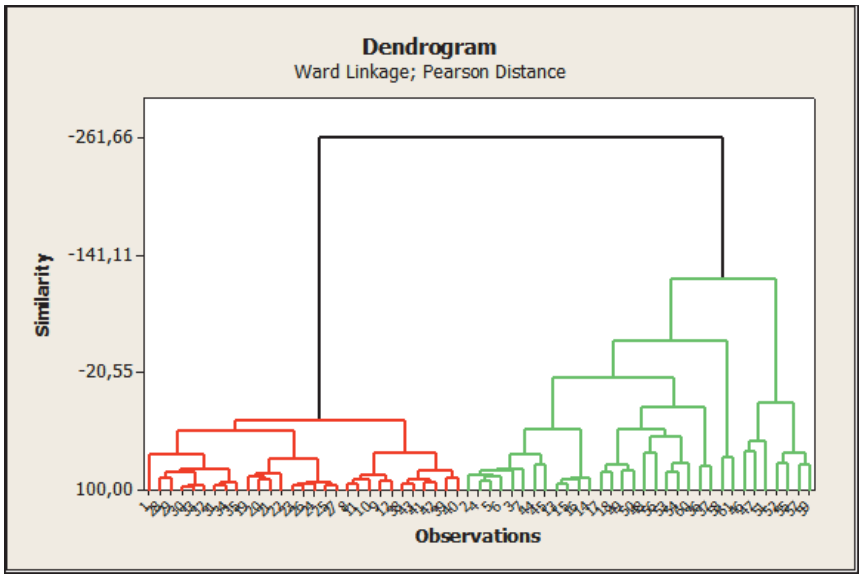

Figura 2- Dendrograma do agrupamento por meio de *Clustering* Hierárquico considerando todas as informações do mercado.

Já a Figura 3 apresenta o agrupamento das DMU´s quando analisadas informações colhidas no pior estado do mercado.

Então, para cada um dos dois cenários propostos, estado total de mercado e pior estado de mercado, foram realizados dois agrupamentos, que se comportam de forma mais similar do que quando considerados os grupos inteiros.

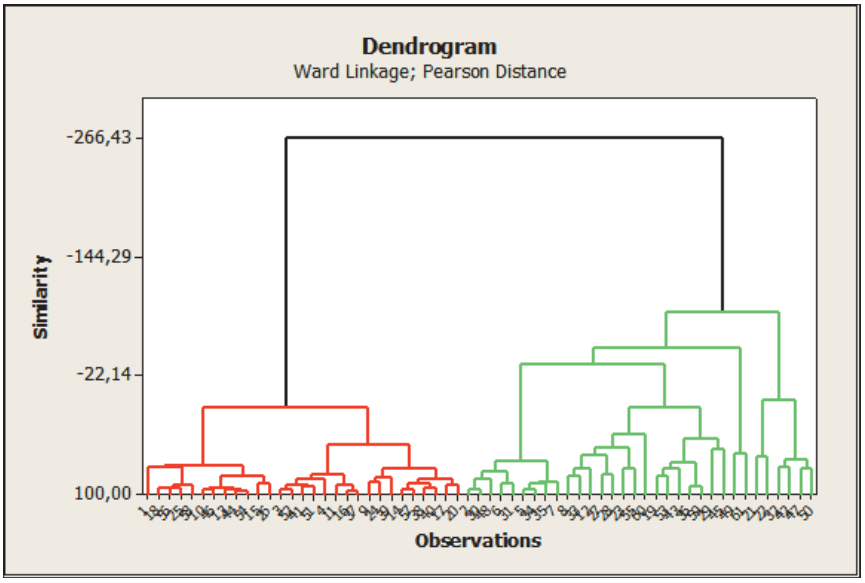

Figura 3- Dendrograma do agrupamento por meio de *Clustering* Hierárquico considerando apenas as informações de pior estado do mercado.

Para a modelagem do modelo CCDEA, foram utilizados o *softwares* como Solver do Microsoft Excel® e The General Algebric Modeling (GAMS®) na versão 23.6.5 e Solver CPLEX na versão 12.2.1.

Utilizou-se para o nível de eficiência (β_i) o valor de 1. Observou-se que, para os dados em questão, uma boa faixa de discriminação das unidades de análise é obtida quando o critério de risco (α_i) varia entre 0,5 e 0,6. Tal faixa pode variar de acordo com os dados em avaliação no modelo CCDEA. Já a variação dentro da faixa estipulada no passo anterior, pode ser relacionada como uma forma de se inserir a aversão do investidor ao risco. No caso específico desta etapa da pesquisa, optou-se pela variação de 0,02 dentro da faixa definida como ideal para variação da probabilidade de atendimento das restrições ($1-\alpha_i$), gerando seis portfólios para cada estado tratado.

Para a análise dos resultados, foi proposta a utilização do *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), apresentado por Sharpe (1964) para a identificação da existência de retornos anormais. Ainda, utilizou-se o índice Sharpe (S_R), métrica mais utilizada e adotada por vários autores para avaliar o desempenho de portfólios (AUER e SCHUHMACHER, 2013).

Para a validação dos resultados utilizou-se informações diárias obtidas, também por meio do *software* Economática®, entre os períodos de novembro de 2014 a março de 2015. Para isso, calculou-se o retorno acumulado no período de validação para cada portfólio, conforme as participações definidas pelos modelos utilizados na otimização.

5. RESULTADOS E ANÁLISES

Considerando os critérios de risco (α_i) adotados anteriormente, foi realizada a avaliação da eficiência dos grupos propostos, quando submetidos ao modelo CCDEA com diferentes níveis de

probabilidade (1- α_i) de se atender as restrições do modelo, abastecidos de informações de todo o estado do mercado no período estipulado.

Da mesma forma, foram calculados os resultados de eficiência dos grupos 1 e 2, respectivamente, quando submetidos ao modelo CCDEA com diferentes níveis de probabilidade (1- α_i) de se atender as restrições do modelo. Porém, neste ponto da pesquisa, o modelo CCDEA foi abastecido com informações de pior estado do mercado. Vale observar que com a redução do critério de risco (α_i), aumenta-se a probabilidade de atendimento das restrições do modelo de otimização, deixando o modelo mais rigoroso. Com isso, menos ativos são classificados como eficientes.

A análise de agrupamento hierárquico se deu com a finalidade de agrupar ativos que possuíam certo grau de similaridade, em busca de uma melhor discriminação das DMU´s, já que quando são agrupados tais ativos, reduz-se a divergência entre as restrições do modelo CCDEA. Entretanto, os ativos dados como eficientes nos grupos de cada estado de mercado serão reunidos e otimizados conforme proposto por Sharpe.

Considerando informações do estado completo do mercado, para cada critério de risco (α_i) adotado, os ativos dados como eficientes foram submetidos à proposta de Sharpe. Então, foi determinada a alocação dos ativos em seis portfólios, propostos de acordo com a variação do critério de risco (α_i), quando o modelo é abastecido de informações do estado completo do mercado. Entretanto alguns não foram dados como eficientes pelo modelo CCDEA, e logo não foram submetidos à otimização proposta por Sharpe. É interessante observar que nem todos ativos dados como eficientes serão utilizados na alocação quando submetidos a este último modelo, pois, dado que o modelo de Sharpe busca minimizar variância e maximizar o retorno dos ativos, alguns ativos não foram incluídos no portfólio final.

Conforme discutido anteriormente, quanto mais rigoroso for o modelo CCDEA, por meio do aumento da probabilidade de atendimento das restrições, menos ativos serão dados como eficientes. Tal fato denota que quanto menor o valor de α_i, maior a aversão ao risco. Logo, com redução do critério de risco (α_i), o portfólio tende a ser composto por um menor número de ativos. Novamente, remetendo a afirmação de que, quando: (a) $\alpha_i < 0,5$ pode ser classificado como conservador (averso ao risco), (b) $\alpha_i=0,5$ como risco natural e (c) $\alpha_i > 0,5$ classificado como tomador de risco (SUEYOSHI, 2000).

Por meio do modelo de Sharpe (1963), seis portfólios foram propostos a partir da variação do critério de risco, que para mais fácil discussão foram identificados como Portfólios A, B, C, D, E e F.

É interessante observar que, quando o modelo foi abastecido de informações do pior estado de mercado, um menor número de ativos foi dado como eficiente. E, quando submetidos à proposta de Sharpe, poucos destes foram selecionados para compor os portfólios. Novamente, estes seis portfólios foram propostos a partir da variação do critério de risco (α_i), que para mais fácil discussão foram identificados como Portfólios U, V, X, W, Y e Z.

Na Tabela 1 são apresentadas as participações ideais de cada ativo obtidas pelo modelo de Sharpe (1963), em valores percentuais, para cada um dos portfólios.

Tabela 1- Participação ideal (em percentual) dos ativos no portfólios propostos.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**U**	**V**	**X**	**W**	**Y**	**Z**
(α_i)	**0.60**	**0.58**	**0.56**	**0.54**	**0.52**	**0.50**	**0.60**	**0.58**	**0.56**	**0.54**	**0.52**	**0.50**
A1	4,62	5,04	5,67	7,10	9,72	13,89	17,58	18,82	19,55	23,24	23,51	23,51
A2	1,25	1,45	1,74	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A3	1,69	1,90	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A4	2,52	2,81	3,25	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A5	2,40	2,71	3,16	4,19	6,08	9,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
A6	0,77	1,01	1,39	2,24	-	-	0,00	-	-	-	-	-
A7	1,46	1,67	1,99	2,71	4,03	6,14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
A8	1,70	1,88	2,16	2,78	-	-	0,00	-	-	-	-	-
A9	3,84	4,19	4,70	5,88	8,04	-	9,32	-	-	-	-	-

A10	2,76	3,06	3,50	4,50	-	-	-	-	-	-	-	-
A11	2,06	2,30	2,66	3,49	5,00	7,40	5,56	6,51	7,06	9,84	10,05	10,04
A12	1,73	1,94	2,25	2,96	4,26	6,33	2,71	3,55	4,03	6,52	6,72	6,71
A13	3,21	3,51	3,96	4,99	-	-	-	-	-	-	-	-
A14	2,28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A15	3,30	3,58	4,01	4,99	6,78	9,62	9,46	10,14	10,54	12,59	12,74	12,74
A16	1,90	2,18	2,59	-	-	-	4,15	4,88	5,31	-	-	-
A17	2,27	2,53	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A18	2,87	3,25	3,83	5,13	7,52	-	-	-	-	-	-	-
A19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A20	0,66	0,83	1,08	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A21	0,39	0,54	0,75	1,24	-	-	0,00	0,00	-	-	-	-
A22	0,66	0,81	1,04	1,56	2,51	-	0,00	0,00	0,00	1,53	-	-
A23	0,45	0,64	0,92	1,56	2,74	4,61	0,00	0,03	0,31	1,80	1,91	1,91
A24	2,69	2,93	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A25	2,03	2,34	2,80	-	-	-	9,75	10,72	11,29	-	-	-
A26	2,81	3,04	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A27	1,07	1,24	1,50	2,08	-	-	-	-	-	-	-	-
A28	1,25	1,41	1,66	2,22	-	-	0,00	0,00	-	-	-	-
A29	0,06	0,15	0,28	0,58	-	-	-	-	-	-	-	-
A30	0,58	0,80	1,12	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A31	0,59	0,80	1,11	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A32	0,52	0,62	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A33	1,19	1,37	1,64	2,25	-	-	0,00	0,00	0,00	-	-	-
A34	2,12	2,41	2,83	3,79	5,55	-	0,00	0,00	0,00	0,00	-	-
A35	2,09	2,38	2,81	3,78	5,57	-	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
A36	0,99	1,12	1,31	1,73	2,51	-	0,00	-	-	-	-	-
A37	2,10	2,39	2,83	-	-	-	4,45	5,25	-	-	-	-
A38	2,18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A39	2,16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A40	2,08	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A41	2,36	2,56	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A42	0,27	0,37	0,54	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A43	0,64	0,75	0,91	1,27	-	-	-	-	-	-	-	-
A44	2,07	2,36	2,80	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A45	0,00	0,01	0,16	0,53	-	-	0,00	0,00	-	-	-	-
A46	2,92	3,25	3,74	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A47	0,00	0,02	0,16	0,48	-	-	-	-	-	-	-	-
A48	0,34	0,52	0,78	1,37	-	-	-	-	-	-	-	-
A49	0,53	0,72	0,99	1,62	2,76	4,58	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
A50	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A51	2,31	2,56	-	-	-	-	4,60	5,35	5,78	-	-	-
A52	1,33	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A53	0,28	0,44	0,67	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A54	2,96	3,30	3,80	4,96	-	-	-	-	-	-	-	-
A55	1,12	1,30	1,56	2,15	3,23	4,95	0,00	0,00	0,00	1,37	1,48	1,49
A56	3,35	3,75	4,36	5,74	8,27	12,29	15,85	17,16	17,95	21,91	22,18	22,19
A57	2,02	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A58	3,83	4,26	4,91	6,38	9,09	13,39	16,58	17,59	18,18	21,19	21,41	21,40
A59	0,12	0,24	0,42	0,82	1,56	-	0,00	-	-	-	-	-
A60	1,08	1,35	1,75	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-
A61	1,16	1,46	1,91	2,92	4,77	7,72	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Na Tabela 2, para cada portfólio otimizado a partir de informações completas do mercado, são apresentados o critério de risco adotado (α_i), beta da carteira, resultados de retorno, desvio-padrão, S_R obtidos e número de ativos que o compõem.

Já na Tabela 3 são apresentadas as mesmas informações, porém para os portfólios otimizados a partir das informações do pior estado de mercado.

Tabela 2- Resultados por critério de risco dos portfólios otimizados com informações de todo o mercado.

	Portfólio A	Portfólio B	Portfólio C	Portfólio D	Portfólio E	Portfólio F
Critério de risco (α_i)	60%	58%	56%	54%	52%	50%
Beta da carteira (β)	0,702	0,691	0,703	0,696	0,668	0,616
Retorno esperado (a.m.)	1,07%	1,06%	1,07%	1,07%	1,05%	1,03%
Desvio-padrão	5,70%	5,92%	5,56%	5,93%	5,42%	5,67%
Retorno	1,21%	1,30%	2,33%	3,81%	3,24%	3,20%
Índice Sharpe	0,024	0,219	0,419	0,642	0,597	0,564
N. de ativos	57	53	46	33	19	12
Retorno acumulado	2,30%	2,49%	5,25%	5,26%	6,49%	6,63%

Tabela 3- Resultados por critério de risco dos portfólios otimizados com informações do pior estado de mercado.

	Portfólio U	Portfólio V	Portfólio X	Portfólio W	Portfólio Y	Portfólio Z
Critério de risco (α_i)	60%	58%	56%	54%	52%	50%
Beta da carteira (β)	0,458	0,446	0,444	0,432	0,429	0,429
Retorno esperado (a.m.)	0,96%	0,96%	0,96%	0,95%	0,95%	0,95%
Desvio-padrão	5,22%	5,47%	5,34%	5,75%	5,67%	5,52%
Retorno	2,10%	1,25%	2,63%	3,70%	3,63%	3,64%
Índice Sharpe	0,218	0,228	0,492	0,643	0,640	0,659
N. de ativos	11	11	10	9	8	8
Retorno acumulado	4,97%	4,13%	5,75%	8,46%	8,64%	8,65%

A principal discussão a ser realizada nesta etapa do trabalho é a de mostrar a importância da informação do pior estado de mercado para a otimização robusta de portfólios, quando otimizados por meio do modelo CCDEA em conjunto com outras técnicas. Então, as Tabelas 2 e 3 permitirão análises e comparações entre os portfólios otimizados a partir de informações completas do mercado (portfólios A-F) e os que foram otimizados a partir de informações de período de baixa do mercado (portfólios U-Z). Para isso, os portfólios A-F e U-Z serão comparados aos pares, de acordo com o critério de risco adotado (α_i).

Vale observar que os portfólios otimizados a partir de dados históricos de períodos de baixa do mercado obtiveram melhores resultados no índice Sharpe (S_R) do que os otimizados a partir de informações completas, no diferentes valores de critério de risco (α_i) adotados.

Nas Tabelas 2 e 3 ainda são apresentados os valores de retorno esperado das carteiras, que foram calculados conforme apresentado anteriormente, para isso se fez necessário o cálculo dos valores de beta (β) de cada um dos portfólios, também exibidos nestas tabelas. Para os portfólios otimizados a partir de informações completas do mercado (A-F), os retornos esperados variam entre 1,03% e 1,07% a.m. Já para os portfólios otimizados a partir de informações de períodos de baixa do mercado (U-Z), os retornos esperados se concentram na faixa entre 0,95% e 0,96% a.m.

No que diz respeito às rentabilidades efetivamente obtidas, encontrou-se valores de 1,21%, 1,30%, 2,33%, 3,81%, 3,24% e 3,20% para os portfólios de A a F, respectivamente. Já para os portfólios otimizados a partir de períodos de baixa do mercado, U a Z, as rentabilidade efetivamente obtidas foi de 2,10%, 1,25%, 2,63%, 3,70%, 3,63% e 3,64%, respectivamente. Tal fato demonstra a existência de retornos anormais quando comparadas às rentabilidades esperadas, também apresentadas nas Tabelas 2 e 3.

A partir de informações coletadas dentro do período selecionado para validação, obteve-se o retorno acumulado dos portfólios. Realizou-se a comparação dos portfólios aos pares, no qual um deles é sempre otimizado a partir de informações completas do período e o outro apenas com informações do pior estado de mercado. A Figura 4(a)-(f) apresenta o retorno acumulado em pares

formados de acordo com o nível de probabilidade (1-α_i) de atendimento das restrições do modelo CCDEA.

É interessante observar que os portfólios otimizados a partir de informações de pior estado do mercado (U-Z), apresentaram melhores valores de S_R. Contudo, os valores beta dos portfólios formados, independentemente do critério de risco adotado, foram menores do que os apresentados pelos portfólios A-F. Kim *et al.* (2015) afirmam que portfólios ditos robustos, otimizados por meio de modelos estocásticos, alcançam tal robustez devido ao fato de se concentrarem especialmente em informações de períodos de crise do mercado financeiro. Kim *et al.* (2015) ainda acreditam que portfólios robustos tendem a serem compostos por ativos que apresentam um baixo valor de beta, e que tais ativos tendem a se comportar melhor do que ativos que possuem alto valor de beta, em qualquer classificação de período.

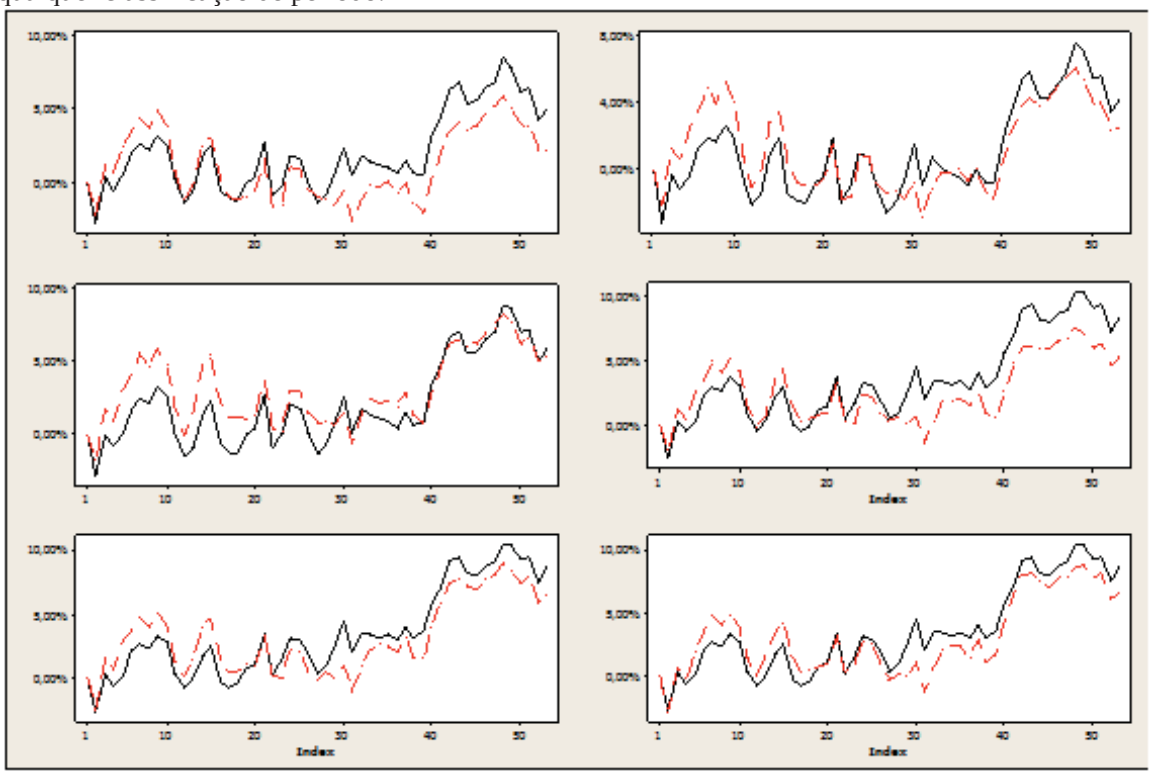

Figura 4- Retorno acumulado dos portfólios definidos aos pares pelo critério de risco.

6. CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES

A otimização proposta não tem a pretensão de substituir abordagens consagradas como as de Markowitz (1952) e Sharpe (1963), mas sim, por meio de dados estocásticos de diferentes variáveis, promover a redução do espaço de busca por ativos ditos eficientes, que posteriormente serão submetidos a abordagens que promovem a ideal alocação dos ativos nos portfólios.

A variação do nível probabilidade de atendimento das restrições (1-α_i) do modelo CCDEA permite atender às exigências de investidores com diferentes atitudes frente ao risco, desde o mais conservador ao mais tomador de risco.

Então, a alteração do critério de risco (α_i) entre os valores de 0,5 e 0,6, faixa esta que melhor discriminou as unidades de análise, permitiu a formação de seis portfólios para cada cenário adotado.

A utilização do agrupamento hierárquico (*Hierarchical Clustering*) permitiu o agrupamento dos ativos com mesmo comportamento frente às diferentes variáveis adotadas, levando em

consideração tanto os valores de média quanto de variância. E, novamente a aplicação do CCDEA se mostrou viável, proporcionando uma excelente discriminação das DMU´s.

Os portfólios otimizados a partir de informações de pior estado do mercado, apresentaram, no período de validação considerado, um melhor desempenho medido pelo índice Sharpe (S_R). O resultado se alinha a proposta de Kim *et al*. (2013), ou seja, a otimização robusta permite a montagem de portfólios que alcançam sua robustez concentrando-se especialmente em informações de períodos de baixa do mercado.

Outro fato que vale ser destacado é que, para cada critério de risco adotado, foi obtido um menor valor de beta pelos portfólios otimizados a partir de informações de piores momentos do mercado quando comparados aos abastecidos por informações de todo o período. Portfólios resultantes da otimização robusta tendem a ser compostos por ativos com baixos valores de beta, que apresentam bom comportamento em qualquer classificação de estado do mercado (*bull* ou *bear market*).

Um benefício resultante desta otimização é o reduzido número de ativos que compõem os portfólios. Mas esta redução do espaço de busca é alcançada principalmente com o aumento da exigência no nível de atendimento das restrições do modelo CCDEA. Este fato, associado à manutenção sob controle do risco observado, pode gerar economias referentes ao custo de rebalanceamento dos portfólios, gerando ganhos indiretos aos investidores.

A Análise Envoltória de Dados (DEA) já vem sendo utilizada na otimização de portfólios, e pode-se observar que a abordagem estocástica, *Chance Constrained Data Envelopment Analysis* (CCDEA) também permite a redução no espaço de busca por ativos eficientes, considerando diferentes variáveis. A aplicação do agrupamento hierárquico (*Hierarchical Clustering*) permitiu ao modelo CCDEA uma melhor discriminação dos dados, mesmo com a redução do critério de risco, já que se obteve uma redução no grau de contradição entre as restrições do modelo, fornecidas pelos dados.

Por fim, algumas vantagens foram observadas: avaliação da eficiência por meio de uma abordagem estocástica; um maior número de informações, por meio de diferentes variáveis estocásticas, foi considerado na análise, o que pode auxiliar as decisões quando associada a modelos determinísticos consagrados; um número reduzido de ativos compondo o portfólio, tornando viável sua utilização.

Agradecimentos

Agradecimentos à FAPEMIG, CNPq e CAPES pelo apoio financeiro e incentivo à pesquisa.

REFERÊNCIAS

AUER, B.; SCHUHMACHER, F. Performance hypothesis testing with the Sharpe Ratio: The case of hedge funds. **Finance Research Letters**, v. 10, n. 4, p. 196-208, 2013.

AZADI, M.; JAFARIAN, M.; SAEN, R. F.; MIRHEDAYATIAN, S. M. A new fuzzy DEA model for evaluation of efficiency and effectiveness of suppliers in sustainable supply chain management context. **Computers & Operations Research**, v. 54, p. 274-285, 2015.

BANKER, R. **Stochastic data envelopment analysis**. Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, 1986.

BERTSIMAS,D.; SIM, M. The price of robustness. **Operations Research**, v. 52, n. 1, p. 35-53, 2004.

CHARNES, A.; COOPER, W. W. Chance constrained programming. **Management Science**, v. 6, n. 1, p. 73-79, 1959.

CHARNES, A.; COOPER, W. W. Deterministic equivalents for optimizing and satisfying under chance constraints. **Management Science**, v. 11, n. 1, 1963.

CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision-making units. **European Journal of Operational Research**, v. 2, n. 6, p. 429-444, 1978.

EMROUZNEJAD, A.; TAVANA, M. **Peformance Measurement with Fuzzy Data Envelopment Analysis**, 1 ed, New York: Springer Science + Business Media, 2014.

FABOZZI, F.; HUANG, D.; ZHOU, G. Robust portfolio: contributions from operations research and finance. **Annals of Operations Research**, v. 176, p. 191-220, 2010.

FABOZZI, F.; KOLM, P.; PACHAMANOVA, D.; FOCARDI, S. Robust portfolio optimization: Recent trends and future directions**. The Journal of Portfolio Management**, v. 33, n. 3, 2007.

JIN, J.; ZHOU, D.; ZHOU, P. Measuring environmental performance with stochastic environmental DEA: The case of APEC economies. **Economic Modelling**, v. 38, 2014.

KAO, C.; LIU, S. T. Multi-period efficiency measurement in data envelopment analysis: The case of Taiwanese commercial banks. **Omega**, v. 47, p. 90-98, 2014.

KAPSOS, M.; CHRISTOFIDES, N.; RUSTEM, B. Worst-case robust Omega ratio. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 499-507, 2014.

KIM, J.; KIM, W.; FABOZZI, F. Robust developments in robust portfolios with a worst-case approach. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 161, n. 1, p. 103-121, 2014.

KIM, W.; KIM, M.; KIM, J.; FABOZZI, F. Robust portfolios that do not tilt factor exposure. *European* **Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 411-421, 2014.

KIM, W.; KIM, J.; MULVEY, J.; FABOZZI, F. Focusing on the worst state for robust investing. **International Review of Financial Analysis**, v. 39, p. 19-31, 2015.

LIU, J. S.; LU, L. Y. Y.; LU, W.-M.; LIN, B. J. Y. A survey of DEA applications. **Omega**, v. 41, n. 5, p. 893–902, 2013.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MARKOWITZ, H. Mean-variance approximations to expected utility**. European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 346-355, 2014.

POWERS, J.; MCMULLEN, P. Using data envelopment analysis to select efficient large market cap securities. **Journal of Business and Management**, v. 7, n. 2, p. 31-42, 2000.

ROTELA JUNIOR, P.; PAMPLONA, E. O.; SALOMON, F. R. Otimização de Portfólios: Análise de Eficiência. **RAE – Revista de Administração de Empresas**, v. 54, n. 4, 2014.

ROTELA JUNIOR, P.; PAMPLONA, E. O.; ROCHA, L. C.; VALERIO, V. E.; PAIVA, A. P. Stochastic portfolio optimization using efficiency evaluation. **Management Decision**, v. 53, v. 8, 2015.

SENGUPTA, J. Data Envelopment Analysis for efficiency measurement in the stochastic case. **Computer and Operational Research,** v. 14, n. 2, 1987.

SHARPE, W. F. A simplified model for portfolio analysis. **Management Science**, n. 9, 1963.

SHARPE, W. F. Capital Assets prices: A Theory of Market Equilibrium under conditions of Risk. **Journal of Finance**, v. 19, 1964.

SUEYOSHI, T. Stochastic DEA for restructure strategy: an application to a Japanese petroleum company. **Journal of Financial Economics**, v. 99, n. 1, 2000.

ZOPOUNIDIS, C.; DOUMPOS, M.; FABOZZI, F. Preface to the Special Issue: 60 years following Harry Markowitz's contributions in portfolio theory and operations research. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 343-345, 2014.