

Caracterização dos Cografos-(4,0) por Subgrafos Proibidos com Restrições Externas

Raquel Bravo

Universidade Federal Fluminense - UFF
Niterói - RJ
raquel@ic.uff.br

Loana Nogueira

Universidade Federal Fluminense - UFF
Niterói - RJ
loana@ic.uff.br

Fábio Protti

Universidade Federal Fluminense - UFF
Niterói - RJ
fabio@ic.uff.br

Jeanne Leite

Instituto Federal do Piauí - IFPI
Teresina - PI
jeanneleite@gmail.com>

RESUMO

No problema da M -partição é dada uma matriz simétrica M de ordem $m \times m$ definida sobre $\{0, 1, *\}$: Uma M -partição de um grafo G é uma partição de $V(G)$ em subconjuntos V_1, V_2, \dots, V_m tal que para quaisquer dois vértices $u \in V_i, v \in V_j$, temos $uv \in E(G)$ se $M(i, j) = 1$, e $uv \notin E(G)$ se $M(i, j) = 0$. Admitimos também a possibilidade de $i = j$; em particular, se $M(i, i) = 0$, o conjunto V_i é um conjunto independente em G e se $M(i, i) = 1$, é uma clique. No caso de entradas $M(i, j) = *$ ou $M(i, i) = *$, isso significa que não há restrições entre as partes e nem nas partes, respectivamente. O problema da M -partição consiste em decidir se um grafo de entrada G admite uma M -partição. Devido à dificuldade do problema da M -partição, este trabalho considera o problema quando restrito à classe dos cografos e quando a matriz M tem uma estrutura particular, a saber, quando $m = 4$ e $M(i, i) = 0$, para $i = 1, \dots, 4$. Caracterizamos todos os cografos que admitem uma M -partição com respeito à M .

Palavras Chave: Partição em grafos, M -partição, M -obstrução, Cografos-(4,0).
Área principal: TAG

ABSTRACT

In the M -partition problem it is given an $m \times m$ symmetric matrix M defined over $\{0, 1, *\}$. An M -partition of a given graph G is a partition of $V(G)$ into parts V_1, V_2, \dots, V_m such that for distinct vertices $u \in V_i, v \in V_j$, we have $uv \in E(G)$ if $M(i, j) = 1$, and $uv \notin E(G)$ if $M(i, j) = 0$. Note that we admit $i = j$; in particular, if $M(i, i) = 0$, the set V_i is an independent set in G , and if $M(i, i) = 1$, it is a clique. Also note that entries $M(i, j) = *$ or $M(i, i) = *$ mean that there is no restriction between parts i and j or in the part i , respectively. For each fixed matrix M , the M -partition problem consists of deciding whether or not an input graph G admits an M -partition. Given the difficulty of the M -partition problem, this work considers the problem when restricted to the class of cographs and when M has a particular structure, given by $m = 4$ and $M(i, i) = 0$, for $i = 1, \dots, 4$. We characterize cographs which admit an M -partition with respect to such matrix M .

Keywords: Graph Partition, M -partition, M -obstruction, Cographs-(4,0).
Main area: Graph Theory

1. Introdução

A teoria dos grafos tem se tornado cada vez mais importante devido a sua aplicação em diversas áreas científicas. Um problema bastante estudado em Teoria dos Grafos e com diversas aplicações práticas é o problema da k -coloração. O problema da coloração de grafos surgiu do famoso teorema das quatro cores e tem sido uma das principais áreas da teoria dos grafos por mais de 50 anos. Neste problema é dado um grafo G e um inteiro positivo k e o objetivo consiste em verificar se os vértices de G podem ser rotulados (coloridos) com no máximo k rótulos (cores) de forma que vértices adjacentes tenham rótulos (cores) distintos. Esse é um problema NP -completo para $k \geq 3$, conforme mostrado por Garey e Johnson (1979) e polinomial, caso contrário.

É fácil ver que o problema da k -coloração pode ser visto como um problema de particionamento em grafos onde, dado um grafo G e um inteiro positivo k , objetiva-se determinar se o conjunto de vértices de G pode ser particionado em (no máximo) k conjuntos independentes (i.e., nenhum vértice no conjunto é adjacente a outro vértice do mesmo conjunto).

Em geral, muitos problemas combinatórios podem ser vistos como um problema de partição em grafos onde, dado um grafo G , deseja-se particionar o conjunto de vértices de G em subconjuntos satisfazendo certas restrições internamente (pode-se, por exemplo, exigir que um determinado conjunto seja um conjunto independente ou uma clique) e externamente (pode-se exigir que dois conjuntos sejam completamente não adjacentes, i.e., nenhum vértice de um conjunto é adjacente a qualquer vértice do outro ou completamente adjacentes, i.e., cada vértice de um conjunto é adjacente a todos os vértices do outro).

Outro problema bastante conhecido de particionamento de grafos é verificar se um dado grafo G é split, ou equivalentemente, verificar se o conjunto dos vértices de G pode ser particionado em dois subconjuntos, dos quais um é independente e o outro é uma clique. O grafo split foi considerado inicialmente por Földes e Hammer (1977). O reconhecimento de grafos split pode ser realizado em tempo linear Golubic (2004).

Brandstädt propôs uma generalização dos grafos split, definindo uma nova classe de grafos, a classe dos *grafos*-(k, ℓ) como sendo aquela formada pelos grafos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos independentes e ℓ cliques. Brandstädt (1996, 1998) considerou em particular as classes de grafos-(2, 1), grafos-(1, 2) e grafos-(2, 2), apresentando algoritmos polinomiais para reconhecê-las. Feder *et al.* (1999) também apresentaram algoritmos polinomiais para o reconhecimento destas classes que surgiram como sub-produto de algoritmos de partição em subgrafos densos e esparsos. Por outro lado, sabe-se que reconhecer grafos-(k, ℓ) para $k \geq 3$ ou $\ell \geq 3$ é NP -Completo, Brandstädt (1996, 1998). Como por exemplo, podemos considerar a classe dos grafos-($k, 0$), que corresponde novamente ao problema de reconhecer se um dado grafo é k -colorível.

Com o intuito de reconhecer grafos-(k, ℓ), para $k \geq 3$ ou $\ell \geq 3$, alguns autores estudaram o problema quando restrito à subclasses de grafos. Hell *et al.* em 2004, apresentaram uma caracterização e um algoritmo de reconhecimento com complexidade $O(n(n + m))$ para os grafos cordais-(k, ℓ). Bravo *et al.* (2011, 2012) e Francisco *et al.* (2005) também apresentaram uma caracterização, bem como um algoritmo linear, para as classes dos cografos, dos grafos P_4 -esparsos e dos grafos P_4 laden estendidos.

Um problema ainda mais geral que o problema da k -coloração e que também generaliza os grafos-(k, ℓ) é o problema da M -partição que foi introduzido por Feder *et al.* (1999, 2003) como segue: Seja M uma matriz simétrica fixa de ordem $k \times k$ definida sobre $\{0, 1, *\}$. Uma M -partição do grafo G é uma partição do conjunto de vértices $V(G)$ em k subconjuntos (também chamados partes) A_1, A_2, \dots, A_k , tais que A_i é um conjunto independente se $M(i, i) = 0$, ou completo se $M(i, i) = 1$ (sem restrição se $M(i, i) = *$) e tal que A_i e A_j são completamente

não adjacentes se $M(i, j) = 0$, ou completamente adjacentes se $M(i, j) = 1$ (sem restrição se $M(i, j) = *$).

O problema da M -partição objetiva determinar se um dado grafo G admite uma M -partição. Este problema é NP-completo para grafos gerais, mas alguns pesquisadores, com o intuito de simplificar o problema, estudaram o mesmo quando restrito à classes específicas de grafos. Em Feder *et al.* (2007) mostraram que todos os problemas de partição (M -partição) quando restritos à classe dos cografos admitem algoritmos polinomiais e caracterizações por subgrafos induzidos proibidos. Em particular, eles limitam o tamanho da maior estrutura proibida minimal para os cografos- (k, ℓ) . Feder e Hell (2006) apresentaram um estudo ainda mais geral sobre problemas de partição (M -partição) quando restritos à classe dos grafos perfeitos.

Este trabalho considera o problema da M -partição quando restrito à classe dos cografos e quando M é uma matriz de ordem 4 com diagonal nula. Consideramos todas as possíveis matrizes que satisfaçam a estes critérios. Portanto, M é uma matriz de ordem 4 onde $M(i, i) = 0$, para $i = 1, \dots, 4$ e, para $i \neq j$, $M(i, j) \in \{0, 1, *\}$. Nosso resultado caracteriza os cografos que podem ser particionados em 4 conjuntos independentes e que respeitam as condições externas impostas pela matriz M . Mais precisamente, nosso resultado fornece uma caracterização por subgrafos proibidos para que um cografo admita tal M -partição. Tais subgrafos proibidos para uma determinada matriz M são também chamados de M -obstruções. Nosso objetivo é encontrar M -obstruções minimais dos cografos para a matriz M (conforme definida anteriormente).

Na literatura, Feder e Hell (2006), e Bravo, Protti, Nogueira e Viana (2012), determinaram as M -obstruções minimais para algumas subclasses dos grafos perfeitos, quando M também apresenta uma estrutura especial. Em particular, Feder e Hell (2005) apresentou uma caracterização por subgrafos proibidos para matrizes menores que 4. Além disso, em Bravo, Protti, Nogueira e Viana (2012) é apresentada uma caracterização dos cografos para matrizes de ordem no máximo três.

2. Preliminares

Dado um grafo simples $G = (V, E)$, denotamos por \bar{G} o complemento de G . Para $V' \subseteq V$, denotamos por $G[V']$ o subgrafo de G induzido por V' . Uma *clique* (*conjunto independente*) é um subconjunto de vértices que induz um subgrafo completo (sem arestas), não necessariamente maximal e denotada por K_p (I_p) uma clique (conjunto independente) de p vértices. G é um *grafo- (k, ℓ)* se V pode ser particionado em k conjuntos independentes e ℓ cliques.

Dados dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, o grafo $G_1 \cup G_2$ (chamado de *união* de G_1 e G_2) é um grafo com o conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ e conjunto de arestas $E_1 \cup E_2$, e o grafo $G_1 + G_2$ (chamado de *junção* de G_1 e G_2) é o grafo com o conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ e o conjunto de arestas $E_1 \cup E_2 \cup \{(x, y) \mid x \in V_1, y \in V_2\}$.

Definição 1: [Corneil *et al* (1981), Lerchs (1971), Spinrad *et al* (1999)] Um *cografo* é definido recursivamente, da seguinte forma:

- (i) K_1 é um cografo;
- (ii) Se G é um cografo então \bar{G} também é um cografo;
- (iii) Se G e H são cografos, então $G \cup H$ também é um cografo.

Um *caminho* num grafo G é um passeio $P = v_1, v_2, \dots, v_k$, onde os v_i 's são vértices (dois a dois distintos), e $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $1 \leq i \leq k - 1$. Uma *corda* em P é uma aresta que liga dois vértices não-consecutivos de P . Um *caminho induzido* é um caminho sem cordas, e denotado por P_k o caminho induzido com k vértices. Dizemos que um grafo é *livre de P_k* quando não contém P_k como subgrafo induzido. Um *cografo* G é um grafo livre de P_4 , isto é, G não contém P_4 como subgrafo induzido. A classe dos cografos possui muitas propriedades estruturais interessantes, e uma delas é a auto-complementariedade, isto é, G é um cografo

se e somente se \overline{G} é um cografo (condição (ii) da definição acima). Desta forma, podemos afirmar que G é um cografo- (k, ℓ) se e somente se \overline{G} é um cografo- (ℓ, k) .

O teorema que enunciaremos a seguir nos fornece uma informação importante sobre a estrutura dos cografos:

Teorema 2: [Jamison e Olariu (1995)] Para um cografo G , exatamente uma das seguintes condições é satisfeita:

- (i) G é desconexo;
- (ii) \overline{G} é desconexo.

3. Cografos- $(3, 0)$ com restrição externa

Nesta seção resumiremos todos os casos relacionados ao problema da M -partição para matrizes quadradas M de ordem $m = 3$. Usaremos a notação $(k, \ell)\{a_1^2, a_1^3, \dots, a_1^{k+\ell}, \dots, a_i^{i+1}, \dots, a_i^{k+\ell}\}$, $i = 1, \dots, k + \ell - 1$ para representar uma partição em k conjuntos independentes X_1, X_2, \dots, X_k e ℓ cliques $X_{k+1}, \dots, X_{k+\ell}$, onde cada a_i^j representa a restrição externa entre os conjuntos X_i e X_j . Observe que um grafo- $(k, \ell)\{a_1^2, a_1^3, \dots, a_1^{k+\ell}, \dots, a_i^{i+1}, \dots, a_i^{k+\ell}\}$ representa um grafo que admite uma M -partição onde M é uma matriz com k elementos nulos na diagonal principal, ℓ 1's na diagonal principal, com qualquer elemento fora da diagonal principal podendo pertencer ao conjunto $\{0, 1, *\}$.

No que segue utilizaremos as seguintes representações gráficas:

- Se $M(i, i) = 0$, então, V_i é um conjunto independente e será representado por um círculo vazio;
- Se $M(i, j) = 0$, então, V_i e V_j são completamente não adjacentes. Essa relação entre os conjuntos será representada por uma linha dupla;
- Se $M(i, j) = 1$, então, V_i e V_j são completamente adjacentes. Essa relação entre os conjuntos será representada por uma linha simples, e
- Se $M(i, j) = *$, então, não há nenhuma restrição sobre as arestas entre V_i e V_j , na literatura essa relação entre os conjuntos é representada por uma linha tracejada, mas neste trabalho optamos por omiti-la para simplificar o desenho.

Na Figura 1 são listadas todas as matrizes de ordem 3×3 referentes aos Casos $(3, 0)$ que serão necessários para estudarmos os casos- $(4, 0)$ com restrição externa.

Observe que o caso de verificar se um grafo G é $(3, 0)^{0,0,0}$ corresponde ao caso trivial de verificar se G é tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente (i.e, um grafo sem arestas). Note também que os casos de verificar se um grafo é $(3, 0)^{*,0,0}$ ou $(3, 0)^{*,*,0}$ ou $(3, 0)^{*,0,1}$ equivalem a verificar se o grafo é $(2, 0)^*$. Da mesma forma, verificar se um grafo é $(3, 0)^{0,1,1}$ equivale a verificar se o grafo é $(2, 0)^1$.

Apenas os casos $(3, 0)^{1,1,1}$, $(3, 0)^{*,*,*}$, $(3, 0)^{*,1,1}$, $(3, 0)^{1,*,*}$ e $(3, 0)^{1,0,0}$ são interessantes para análise, já que os demais casos podem ser reduzidos a alguns dos casos da matriz de ordem 2, como mostra a Figura 1 e que já foram estudados na seção 3.1. Na figura 2 listamos todos as obstruções minimais das matrizes listadas acima.

4. Resultado Principal

Nesta seção, consideramos o problema da M -partição para matrizes quadradas M de ordem $m = 4$ com diagonal nula e apresentamos uma caracterização dos cografos M -particionáveis

<p>Caso $(3,0)^{*,*,*}$</p> $M = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(3,0)^{1,1,1}$</p> $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(3,0)^{1,*,*}$</p> $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(3,0)^{*,1,1}$</p> $M = \begin{pmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(3,0)^{1,0,0}$</p> $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
<p>Caso $(3,0)^{0,1,1}$</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>Caso $(2,0)^1$</p>	<p>Caso $(3,0)^{*,*,0}$</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>Caso $(2,0)^*$</p>	<p>Caso $(3,0)^{*,0,1}$</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>Caso $(2,0)^*$</p>	<p>Caso $(3,0)^{*,0,0}$</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>Caso $(2,0)^*$</p>	<p>Caso $(3,0)^{0,0,0}$</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>Caso $(2,0)^0$</p>

Figura 1: Matrizes de ordem 3×3

<p>Caso $(3,0)^{*,*,*}$</p> <p>K_4</p>	<p>Caso $(3,0)^{1,1,1}$</p> <p>K_4 \bar{P}_3</p>	<p>Caso $(3,0)^{1,*,*}$</p> <p>K_4 $K_3 \cup K_2$</p>	<p>Caso $(3,0)^{*,1,1}$</p> <p>K_4 $K_3 \cup K_1$</p>	<p>Caso $(3,0)^{1,0,0}$</p> <p>K_3 $2K$</p>
--	---	--	--	--

Figura 2: Obstruções minimais de todos os casos $(3,0)$

em termos de M -obstruções, i.e., dado um cografo G e uma matriz simétrica M de ordem quatro com diagonal nula, nosso resultado exprime quando um cografo G admite uma M -partição.

Bravo, Protti, Nogueira e Viana (2012) apresentaram as M -obstruções para os cografos para matrizes M de ordem no máximo três. Neste trabalho consideramos o problema da 4-coloração com restrições externas, ou no contexto de M -partição, dado um cografo e uma matriz M de ordem 4 com diagonal nula desejamos verificar se o dado cografo admite uma M -partição, ou ainda equivalentemente, se pode ser particionado em quatro conjuntos independentes. Observe que permitimos a possibilidade de restrições externas entre as partes (conjuntos independentes). Neste caso, os elementos fora da diagonal principal podem ser $*$, 0 ou 1 . Lembremos que se $M_{i,j} = 0$ então as partes i e j devem ser completamente não adjacentes. Se $M_{i,j} = 1$ então as partes i e j devem ser completamente adjacentes. E, por fim, se a parte $M_{i,j} = *$, não há restrições entre as partes. A seguir, consideramos as partições oriundas de todas possíveis matrizes de ordem quatro com diagonal nula.

Nosso problema de M -partição também pode ser visto no contexto de grafos- (k, l) . No caso da nossa matriz M , teremos que reconhecer grafos $(4,0)$ com possíveis restrições externas.

Usaremos a notação $(k, 0)^{\{a_1^2, a_1^3, \dots, a_1^k, \dots, a_i^{i+1}, \dots, a_i^k, \dots, a_{k-1}^k\}}$, $i = 1, \dots, k - 1$ para representar uma M -partição em que M é uma matriz com k elementos nulos na diagonal principal, ou seja, uma partição em k conjuntos independentes: X_1, X_2, \dots, X_k , onde cada a_i^j representa a restrição externa entre os conjuntos X_i e X_j . No caso particular em que temos duas partes, por exemplo, $(2, 0)$, usamos a notação $(2, 0)^i$, $i = 0, 1, *$ para representar nenhuma aresta entre as duas partes, todas as arestas entre as duas partes ou sem restrição entre as duas partes, respectivamente. O caso $(4, 0)^{*,*,1,1,0,0}$ pode ser visto na Figura 3.

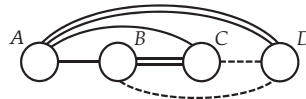


Figura 3: Exemplo da notação adotada para o caso $(4, 0)^{*,*,1,1,0,0}$.

Uma importante observação a ser feita é que algumas matrizes são equivalentes, i.e., correspondem a um mesmo problema de partição. Figura 4 contempla esta situação.

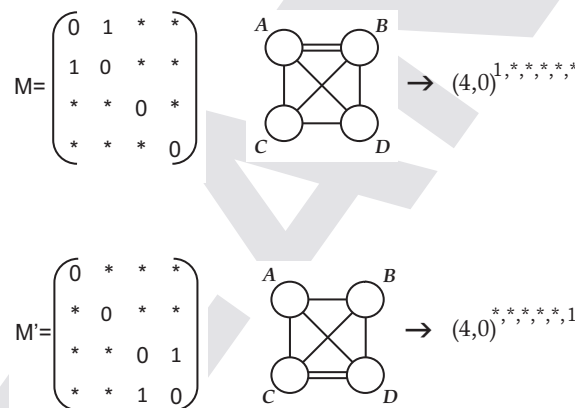


Figura 4: Casos equivalentes.

Encontramos outros casos em que algumas matrizes representam problemas de partição que podem ser reduzidos a casos menores, i.e., a problemas de partição de matrizes de ordem menor que quatro. Como exemplo, na Figura 5, pode-se mostrar que G admite uma $(4, 0)^{1,0,0,1,1,0}$ -partição, se e somente se, G admite uma $(2, 0)^1$ -partição.

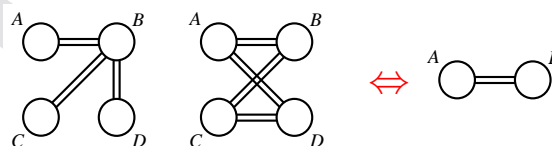


Figura 5: Partições que se reduzem ao caso $(2, 0)^1$.

É fácil ver que, como A, C, D são conjuntos independentes, não possuem arestas entre eles. Além disso, são completamente adjacentes a B , então podemos unir os conjuntos A, C, D e obteremos uma $(2, 0)^1$ -partição.

Recíprocamente, se G admite uma $(2, 0)^1$ -partição com partes A e B , então podemos particionar A em três subconjuntos independentes A', C', D' e obtemos uma $(4, 0)^{1,0,0,1,1,0}$ -partição.

A mesma análise pode ser feita para os demais casos, reduzindo-se a casos menores e não serão considerados aqui. Suas devidas caracterizações para cografos podem ser encontradas no trabalho de Bravo, Protti, Nogueira e Viana (2012).

Por fim, a Figura 6 representa todos os casos de matrizes de ordem quatro a menos de reduções e equivalências.

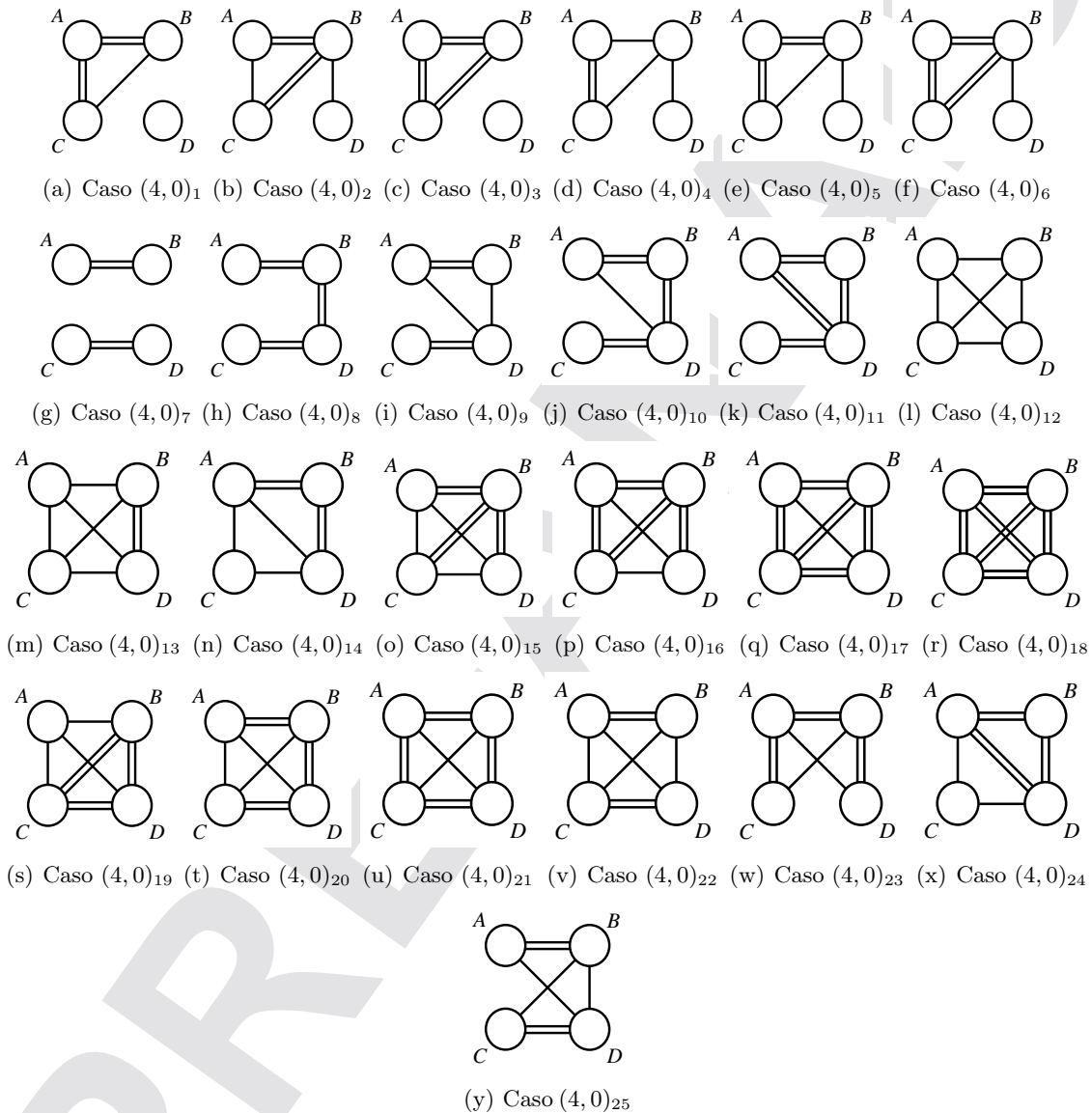


Figura 6: Possíveis M -partições em matrizes de ordem 4 não redutíveis e não equivalentes entre si.

For falta de espaço, não será possível provar todos os 25 casos existentes, e neste caso, provaremos apenas um dos casos. Vale ressaltar que assim como a prova do teorema abaixo, todos os outros casos são provados exatamente utilizando a estrutura dos cografos.

Teorema 1. *Seja G um cografo. G é um grafo $(4, 0)_{11}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 7 como subgrafo induzido.*

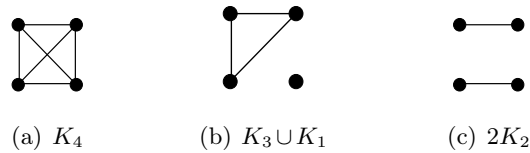


Figura 7: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)_{11}$.

Demonstração. A Figura 8 representa a M -partição $(4, 0)_{11}$.

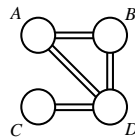


Figura 8: M -partição- $(4, 0)_{11}$.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 7 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4, 0)_{11}$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4, 0)_{11}$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4, 0)_{11}$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 7 como subgrafo induzido. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

(i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo. Se todos os G_i forem triviais temos que $V(G)$ forma um conjunto independente, logo G é $(4, 0)_{11}$, uma contradição. Portanto, existe pelo menos um G_i para $i = 1, 2, \dots, k$, tal que $|G_i| > 1$. Observe que G deve conter $2K_2$ ou K_3 como subgrafo induzido, caso contrário, G seria $(3, 0)^{1,0,0}$, caso encontrado no trabalho de Bravo, Protti, Nogueira e Viana (2012), e, assim, G seria $(4, 0)_{11}$, uma contradição. Se G contém $2K_2$ temos uma contradição da suposição inicial. Se G contém K_3 então G contém $K_3 \cup K_1$, já que G é desconexo. Absurdo!

(ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo.

- Se $k \geq 4$: Neste caso, G contém K_4 como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
- Se $k = 3$: $G = G_1 + G_2 + G_3$. Observe que nenhum G_i para $i = 1, 2, 3$ deve conter aresta, caso contrário, obtemos uma contradição do fato de G conter K_4 como subgrafo induzido. Neste caso, para cada G_i temos que $V(G_i)$ é um conjunto independente, conseqüentemente G é $(4, 0)_{11}$. Absurdo!
- Se $k = 2$: $G = G_1 + G_2$. Se ambos G_1 e G_2 contiverem aresta, então G contém K_4 como subgrafo induzido, o que é um absurdo. Se ambos G_1 e G_2 forem tais que $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são conjuntos independentes, então obteríamos uma contradição do fato de G ser $(4, 0)_{11}$. Logo, apenas um $V(G_i)$ para $i = 1, 2$ é independente, sem perda de generalidade, G_1 . Note que G_2 deve conter K_3 ou $2K_2$ como subgrafo induzido, caso contrário, G_2 seria $(3, 0)^{1,0,0}$, caso este encontrado no trabalho de Bravo, Protti, Nogueira e Viana (2012), e conseqüentemente G seria $(4, 0)_{11}$, o que nos levaria a uma contradição. Se G_2 contém $2K_2$ temos novamente uma contradição do fato de G conter $2K_2$. Se G_2 contém K_3 então G contém K_4 . Absurdo! □

5. Resumo de todos os Casos

Nas tabelas de 1 a 16 temos uma listagem geral dos 25 casos analisados e seus respectivos subgrafos proibidos. Por falta de espaço, omitiremos as provas dos outros casos.

Tabela 1: Subgrafos proibidos para os casos $(4,0)_1$, $(4,0)_2$, $(4,0)_5$, $(4,0)_{24}$ e $(4,0)_{25}$.

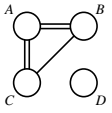
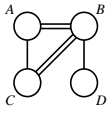
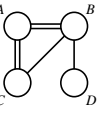


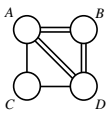
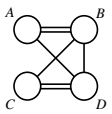
<i>M</i> -Partição			Subgrafos Proibidos	
Caso $(4,0)_1$	Caso $(4,0)_2$	Caso $(4,0)_5$	K_4	$K_3 \cup K_2$
				
Caso $(4,0)_{24}$	Caso $(4,0)_{25}$			
				

Tabela 2: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)_3$.

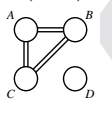



<i>M</i> -Partição	Subgrafos Proibidos		
Caso $(4,0)_3$	K_4	$K_1 + \overline{P}_3$	$2K_2$
			

Tabela 3: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)_4$.

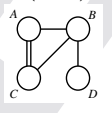

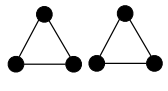
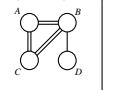


<i>M</i> -Partição	Subgrafos Proibidos	
Caso $(4,0)_4$	K_4	$2K_3$
		

Tabela 4: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)_6$.

<i>M</i> -Partição	Subgrafos Proibidos	
Caso $(4,0)_6$	K_4	$2K_2$
		

6. Conclusão

Neste trabalho, usamos fortemente a estrutura dos cografos para caracterizarmos por obstruções minimais todos os cografos- $(4,0)$ com restrição externa.

Tabela 5: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)_7$.




<i>M</i> -Partição	Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)_7$ 	K_3 	$2K_2 \cup K_1$ 

Tabela 6: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)_8$.




<i>M</i> -Partição	Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)_8$ 	K_3 	$2K_2$ 

Tabela 7: Subgrafos proibidos para os casos $(4, 0)_9$, $(4, 0)_{10}$ e $(4, 0)_{23}$.






<i>M</i> -Partição			Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)_9$ 	Caso $(4, 0)_{10}$ 	Caso $(4, 0)_{23}$ 	K_4 	$K_3 \cup K_1$ 

Tabela 8: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)_{11}$.





<i>M</i> -Partição	Subgrafos Proibidos		
Caso $(4, 0)_{11}$ 	K_4 	$K_3 \cup K_1$ 	$2K_2$ 

Tabela 9: Subgrafo proibido para o caso $(4, 0)_{12}$.



<i>M</i> -Partição	Subgrafo Proibido
Caso $(4, 0)_{12}$ 	K_5 

Tabela 10: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)_{13}$.



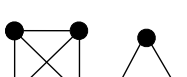
<i>M</i> -Partição	Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)_{13}$ 	K_5 	$K_4 \cup K_3$ 

Tabela 11: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)_{14}$.

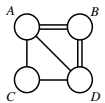
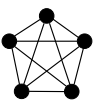
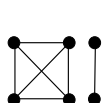
M -Partição	Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)_{14}$ 	K_5 	$K_4 \cup K_2$ 

Tabela 12: Subgrafos proibidos para os casos $(4, 0)_{15}$ e $(4, 0)_{16}$.



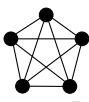
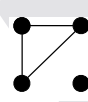
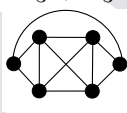
M -Partição		Subgrafos Proibidos		
Caso $(4, 0)_{15}$ 	Caso $(4, 0)_{16}$ 	K_5 	$K_3 \cup K_1$ 	$\overline{P_3} + \overline{P_3}$ 

Tabela 13: Subgrafos proibidos para os casos $(4, 0)_{17}$ e $(4, 0)_{21}$.





M -Partição		Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)_{17}$ 	Caso $(4, 0)_{21}$ 	K_5 	$K_3 \cup K_1$ 

Tabela 14: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)_{18}$.

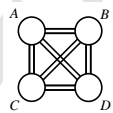
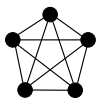
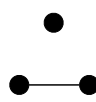



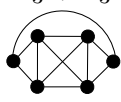
M -Partição	Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)_{18}$ 	K_5 	$\overline{P_3}$ 






Tabela 15: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)_{19}$.

M -Partição	Subgrafos Proibidos		
Caso $(4, 0)_{19}$ 	K_5 	$K_3 \cup K_2$ 	$\overline{P_3} + \overline{P_3}$ 

Referências

- [1] Bransdstädt, A. Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics* 152 (1996) 47 – 54.
- [2] Bransdstädt, A. The complexity of some problems related to graph 3-colorability. *Discrete Applied Mathematics* 89 (1998) 59 – 73.
- [3] Bravo, R. S. F., Klein, S., Nogueira, L. T., and Protti, Fábio Characterization

Tabela 16: Subgrafos proibidos para os casos $(4, 0)_{20}$ e $(4, 0)_{22}$.

M -partição		Subgrafos Proibidos		
Caso $(4, 0)_{20}$	Caso $(4, 0)_{22}$	K_5	$K_4 \cup K_1$	$K_3 \cup K_2$
				

and recognition of P_4 -sparse graphs partitionable into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics* 159 (2011) 165 – 173.

- [4] **Corneil, D. G., Lerchs, H., and Burlingham, L. S.** Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics* 3 (1981) 163 – 174.
- [5] **Feder, T., Hell, P., Klein, S., and Motwani, R.** List partitions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 16 (2003) 449 – 478.
- [6] **Feder, T., and Hell, P.** Matrix partitions of perfect graphs. Special Issue of *Discrete Mathematics*, 306 (2006) 2450 – 2460
- [7] **Feder, T., Hell, P., and Hochstättler, W.** Generalized Colouring (Matrix Partitions) of Cographs. *Trends in Mathematics* 2006 149 – 167
- [8] **Golumbic, M. C.** *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, New York, 1980.
- [9] **Hell, P., Klein, S., Nogueira, L. T., and Protti, F.** Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics* 141 (2004) 185 – 194.
- [10] **Jamison, B., Olariu, S.** p -components and the homogeneous decomposition of graphs *SIAM Journal Discrete Mathematics* 8 (1995) 448 – 463.
- [11] **Lerchs, H.** On cliques and kernels. Technical Report, Department of Computer Science, University of Toronto, March 1971.
- [12] **McConnell, R. M., and Spinrad, J. P.** Modular decomposition and transitive orientation. *Discrete Mathematics* 201 (1999) 189 – 241.
- [13] **Bravo, R., Nogueira, L., Protti, F., and Viana, C.** $M_{3 \times 3}$ -obstrução minimal de cografos. *SOBRAPO* (2014) 2986–2997.

PRELIMINARY