Problema do Arranjo Linear Mínimo

Rafael Castro de Andrade
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada - Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici, Bloco 910. CEP 60.455-900 - Fortaleza, Ceará - Brasil
rca@lia.ufc.br

Tibérius de Oliveira e Bonates
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada - Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici, Bloco 910. CEP 60.455-900 - Fortaleza, Ceará - Brasil
tb@lia.ufc.br

Mardson da Silva Ferreira
Programa de Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação - Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici, Bloco 910. CEP 60.440-900 - Fortaleza, Ceará - Brasil
mardsonferreira@lia.ufc.br

Manoel Bezerra Campêlo Neto
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada - Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici, Bloco 910. CEP 60.455-900 - Fortaleza, Ceará - Brasil
mcampelo@lia.ufc.br

RESUMO

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e não orientado de conjunto de vértices V e conjunto de arestas E. Dada uma atribuição de rótulos distintos em $\{1, \cdots, |V|\}$ aos vértices de G, para cada aresta $uv \in E$, definimos seu peso como sendo a diferença absoluta entre os rótulos atribuídos às suas extremidades. O problema do arranjo linear mínimo (MinLA) é encontrar uma rotulação dos vértices de G de modo que a soma dos pesos de suas arestas seja mínima. MinLA é um problema NP-Difícil cujo poliedro correspondente tem um número fatorial de pontos extremos. Neste artigo, investigamos um recente modelo quadrático para o MinLA com $\mathcal{O}(|V|^2)$ variáveis e $\mathcal{O}(|V|^2)$ restrições. Este modelo apresenta o menor número de variáveis e restrições dentre todos os modelos da literatura para o problema. Apresentamos alguns resultados teóricos para esse modelo quadrático, bem como mostramos como obter um modelo linear misto cuja solução ótima é a mesma do modelo quadrático. Propomos igualmente desigualdades válidas para os modelos propostos. Experimentos computacionais mostram que o novo modelo teve desempenho superior aos demais modelos conhecidos.

PALAVRAS CHAVE. Otimização combinatória, Programação matemática, Arranjo linear mínimo.

Área Principal: Programação Matemática, Otimização Combinatória.

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a simple and undirected graph of set of vertices V and set of edges E. Given an assignment of distinct labels in $\{1, \cdots, |V|\}$ to the vertices of G, for every edge $uv \in E$, we define its weight as the absolute difference between the labels given to their end nodes. The minimum linear arrangement problem (MinLA) consists in finding a labeling of the vertices of G such that the sum of the weights of its edges is minimized. MinLA is an NP-Hard problem whose corresponding polyhedron has a factorial number of extreme points. In this paper, we investigate a recent quadratic model for the MinLA featuring $\mathcal{O}(|V|^2)$ variables and $\mathcal{O}(|V|^2)$ constraints. This model has the smallest number of variables and constraints among all models in the literature for the problem. We present some theoretical results for this quadratic model, and show how to obtain a mixed linear model whose optimal solution is the same of the quadratic one. We also present valid inequalities for the proposed models. Computational experiments show that the new model has superior performance to other known models.

KEYWORDS. Combinatorial optimization, Mathematical programming, Minimum linear arrangement.

Main Area: Mathematical Programming, Combinatorial Optimization.

1. Introdução

Considere $G = (V, E)$ um grafo simples e não orientado de conjunto de vértices V e conjunto de arestas E. Dada uma atribuição de rótulos distintos em $\{1, \cdots, |V|\}$ aos vértices de G, para cada aresta $uv \in E$, definimos seu peso como sendo a diferença absoluta entre os rótulos atribuídos às suas extremidades. O problema do arranjo linear mínimo (MinLA) consiste em encontrar uma permutação $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{|V|}\}$ de $\{1, \cdots, |V|\}$ para os vértices de G, de modo a minimizar a expressão

$$\sum_{uv \in E} |\pi_u - \pi_v| \,. \tag{1}$$

O problema de MinLA é NP-Difícil e sua complexidade se mantém mesmo para grafos bipartidos (Garey et al., 1976). Entretanto, para algumas classes de grafos a solução ótima pode ser calculada em tempo polinomial (Schwarz, 2010). MinLA tem aplicações em diversas áreas de pesquisa como biologia, matemática e computação (Díaz et al., 2002).

Existem diversos estudos recentes sobre o problema de MinLA. (Seitz, 2010) propôs um modelo baseado em distância binária e a partir dele apresenta um interessante estudo poliédrico do problema. (Amaral, 2009) apresenta um modelo capaz de encontrar soluções ótimas do problema para grafos densos com até 23 vértices. (Moeini et al., 2014) propõem um modelo cujo interesse é de encontrar soluções relaxadas de boa qualidade. Uma visão geral de diferentes modelos para o MinLA pode ser encontrada em (Schwarz, 2010; Seitz, 2010). (Petit, 2003) analisou diferentes técnicas combinatórias para obter limites inferiores e superiores para o problema. Ele defende que as melhores aproximações foram encontradas usando uma meta-heurística conhecida como recozimento simulado.

Este artigo é uma evolução das ideias inicialmente introduzidas em (Andrade e Bonates, 2015). Neste trabalho, retomamos o estudo do modelo quadrático proposto nessa referência. Nossa principal contribuição foi de refinar a nova formulação quadrática, obtendo um modelo compacto misto que apresenta o menor número de variáveis e restrições para o problema. Propomos novas desigualdades válidas e mostramos, a partir de resultados numéricos sobre um conjunto de 20 instâncias, que nossa abordagem mostrou ser a mais eficiente em termos computacionais para lidar com esse problema.

O restante do texto é estruturado como segue. Na próxima seção introduzimos a nova formulação quadrática, apresentamos alguns resultados teóricos para ela e mostramos como obter um novo modelo linear misto para o problema. Na seção 3, propomos desigualdades válidas para o novo modelo linear. Na seção 4, relatamos os experimentos computacionais. Por fim, na seção 5, apresentamos uma breve conclusão e os trabalhos em curso sobre o problema.

2. Uma nova formulação quadrática

Seja $D = (V, A)$ um grafo direcionado obtido a partir de um grafo simples conexo $G = (V, E)$ com $A = \{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Observe que D é um digrafo completo. Considere $A(E) \subset A$ o conjunto de arcos de D onde $(u, v), (v, u) \in A(E) \Leftrightarrow uv \in E$. Seja π uma permutação de $\{1, \cdots, |V|\}$ atribuída aos vértices de D. Seja D_π o subdigrafo obtido de D de mesmo conjunto de vértices V e cujos arcos (u, v) pertencem a D_π se e somente se $\pi_v > \pi_u$. Em seu modelo, (Andrade e Bonates, 2015) definem variáveis binárias x_{uv}, para todo arco $(u, v) \in A$, em que

$$x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi_v > \pi_u, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{2}$$

e w_{uv} para todo arco $(u, v) \in A$, como sendo uma variável usada para estimar o peso de cada arco (u, v) de D. Utilizando tais variáveis, queremos encontrar um subdigrafo D_π cujos arcos sejam orientados segundo (2) e no qual a soma dos w_{uv} tais que $x_{uv} = 1$, com $uv \in E$, seja mínima.

Observação 2.1. *Todo grafo não direcionado $G = (V, E)$, com vértices rotulados por uma função $\ell : V \to \{1, 2, \cdots, |V|\}$, pode ser transformado em um digrafo $D_G = (V, A)$, onde uma aresta $uv \in E$ de G corresponde exatamente ao arco $(u, v) \in A$ se $\ell(v) > \ell(u)$, ou ao arco $(v, u) \in A$, caso contrário.*

O modelo quadrático proposto por (Andrade e Bonates, 2015) para o MinLA é dado por:

$$(P) \quad \min_{\pi,x,w} \sum_{(u,v)\in A(E)} w_{uv} x_{uv} \tag{3}$$

$$\text{s.a:} \quad x_{uv} + x_{vu} = 1 \qquad \forall\, (u, v) \in A \tag{4}$$

$$\pi_v - \pi_u \leq w_{uv} + |V|(1 - x_{uv}) \qquad \forall\, (u, v) \in A \tag{5}$$

$$\pi_v - \pi_u \geq w_{uv} - |V|(1 - x_{uv}) \qquad \forall\, (u, v) \in A \tag{6}$$

$$1 \leq \pi_v \leq |V| \qquad \forall\, v \in V \tag{7}$$

$$1 \leq w_{uv} \leq |V| - 1 \qquad \forall\, (u, v) \in A \tag{8}$$

$$x_{uv} \in \{0, 1\} \qquad \forall\, (u, v) \in A \tag{9}$$

As restrições (4) garantem que exatamente um dos arcos é selecionado entre todo par de vértices distintos u e $v \in V$. As restrições (5) e (6) estabelecem que se o arco (u, v) for escolhido, isto é, $x_{uv} = 1$, então $w_{uv} = \pi_v - \pi_u$. Caso contrário, ambas as restrições se tornam redundantes. As demais restrições representam os limites de cada variável. A seguir apresentamos alguns resultados teóricos sobre o modelo (P).

Teorema 2.1 (Andrade e Bonates, 2015)**.** *Dada uma solução viável (π, x, w) de (P), π é uma permutação de $\{1, 2, \cdots, |V|\}$. Além disso, as entradas não-zeros de x induzem um subdigrafo $D_\pi = (V, A_\pi)$ de $D = (V, A)$, com A definido como anteriormente, em que os arcos de A_π são orientados de acordo com* (2)*, sendo os rótulos dos vértices dados pelas variáveis π.*

Demonstração. Para todo arco $(u, v) \in A$ tal que $x_{uv} = 1$ temos, pelas restrições (5) e (6), que $w_{uv} + \pi_u = \pi_v$. Observe que não podemos ter $\pi_u = \pi_v$, pois implicaria $w_{uv} = 0$ com $x_{uv} = 1$, violando assim a restrição (8). Assim, para todo arco (u, v) com $x_{uv} = 1$, em qualquer solução viável existe uma diferença de pelo menos uma unidade entre π_u e π_v. Uma vez que D é um digrafo completo e, dados os limites em (7), as variáveis π devem ser todas de valores inteiros e correspondem a uma permutação de $\{1, 2, \cdots, |V|\}$. Para mostrar que a Observação 2.1 é válida para as entradas não-zeros de x, suponha que existe $u, v \in V$ com $x_{uv} = 1$ e $\pi_u > \pi_v$. Então, (5) e (6) implicam $\pi_v - \pi_u = w_{uv} < 0$, violando (8). $\square$

Corolário 2.1 (Andrade e Bonates, 2015). *Se (π^*, x^*, w^*) é uma solução ótima de (P), então π^* é uma solução ótima de MinLA.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.1, π^* é uma permutação de $\{1, 2, \cdots, |V|\}$ associada com os vértices em V. Além disso, como D é um digrafo completo, toda permutação de $\{1, 2, \cdots, |V|\}$ pode ser convertida em uma solução viável para (P). De modo a estabelecer a otimalidade de π^*, note que a expressão $\sum\limits_{(u,v)\in A(E)} w^*_{uv} x^*_{uv}$ em (3) é equivalente a $\sum\limits_{(u,v)\in A(E)|x^*_{uv}=1} w^*_{uv}$. Assim, o valor z da função objetivo (3) correspondendo a x^* é dado por

$$z = \sum_{(u,v)\in A(E)|x^*_{uv}=1} (\pi^*_v - \pi^*_u) \tag{10}$$

$$z = \sum_{(u,v)\in A(E)|x^*_{uv}=1} |\pi^*_v - \pi^*_u|, \tag{11}$$

Onde podemos partir de (10) para (11) porque a diferença entre os valores de π^* em cada termo é positiva. Portanto, π^* minimizando (11) também minimiza (1) e a prova está completa. □

Como descrito em (Andrade e Bonates, 2015), podemos linearizar o modelo (P) removendo as variáveis x da função objetivo (3) e assim obter o modelo linear inteiro misto (Q).

$$(Q) \quad \min_{\pi,x,w} \sum_{(u,v)\in A(E)} w_{uv} \tag{12}$$

s.a: (4) – (9).

Proposição 2.2 (Andrade e Bonates, 2015). *Toda solução ótima de (Q) é também uma solução ótima de (P).*

Demonstração. Seja (π^*, x^*, w^*) uma solução ótima de (Q). Nesse caso, π^* é uma permutação ótima de $\{1, 2, \cdots, |V|\}$ associada com os vértices em V. Devido ao sentido $(\min)$ da otimização, sempre que $x^*_{uv} = 0$ temos que a variável w^*_{uv} correspondente é fixa em seu limite inferior, isto é, em 1. Por outro lado, sempre que $x^*_{uv} = 1$ temos $w^*_{uv} = \pi^*_v - \pi^*_u$, imposto pelo par de restrições ativas (5) e (6). Afirmamos que (π^*, w^*) é também ótima para (3). Se não for o caso, uma solução ótima $(\bar{\pi}, \bar{x}, \bar{w})$ de (P) apresentaria um valor menor que o valor ótimo de (Q). Mas $(\bar{\pi}, \bar{x}, \bar{w})$ também seria viável para (Q), nesse caso teríamos $\bar{x}\bar{w} < x^* w^*$, contradizendo a otimalidade de (π^*, x^*, w^*) para (Q). □

Corolário 2.2 (Andrade e Bonates, 2015). *Se (π^*, x^*, w^*) é uma solução ótima de (Q), então π^* é uma solução ótima de (P) e o valor de sua solução ótima é*

$$\sum_{(u,v)\in A(E)} w^*_{uv} - |E|. \tag{13}$$

Demonstração. A prova do Corolário 2.2 parte do fato de que as variáveis não básicas em uma solução ótima de (Q) estão em seu limite inferior que é um. Observe que $|A(E)| = 2 \cdot |E|$ e por (4) somente um arco será escolhido para estar na solução. Assim, temos $|E|$ arcos relacionados às variáveis tais que $x^*_{uv} = 0$ e, consequentemente, $w^*_{uv} = 1$ em (Q). Ou seja, o somatório dos pesos dos arcos que não estão na solução é igual a $|E|$. Removendo tal valor daquele em (12), obtemos então o valor da solução ótima para (P). □

O modelo (Q) apresenta um menor número de variáveis e restrições que todos os modelos de programação inteira mista presentes na literatura para esse problema. Mais ainda, somente as variáveis x são restritas a serem inteiras, enquanto as restantes são contínuas. Tanto (P) quanto (Q) podem ser melhorados com o fato de que as restrições (5) podem ser substituídas por:

$$\pi_v - \pi_u \leq w_{uv}, \qquad \forall\,(u,v) \in A \tag{14}$$

enquanto as restrições (8) podem ser fortalecidas quando substituídas por:

$$1 \leq w_{uv} \leq (|V| - 2)x_{uv} + 1, \qquad \forall\,(u,v) \in A \tag{15}$$

levando a um novo modelo (Q) dado por:

$$\min_{\pi,x,w} \sum_{(u,v)\in A(E)} w_{uv} \tag{16}$$

s.a: (4), (6), (7), (9), (14), (15).

3. Desigualdades válidas

Nesta seção apresentamos algumas desigualdades válidas propostas por (Andrade e Bonates, 2015) para os modelos aqui propostos, bem como introduzimos outras novas.

Proposição 3.1 (Andrade e Bonates, 2015)**.** *Seja d_v o grau do vértice v em G. Um limite inferior para a soma dos pesos dos arcos de cada vértice v é*

$$\sum_{(u,v)\in A(E)} w_{uv} + \sum_{(v,u)\in A(E)} w_{vu} \geq d_v + \left\lfloor \frac{(d_v+1)^2}{4} \right\rfloor, \quad \forall\, v \in V. \tag{17}$$

Demonstração. Note que $2d_v$ arcos são adjacentes a cada vértice $v \in V$ em D e que em toda solução viável de (Q) temos d_v variáveis w associadas às variáveis x em que $x_{uv} = 0$ e $w_{uv} = 1$. O resultado segue de um limite inferior similar (veja (Seitz, 2010), pág.35) para a soma dos pesos das arestas em cada vértice v no grafo original G. □

Observe que somando os limites acima para todos os vértices $v \in V$ na Proposição 3.1 e dividindo o resultado por dois (cada arco é considerado duas vezes), obtemos um limite inferior válido para a solução de (Q).

Proposição 3.2 (Andrade e Bonates, 2015)**.** *Seja p o maior número natural tal que $\sum_{i=1}^{p}(|V|-i) \leq |E|$ e $\bar{p} = |E| - \sum_{i=1}^{p}(|V|-i)$. Um limite inferior para o valor da solução ótima z de (Q) é*

$$z \geq |E| + \sum_{i=1}^{p}(|V|-i)i + \bar{p}(p+1). \tag{18}$$

Demonstração. A proposição acima segue do fato de que em toda solução viável de (Q) temos $|E|$ variáveis w correspondentes às componentes nulas de x nos seus limites inferiores e de um resultado equivalente (veja (Seitz, 2010), pág.35) para a soma dos pesos das arestas no grafo original G. □

Proposição 3.3 (Andrade e Bonates, 2015)**.** *Uma restrição trivial para (Q) é*

$$\sum_{v\in V} \pi_v = |V|(|V|+1)/2. \tag{19}$$

Proposição 3.4 (Andrade e Bonates, 2015)**.** *Um limite válido para π_v, para todo $v \in V$ é*

$$\pi_v \geq 1 + \sum_{(u,v) \in A} x_{uv}. \tag{20}$$

Demonstração. Segue do fato de que π_v deve ser pelo menos uma unidade maior que o rótulo de qualquer vértice cujos arcos apontam para v. Nesse caso, a soma das variáveis que chegam no vértice v é um limite inferior para π_v. □

Proposição 3.5. *Seja $T \subseteq D$ tal que T é uma tripla formada pelos vértices u, v e k. As seguintes desigualdades triangulares são válidas para o modelo (Q):*

$$x_{uv} + x_{vk} + x_{ku} \leq 2, \qquad \forall \{u, v, k\} \subseteq V, \tag{21}$$

$$x_{uk} + x_{kv} + x_{vu} \leq 2, \qquad \forall \{k, v, u\} \subseteq V. \tag{22}$$

Demonstração. Suponha que $x_{uv} + x_{vk} + x_{ku}$ é estritamente maior que 2, isto é, x_{uv}, x_{vk}, x_{ku} são todas iguais a 1. Pela definição de x temos que $\pi_v > \pi_u$, $\pi_k > \pi_v$ e $\pi_u > \pi_k$, o que é um absurdo. Portanto, tem-se que no máximo duas variáveis de (21) podem assumir o valor 1. A prova de (22) segue o mesmo princípio. □

Proposição 3.6. *A igualdade a seguir é válida para (Q):*

$$\sum_{(u,v) \in A | x_{uv}=1} w_{uv} + \sum_{(u,v) \in A | x_{uv}=0} w_{uv} = \frac{|V|(|V|-1)(|V|+4)}{6}. \tag{23}$$

Demonstração. Seja S_1 a soma de w_{uv} quando $x_{uv} = 0$. Observe que em toda solução viável de (Q), temos $|A|/2$ variáveis w com valor 1, isto é, $|V|(|V|-1)/2$ variáveis w correspondente às variáveis x nulas. Então, $S_1 = |V|(|V|-1)/2$. Seja S_2 a soma das variáveis w_{uv} quando $x_{uv} = 1$. Como D é completo, então S_2 pode ser expressa como:

$$1 \times (|V| - 1) + 2 \times (|V| - 2) + \cdots + (|V| - 1) \times 1$$

Considere $|V| = n$. Daí temos que:

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} (i \cdot n - i^2) = n \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\
&= n \left[\left(\sum_{i=1}^{n} i \right) - n \right] - \left[\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 \right) - n^2 \right] \\
&= n \left[\frac{n(n+1)}{2} - n \right] - \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2 \right] \\
&= \left(\frac{n^3 - n^2}{2} \right) - \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n - 6n^2}{6} \right) \\
&= \frac{n^3 - n}{6}
\end{aligned}$$

Para finalizar a prova, basta somar S_1 e S_2 e assim obter (23) em função de n:

$$S_1 + S_2 = \left(\frac{n^2 - n}{2} \right) + \left(\frac{n^3 - n}{6} \right) = \frac{n(n-1)(n+4)}{6}$$

□

Proposição 3.7. *A igualdade abaixo é valida para o modelo* (Q)*:*

$$\pi_u + \sum_{(u,v)\in A} x_{uv} = |V|, \quad \forall u \in V. \tag{24}$$

Demonstração. Seja u um vértice qualquer de D_π. Observe que por (2), temos que se $x_{uv} = 1$, então $\pi_v > \pi_u$, $\forall (u,v)$ de D_π. Além disso, $\sum_{(u,v)\in A | x_{uv}=1} x_{uv}$ define o número de arcos que partem de u, tal que $\pi_v > \pi_u$, $\forall v \in V$, isto é, a quantidade de rótulos π_i, $i \in \{1, \cdots, |V|\}$ e $i \neq u$, que são estritamente maiores que π_u em D_π. Como toda solução viável de (Q) é uma permutação π de $\{1, \cdots, |V|\}$, então o somatório dos arcos partindo de u mais π_u é igual a $|V|$ para todo $u \in V$. □

Proposição 3.8. *A restrição seguinte é válida para o modelo* (Q)*:*

$$\pi_u - \sum_{(v,u)\in A} x_{vu} = 1, \quad \forall u \in V. \tag{25}$$

Demonstração. A prova é semelhante à demonstração da Proposição 3.7. Considere u um vértice arbitrário de D_π. Note que para todo arco (v,u) em D_π, $\pi_v < \pi_u$. Além disso, $\sum_{(v,u)\in A | x_{vu}=1} x_{vu}$ corresponde ao número de arcos que chegam em u, tal que $\pi_v < \pi_u$, $\forall v \in V$, isto é, a quantidade de rótulos π_i, $i \in \{1, \cdots, |V|\}$ e $i \neq u$, que são estritamente menores que π_u em D_π. Então, π_u menos o somatório dos arcos que chegam em u é igual a 1 para todo $u \in V$. □

Proposição 3.9. *Para todo* $(u,v) \in A$ *temos que*

$$w_{uv} + \sum_{(t,u)\in A | t\neq u} x_{tu} \leq |V|. \tag{26}$$

Demonstração. Sabemos, pela Proposição (3.4), que o rótulo π_u de um vértice u é pelo menos $1 + \sum_{(t,u)\in A|t\neq u} x_{tu}$. Assim, o peso de todo arco saindo de u seria no máximo $|V| - \left(1 + \sum_{(t,u)\in A|t\neq u} x_{tu}\right) + 1$, onde essa unidade extra refere-se às variáveis w não básicas associadas ao vértice cujo valor do rótulo é $|V|$, sendo que esse limite permanece válido para os demais vértices. □

As Proposições de (3.5) a (3.9) são resultados novos e somam-se aos de (Andrade e Bonates, 2015). Doravante, quando falarmos no modelo (Q), entenda-se o novo modelo (Q) acrescido das desigualdades referentes às mesmas.

4. Experimentos computacionais

Neste artigo, comparamos o modelo (Q) com outros dois, propostos por (Amaral, 2009) e (Moeini et al., 2014), denotados aqui por (A) e (M), respectivamente. A implementação dos algoritmos exatos deste trabalho faz uso do pacote de otimização ILOG CPLEX® versão 12.6.1. Neste pacote está presente a biblioteca denominada Concert Technology, que permite o desenvolvimento de modelos matemáticos utilizando a linguagem de programação C++. Os experimentos realizados foram executados utilizando uma máquina com processador Intel Core i7 de oito núcleos de 3.40 GHz, 16.0 GB de memória RAM e sistema operacional Linux 14.04 LTS de 64 bits.

As instâncias são divididas em duas classes: I_B, *benchmark* apresentadas em (Amaral, 2009) e I_A, novas instâncias geradas aleatoriamente. As instâncias I_B foram criadas a partir de um conjunto de matrizes propostas por (Nugent et al., 1968), disponíveis em (Burkard et al., 1997), sendo construídas como segue: seja Nug a matriz em construção, n sua dimensão e D um *grid* retangular preenchido com números inteiros distintos de 1 até n; temos que: $Nug[i,j] \leftarrow M(D_i -$

D_j) com $i, j = 1, \cdots, n$, onde M corresponde à distância de *Manhattan*[1]. As matrizes propostas por (Nugent et al., 1968) possuem dimensões 20×20 e 30×30. As matrizes com dimensões 12, 15, 16 e 17, apresentadas na Tabela 1, foram obtidas removendo-se as últimas linhas e colunas da matriz Nug de dimensão 20. O mesmo processo foi aplicado na matriz Nug de dimensão 30 para obter a de 23.

Uma vez criada as matrizes de *Nugent*, as instâncias da classe I_B são construídas da seguinte maneira: seja A uma matriz de saída, k um valor obtido de forma aleatória entre os elementos de Nug; para cada linha i, coluna j da matriz Nug, se $i = j$, $A[i, j] \leftarrow 0$; se $i \neq j$, então: $A[i, j] \leftarrow 0$ se $Nug[i, j]$ for igual a k, e $A[i, j] \leftarrow 1$ caso contrário. Por fim, as instâncias da classe I_A são construídas da seguinte forma: seja A a matriz em construção e den a densidade do grafo que se deseja gerar; inicialmente, A é preenchida aleatoriamente com valores reais entre 0 e 1; para cada linha i em A, $A[i, i] \leftarrow 0$; para cada coluna $j \leftarrow i + 1$ em A, verificamos se $A[i, j]$ é maior que den; em caso afirmativo, $A[i, j] \leftarrow 1$, caso contrário $A[i, j] \leftarrow 0$, sendo que $A[j, i] \leftarrow A[i, j]$ de modo a obtermos uma matriz simétrica.

As Tabelas 1 e 2 detalham os resultados obtidos nos experimentos computacionais. Nelas, n, m e z denotam, nessa ordem, o número de vértices, o número de arestas e a solução ótima de uma determinada instância, enquanto $t(s)$ representa o tempo de execução (em segundos) do CPLEX para cada modelo. As tabelas indicam igualmente o número de iterações $iter$, que denota a quantidade total de iterações do CPLEX para resolver as instâncias e o de nós *bb* avaliados na árvore de B&B do CPLEX. O modelo misto (12) anterior à adição das novas restrições era ineficiente até mesmo para as instâncias da classe I_A, então optamos por não reportar os resultados computacionais para esse modelo. Em nossos experimentos, encontramos uma inconsistência no relato dos testes computacionais feito por (Amaral, 2009). Observamos que o valor da solução ótima das instâncias com 16 e 17 vértices foram reportados incorretamente. Na Tabela 1 esses valores foram corrigidos.

Analisando os dois conjuntos de instâncias em relação ao tempo de execução, notamos que o modelo (Q) foi melhor que o modelo (A) em todas as instâncias. Em apenas uma instância, terceira tupla da Tabela 1, o tempo de execução do modelo (M) foi menor que o do modelo (Q). Somente em uma das instâncias, quarta tupla da Tabela 1, os tempos de execução de ambos os modelos (M) e (Q) foram equivalentes. Quanto ao número de subproblemas (*bb*) resolvidos pelo B&B do CPLEX, em todas as instâncias o número de nós resolvidos pelo modelo (A) foi menor que o do modelo (Q). Em 18 instâncias o número de nós resolvidos pelo modelo (Q) foi menor que o do modelo (M). Em apenas 2 instâncias o número de nós resolvidos pelo modelo (M) foi menor que o do modelo (Q). Já em termos de número de iterações ($iter$), em 7 instâncias o número de iterações do modelo (Q) foi menor que o do modelo (A). Nas outras 13 instâncias o número de iterações do modelo (A) foi menor que o do modelo (Q). Em 17 instâncias o número de iterações do modelo (Q) foi menor que o do modelo (M). Em somente 3 instâncias o número de iterações do modelo (M) foi menor que o do modelo (Q).

Tabela 1: Resultados - instâncias da classe I_B.

Instância			***(A)***			***(M)***			***(Q)***		
n	***m***	***z***	***bb***	***iter***	***t(s)***	***bb***	***iter***	***t(s)***	***bb***	***iter***	***t(s)***
12	61	241	0	8	4	57	4,240	1	28	4,620	0
15	97	474	0	9	15	1,619	197,261	18	836	170,749	3
16	116	629	6	366,065	937	150	5,554	2	639	201,245	3
17	131	748	5	321,741	1,300	262	16,881	5	574	190,723	5
20	170	1,076	8	4,733,536	84,120	107,190	10,825,888	5,826	10,143	3,343,838	139
23	221	1,581	3	452,931	8,929	*	*	*	321,554	95,474,437	5,981

[*] Execução abortada por falta de memória no PC.

[1] `http://arxiv.org/abs/1208.5150`

Tabela 2: Resultados - instâncias da classe I_A.

Instância			(A)			(M)			(Q)		
n	*m*	*z*	*bb*	*iter*	*t(s)*	*bb*	*iter*	*t(s)*	*bb*	*iter*	*t(s)*
10	34	100	0	13,911	7	6,564	254,884	8	233	15,049	1
10	36	108	0	10,066	3	1,485	48,310	2	94	8,371	0
10	33	100	0	24,632	9	11,428	430,498	11	701	28,663	0
10	34	98	0	1,137	2	3,039	96,913	3	120	9,543	0
10	25	64	29	107,932	38	12,782	591,228	13	4,050	123,793	2
10	31	84	0	16,792	9	1,621	59,449	3	467	24,577	0
10	25	64	13	91,482	24	16,543	771,751	16	4,332	168,918	1
10	22	54	21	100,728	28	13,420	694,767	14	4,661	126,023	1
10	15	30	24	155,420	40	10,507	427,863	10	1,479	58,784	1
10	20	43	0	43,585	15	10,986	505,198	12	2,012	80,289	1
10	14	27	23	83,820	23	7,866	420,430	8	1,838	87,498	1
10	14	29	23	137,612	36	15,841	1,032,202	18	2,708	94,695	1
10	10	17	0	51,985	20	1,816	92,542	2	1,268	76,638	1
10	12	21	9	23,718	8	2,217	124,721	3	876	50,854	0

5. Conclusão

Neste artigo, implementamos e validamos o modelo quadrático proposto por (Andrade e Bonates, 2015) para o problema do arranjo linear mínimo. Esse modelo apresenta o menor número de variáveis e restrições que qualquer outro modelo presente na literatura do MinLA. Melhoramos o novo modelo misto com a introdução de novas desigualdades válidas para o problema. Por fim, realizamos alguns experimentos computacionais com o novo modelo e comparamos com outros dois presentes na literatura. Experimentos computacionais realizados em uma bateria de 20 instâncias de densidades variadas mostram que, de uma forma geral, o novo modelo (Q) proposto mostrou melhor desempenho que os demais modelos. Como trabalhos futuros, estamos desenvolvendo um algoritmo de *Branch-and-Bound* especializado para o modelo (Q) e estudando novas desigualdades válidas para melhorar ainda mais a relaxação linear desse modelo.

Referências

Amaral, A. R. S. (2009). A mixed 0-1 linear programming formulation for the exact solution of the minimum linear arrangement problem. *Optimization Letters*, 3(4):513–520.

Andrade, R. e Bonates, T. O. (2015). New insights on minimum linear arrangements. *Working paper at Universidade Federal do Ceará, Departamento de Estatística e Matemática.*

Burkard, R. E., Karisch, S. E., e Rendl, F. (1997). Qaplib–a quadratic assignment problem library. *Journal of Global optimization*, 10(4):391–403.

Díaz, J., Petit, J., e Serna, M. (2002). A survey of graph layout problems. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 34(3):313–356.

Garey, M. R., Johnson, D. S., e Stockmeyer, L. (1976). Some simplified NP-complete graph problems. *Theoretical computer science*, 1(3):237–267.

Moeini, M., Gueye, S., e Loyal, S. M. (2014). A new mathematical model for the minimum linear arrangement problem. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Operations Research and Enterprise Systems*, pages 57–62.

Nugent, C. E., Vollmann, T. E., e Ruml, J. (1968). An experimental comparison of techniques for the assignment of facilities to locations. *Operations research*, 16(1):150–173.

Petit, J. (2003). Experiments on the minimum linear arrangement problem. *J. Exp. Algorithmics*, 8.

Schwarz, R. (2010). *A branch-and-cut algorithm with betweenness variables for the linear arrangement problem*. PhD thesis, Heidelberg University, Faculty of Mathematics and Informatics, Heidelberg, Germany.

Seitz, H. (2010). *Contributions to the minimum linear arrangement problem*. PhD thesis, Heidelberg University, Natural Sciences and Mathematics Faculty, Heidelberg, Germany.