

O Número Envoltório de Prismas Complementares na Convexidade Geodética

Erika M. M. Coelho, Hebert Coelho, Julliano R. Nascimento

Instituto de Informática

Universidade Federal de Goiás, GO, Brasil

{erikamorais,hebert,jullianorosanascimento}@inf.ufg.br

Jayme L. Szwarcfiter

IM, COPPE, and NCE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia, RJ, Brasil

jayme@nce.ufrj.br

RESUMO

Na convexidade geodética, um conjunto de vértices S de um grafo G é *convexo* se todos os vértices de todo caminho mínimo entre dois vértices de S pertencem a S . O *fecho convexo* $H[S]$ de S é o menor conjunto convexo contendo S . Se $H[S] = V(G)$, então S é um *conjunto envoltório* de G . A cardinalidade $h(G)$ de um conjunto envoltório mínimo em G é o *número envoltório* de G . O prisma complementar $G\bar{G}$ de G é o grafo da união disjunta de $G \cup \bar{G}$, adicionando arestas para um emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes de G e \bar{G} . Motivados pelo trabalho de [Duarte, 2015], apresentamos o número envoltório de prismas complementares de árvores e de grafos desconexos com pelo menos duas componentes não triviais. Também mostramos que o número envoltório em prismas complementares pode ser ilimitado na convexidade geodética, ao contrário da convexidade P_3 .

PALAVRAS CHAVE. Convexidade geodética, Número envoltório, Prismas complementares.

Área principal: Teoria dos Grafos.

ABSTRACT

In the geodetic convexity, a set of vertices S of a graph G is *convex* if all vertices belonging to any shortest path between two vertices of S lie in S . The *convex hull* $H[S]$ of S is the smallest convex set containing S . If $H[S] = V(G)$, then S is a *hull set*. The cardinality $h(G)$ of a minimum hull set of G is the *hull number* of G . The complementary prism $G\bar{G}$ of a graph G arises from the disjoint union of the graph $G \cup \bar{G}$ by adding the edges of a perfect matching between the corresponding vertices of G and \bar{G} . Motivated by the work of [Duarte, 2015], we present the hull number of complementary prisms of trees and of disconnected graphs with at least two nontrivial components. We also show that the hull number on complementary prisms is unlimited in the geodetic convexity, unlike the P_3 -convexity.

KEYWORDS. Geodetic convexity, Hull number, Complementary Prisms.

Main area: Graph Theory.

1. Introdução

O estudo de convexidade em grafos iniciou-se na década de 70, com os trabalhos de [Moon, 1972; Erdős et al., 1972; Varlet, 1976]. Desde então, este tópico recebeu ampla atenção por encontrar aplicações em diversos contextos, notadamente nos que envolvem algum tipo de propagação entre as entidades, tais como estratégias de marketing, [Domingos e Richardson, 2001], divulgação de opinião, [Dreyer e Roberts, 2009], contaminação, [Bollobás, 2006] e computação distribuída, [Peleg, 2002].

Consideramos aqui grafos simples, não-direcionados e finitos. Dado um grafo G , um conjunto \mathcal{C} de subconjuntos de $V(G)$ é uma *convexidade* sobre $V(G)$ se $\emptyset, V(G) \in \mathcal{C}$ e \mathcal{C} é fechado sobre interseções. Os elementos de \mathcal{C} são chamados *conjuntos convexos*. O *fecho convexo* de algum conjunto S , com relação à alguma convexidade \mathcal{C} , é o menor conjunto convexo $H_{\mathcal{C}}[S] \in \mathcal{C}$ contendo S .

As convexidades mais usuais são definidas através de um conjunto \mathcal{P} de caminhos em grafos. Neste caso, um subconjunto $C \subseteq V(G)$ é convexo precisamente quando C contém todos os vértices pertencentes aos caminhos de \mathcal{P} cujos vértices extremos estão também em C . Quando \mathcal{P} é o conjunto de todos os caminhos mínimos em G então C é a *convexidade geodética*, [Dourado et al., 2009, 2013; Everett e Seidman, 1985; Harary et al., 1981]. Quando \mathcal{P} é a coleção de todos os caminhos induzidos de G , então C é a *convexidade monofônica*, [Dourado et al., 2010; Duchet, 1988]. Quando \mathcal{P} é o conjunto de todos os caminhos de comprimento dois entre dois vértices, então C é a *convexidade P_3* , [Barbosa et al., 2012; Centeno et al., 2011; Coelho et al., 2014, 2015; Duarte et al., 2015; Penso et al., 2015].

Nosso trabalho terá seu enfoque considerando \mathcal{C} a convexidade geodética. Dado um grafo G , o *intervalo fechado* entre dois vértices $u, v \in V(G)$ é o conjunto $I[u, v]$ de todos os vértices pertencentes a todo caminho mínimo entre u e v . Se $S \subseteq V(G)$, então $I[S]$ é a união de todos $I[u, v]$ para $u, v \in S$. Dizemos que $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto convexo*, se $I[S] = S$.

Para um conjunto S de vértices em um grafo G , seja $I^0[S] = S$, $I^1[S] = I[S]$ e $I^k[S] = I[I^{k-1}[S]]$ para $k \geq 2$. A partir de algum termo p , a sequência será constante, quando $I^p[S] = I^{p+1}[S]$ obtém-se o *fecho convexo* de S denotado por $H_{\mathcal{C}}[S]$. Como trabalharemos apenas com a convexidade geodética \mathcal{C} , omitiremos o subscrito \mathcal{C} da notação. Se $H[S] = V(G)$, então S é chamado *conjunto envoltório* de G . A cardinalidade $h(G)$ do menor conjunto envoltório de G é o *número envoltório* de G .

Os prismas complementares foram introduzidos por [Haynes et al., 2007], como uma variação do conhecido prisma de um grafo, [Hammack et al., 2011]. Para um grafo G com conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e conjunto de arestas $E(G)$, o *prisma complementar* $G\bar{G}$ de G é o grafo com conjunto de vértices $V(G\bar{G}) = \{v_1, \dots, v_n\} \cup \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ e conjunto de arestas

$$E(G\bar{G}) = E(G) \cup \{\bar{v}_i\bar{v}_j : 1 \leq i < j \leq n \text{ e } v_i v_j \notin E(G)\} \cup \{v_1\bar{v}_1, \dots, v_n\bar{v}_n\}.$$

Sendo G um grafo e \bar{G} o seu complemento, para cada vértice $v \in V(G)$ denotamos o vértice $\bar{v} \in V(\bar{G})$ como o seu *vértice correspondente*. Em outras palavras, o prisma complementar $G\bar{G}$ de G é o grafo formado a partir da união disjunta de G e seu complemento \bar{G} , adicionando as arestas para um emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes de G e \bar{G} .

[Everett e Seidman, 1985] introduziram o conceito de número envoltório, caracterizando grafos com valores particulares de $h(G)$ e também mostrando limites inferiores e superiores para $h(G)$. [Cagaanan e Canoy, 2004] demonstraram o número envoltório do produto Cartesiano de dois grafos conexos. [Hernando et al., 2005] mostraram o número envoltório de caminhos, ciclos, grafos completos, árvores, rodas, bipartidos completos e hipercubos. [Dourado et al., 2009] apresentaram algoritmos de tempo polinomial para computar $h(G)$ quando G é um grafo de intervalo unitário, um cografo ou um grafo split. [Duarte, 2015] estudou o número envoltório em prismas complementares de classes elementares de grafos, em especial, os completos, caminhos e ciclos. Se tratando de

complexidade, [Dourado et al., 2009] mostraram que, dado um grafo G e um inteiro k , é NP-completo decidir se $h(G) \leq k$, e [Araujo et al., 2013] mostraram que o mesmo problema é NP-completo ainda restrito aos grafos bipartidos.

Vale ressaltar que os estudos de número envoltório também foram estendidos para outras convexidades, como por exemplo a convexidade P_3 . [Centeno, 2012] determinou o número envoltório P_3 para os caminhos, ciclos, grafos completos e cografos, apresentou um algoritmo de tempo polinomial para computar o número envoltório P_3 de árvores e demonstrou que, dado um grafo G e um inteiro k , é NP-completo decidir se o número envoltório P_3 de G é menor ou igual a k . [Duarte et al., 2015] também consideraram prismas complementares $G\bar{G}$ na convexidade P_3 , mostrando resultados sobre o número envoltório P_3 quando G é desconexo, quando G e \bar{G} são ambos conexos e quando G é uma árvore.

A motivação do nosso trabalho parte das questões deixadas em aberto por [Duarte, 2015], que se referem ao estudo do número envoltório geodético dos prismas complementares $G\bar{G}$ para G em outras classes de grafos. Mostramos resultados sobre o número envoltório em prismas complementares $G\bar{G}$ quando G é uma árvore e G é desconexo com pelo menos duas componentes não triviais. Também demonstramos que, diferentemente da convexidade P_3 em que o número envoltório para prismas complementares de grafos conexos é limitado a 5, [Duarte et al., 2015], na convexidade geodética, o número envoltório para prismas complementares de grafos G e \bar{G} ambos conexos pode ser ilimitado. Na Seção 2, alguns conceitos básicos de grafos são revistos. A Seção 3 contém nossos resultados e a Seção 4 contém algumas sugestões de trabalhos futuros.

2. Conceitos Fundamentais

Esta seção contém mais algumas definições e terminologias fundamentais utilizadas ao longo do artigo.

Dado um grafo G , a *distância* $d_G(u, v) = d(u, v)$ entre dois vértices $u, v \in V(G)$ é o comprimento de um caminho mínimo entre u e v em G . Quando não existir um caminho, $d(u, v)$ é considerada infinita. A *vizinhança aberta* de um vértice v , denotada por $N_G(v)$, ou simplesmente por $N(v)$ caso não haja ambiguidade, é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v no grafo G . A vizinhança de um conjunto U de vértices no grafo G , denotada por $N_G(U)$, é o conjunto de vértices de G adjacentes a algum vértice de U .

Uma *clique* é um subconjunto de vértices de um grafo G , tal que cada dois vértices do subconjunto são adjacentes. Um vértice v de um grafo G é *simplicial* se o grafo induzido por $N(v) \cup \{v\}$ for uma clique.

Um grafo conexo sem ciclos é chamado de *árvore*. Os vértices de grau um de uma árvore são denominados *folhas*. Um *grafo estrela* S_n é o grafo com conjunto de vértices $V(S_n) = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e conjunto de arestas $E(S_n) = \{u_0u_i : 1 \leq i \leq n\}$. Um grafo estrela S_n é um tipo especial de árvore, no qual todas as n folhas são adjacentes ao mesmo vértice.

Considere uma propriedade P e seja S um conjunto de vértices de um grafo G que tenha a propriedade P . O conjunto S é *maximal* com relação à propriedade P se não existir um outro subconjunto de vértices S' de G com a propriedade P , tal que $S \subset S'$.

Um grafo G é *conexo* se para todo par de vértices, $u, v \in V(G)$ existir um caminho entre u e v , e *desconexo* caso contrário. As *componentes*, ou *componentes conexas*, de um grafo G desconexo são seus subgrafos conexos maximais.

Seja G um grafo desconexo e G_i uma componente conexa de G . Dizemos que G_i é uma *componente não trivial*, se $|V(G_i)| \geq 2$.

Seja G um grafo e S um conjunto de vértices de $V(G)$. Se um vértice v não pertence a S , mas v pertence a $H[S]$, dizemos que S *contamina* v , ou que v é *contaminado* por S .

Dados dois vértices $u, v \in V(G)$, dizemos que v é *alcançável* a partir de u , se existe um caminho P de u a v em G . Seja $P = u_0u_1 \dots u_k$ um caminho em um grafo G . Para cada vértice u_i , para $i \geq 1$, chamamos de *antecessor* de u_i o vértice u_{i-1} no caminho P .

3. Resultados

Nesta seção apresentamos nossos resultados. Para o prisma complementar de quaisquer árvores encontramos o resultado que segue no Teorema 3.1. Antes de prová-lo, enunciaremos o Lema 3.1 de [Everett e Seidman, 1985], que será utilizado nesta prova.

Lema 3.1 ([Everett e Seidman, 1985]). *Para qualquer conjunto envoltório S de um grafo G , S contém todos vértices simpliciais de G .*

Teorema 3.1. *Seja T uma árvore. Então:*

$$h(T\bar{T}) = \begin{cases} n + 1, & \text{se } T = S_n, \\ 2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Consideraremos os dois casos: se T é uma estrela e se T não é uma estrela.

Primeiramente, se T é uma estrela, considere $V(T) = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $u_0 u_i \in E(T)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Um grafo estrela pode ser visto na Figura 1(a). A fim de uma contradição, suponha que exista um subconjunto S de vértices de $T\bar{T}$ tal que $|S| \leq n$. Analisaremos os casos $S \subseteq V(T)$, $S \subseteq V(\bar{T})$ e $S \subseteq V(T\bar{T})$.

Suponha que $S \subseteq V(T)$ tal que $|S| \leq n$. Dado que \bar{u}_0 é um vértice simplicial, e como $\bar{u}_0 \notin S$, então, pelo Lema 3.1, $\bar{u}_0 \notin H[S]$. Assim, S não é um conjunto envoltório de $T\bar{T}$.

Suponha que $S \subseteq V(\bar{T})$. Se $\bar{u}_0 \notin S$, pelo Lema 3.1, então S não é um conjunto envoltório de $T\bar{T}$, uma vez que \bar{u}_0 é um vértice simplicial. Então, sem perda de generalidade, seja $S = \{\bar{u}_0\} \cup \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{n-1}\}$. Como $d(\bar{u}_0, \bar{u}_i) = 3$, para todo $1 \leq i \leq n - 1$, e u_0, u_i pertencem a um caminho mínimo entre \bar{u}_0 e \bar{u}_i , então $u_0, u_i \in I[S]$, para $1 \leq i \leq n - 1$. Como $d(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = 1$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n - 1\}$ com $i \neq j$, e $d(u_0, \bar{u}_i) = 2$ para todo $1 \leq i \leq n - 1$, temos que u_n e \bar{u}_n não pertencem a nenhum caminho mínimo entre dois vértices de $I[S] = I^2[S]$, logo S não é um conjunto envoltório de $T\bar{T}$.

Seja $S \subseteq V(T\bar{T})$. Se $\bar{u}_0 \notin S$, pelo Lema 3.1, então S não é um conjunto envoltório de $T\bar{T}$, uma vez que \bar{u}_0 é um vértice simplicial. Então, considere que $\bar{u}_0 \in S$. Para toda combinação de $n - 1$ vértices de $V(T\bar{T})$, temos que $u_i, \bar{u}_i \notin S$, para algum $1 \leq i \leq n$. Dessa forma, temos que verificar se $u_i, \bar{u}_i \in H[S]$.

Para que u_i pertença a $H[S]$, u_i deve pertencer ao caminho mínimo entre dois vértices que estão em $I^\alpha[S]$. Como u_i é adjacente a \bar{u}_i , \bar{u}_i deve pertencer a $I^\alpha[S]$. Mas \bar{u}_i pertence a um subgrafo completo de \bar{T} , assim $\bar{u}_i \notin I^\alpha[S]$, logo $u_i \notin H[S]$.

Para que \bar{u}_i pertença a $H[S]$, \bar{u}_i deve pertencer a algum caminho mínimo entre dois vértices que estão em $I^\alpha[S]$. Como \bar{u}_i pertence a um subgrafo completo de \bar{T} , então \bar{u}_i não pertence a um caminho mínimo entre dois vértices de $V(\bar{T})$. Como \bar{u}_i é adjacente a u_i , u_i deve pertencer a $I^\alpha[S]$. Mas $u_i \notin H[S]$, se $\bar{u}_i \notin I^\alpha[S]$, logo $\bar{u}_i \notin H[S]$.

Por conseguinte, se ambos $u_i, \bar{u}_i \notin S$, então $u_i, \bar{u}_i \notin H[S]$, logo S não é um conjunto envoltório de $T\bar{T}$, o que implica em uma contradição, portanto $h(T\bar{T}) \geq n$.

Para o limite superior, considere $S = \{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. Como $d(\bar{u}_0, \bar{u}_i) = 3$, para todo $1 \leq i \leq n$, e u_0, u_i pertencem a um caminho mínimo entre \bar{u}_0 e \bar{u}_i , então $u_0, u_i \in I[S]$. Assim, $V(T\bar{T}) = I[S] = H[S]$, portanto S é um conjunto envoltório de $T\bar{T}$ como $|S| = n + 1$. Logo $h(T\bar{T}) = n + 1$, quando T é uma estrela.

Como [Duarte, 2015] mostrou que $h(P_n \bar{P}_n) = 2$, para $n \neq 3$ e P_3 é uma estrela, vamos supor que $|V(T)| \geq 5$.

Seja $T \neq P_n$. Como T não é uma estrela e $|V(T)| \geq 5$, então existem vértices $u, v \in T$ tal que $d_T(u, v) \geq 3$. Considere $S = \{u, v\}$ tal que $u, v \in V(T)$ e a distância entre u e v em T é igual a 3, veja na Figura 1(b). Visto que $d_T(u, v) = 3$, existem vértices $x, y \in V(T)$ tal que x e y estão em um caminho mínimo entre u e v , $P_1 : u, x, y, v$. Os vértices $\bar{u}, \bar{v} \in V(\bar{T})$ também

estão em um caminho mínimo entre u e v , $P_2 : u, \bar{u}, \bar{v}, v$, logo $I[S] \supseteq \{u, v, x, y, \bar{u}, \bar{v}\}$. Como $d(x, \bar{v}) = 2$ e $d(y, \bar{u}) = 2$, temos que $I^2[S] \supseteq \{u, v, x, y, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}, \bar{y}\}$.

Como $ux \in E(T)$, então $\bar{u}\bar{x} \notin E(\bar{T})$, logo $d(\bar{u}, \bar{x}) \geq 2$. Seja $W = \{w \in V(T) : w \notin N(\{u, x\}) \setminus \{v, y\}\}$ e $\bar{W} = \{\bar{w} \in V(\bar{T}) : \bar{w} \text{ é correspondente a } w \in W\}$. Para todo vértice $w \in W$, temos que todo $\bar{w} \in \bar{W}$ é adjacente a \bar{u} e \bar{x} , assim \bar{w} está em um caminho mínimo entre \bar{u} e \bar{x} , logo $\bar{W} \subseteq I^3[S]$. Como $yv \in E(T)$, então $\bar{y}\bar{v} \notin E(\bar{T})$, logo $d(\bar{y}, \bar{v}) \geq 2$. Seja $Z = \{z \in V(T) : z \in N(\{u, x\}) \setminus \{v, y\}\}$ e $\bar{Z} = \{\bar{z} \in V(\bar{T}) : \bar{z} \text{ é correspondente a } z \in Z\}$. Para todo vértice $z \in Z$, temos que z não é adjacente nem a y nem a v , logo todo $\bar{z} \in \bar{Z}$ é adjacente a \bar{y} e a \bar{v} e assim \bar{z} está em um caminho mínimo entre \bar{y} e \bar{v} o que implica que $\bar{Z} \subseteq I^3[S]$. Logo $V(\bar{T}) \subseteq H[S]$.

Como T é um grafo conexo, então cada vértice $t \in V(T) \setminus \{u, x, y, v\}$ é alcançável a partir de $\{u, x, y, v\} \in I[S]$ e como $V(\bar{T}) \subseteq I^3[S]$, então $t \in I^\alpha[S]$ para $4 \leq \alpha \leq h$, em que h é a altura da árvore de busca em largura de T iniciando de $\{u, x, y, v\}$. Como $H[S] = I^\alpha[S] = V(T\bar{T})$, então S é um conjunto envoltório de $T\bar{T}$, portanto $h(T\bar{T}) = 2$. □

A Figura 1(a) contém um prisma $S_n\bar{S}_n$ e a Figura 1(b) contém um prisma $T\bar{T}$ com $T \neq S_n$. Os vértices de cor preta representam um conjunto envoltório de $S_n\bar{S}_n$ e de $T\bar{T}$, respectivamente.

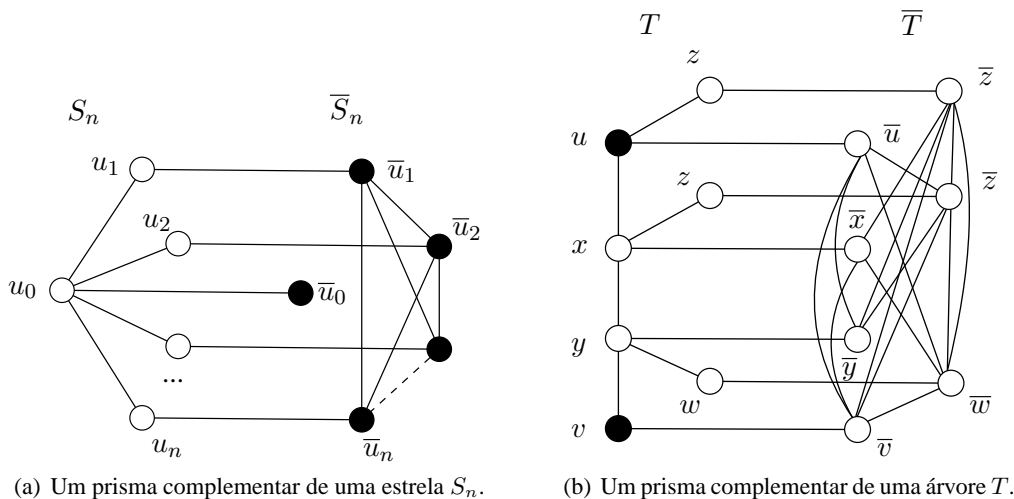


Figura 1: Árvores dos casos do Teorema 3.1.

Demonstramos no Teorema 3.2 que, para o prisma complementar de um grafo G desconexo com pelo menos duas componentes conexas não triviais, o número envoltório está relacionado à quantidade de componentes conexas que o grafo G possui.

Teorema 3.2. *Seja G um grafo desconexo. Se G possui $k \geq 2$ componentes conexas, sendo pelo menos duas delas não triviais, então $h(G\bar{G}) = k + 1$.*

Demonstração. Seja G um grafo com $V(G) = \{u_1, \dots, u_n\}$. Suponha que G seja desconexo com $k \geq 2$ componentes conexas, sendo pelo menos duas não triviais. Sejam G_1, \dots, G_k as componentes conexas de G . Sejam $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_k$ os subgrafos induzidos pelos vértices $\bar{u}_i \in V(\bar{G})$ correspondentes aos vértices u_i de cada componente conexa de G .

Dado que G é desconexo, cada componente G_i , $1 \leq i \leq k$, não é contaminada por vértices das outras componentes G_j , $1 \leq j \leq k$, $i \neq j$. Como todo vértice de \bar{G}_i , $1 \leq i \leq k$, é adjacente a todo vértice de \bar{G}_j , $1 \leq j \leq k$, para $i \neq j$, então a distância entre quaisquer dois vértices de \bar{G} é no máximo 2. Assim, cada componente G_i , $1 \leq i \leq k$, não é contaminada somente

por vértices de \overline{G} , o que implica que $h(G\overline{G}) \geq k$. Como um vértice v_i de cada componente G_i , $1 \leq i \leq k$, contamina apenas os vértices correspondentes \overline{v}_i em \overline{G}_i , então $h(G\overline{G}) \geq k + 1$.

Considere que G possui pelo menos duas componentes conexas não triviais, G_i e $G_{i'}$. Sejam u_1 e u_2 dois vértices de G_i tais que $u_1u_2 \in E(G)$. Seja S o conjunto de vértices que contém $\{u_1, \overline{u}_2\}$ e um vértice u de cada componente G_j com $1 \leq j \leq k$ e $j \neq i$, onde j inclui i' .

Como $d(u_1, \overline{u}_2) = 2$, $u_1u_2\overline{u}_2$ é um caminho mínimo entre u_1 e \overline{u}_2 , então $u_2 \in I[S]$. Também temos que $u_1\overline{u}_1\overline{u}u$ é um caminho mínimo entre u_1 e u para todo $u \in S$ de cada G_j , $1 \leq j \leq k$ com $j \neq i$, logo $\overline{u}_1, \overline{u} \in I[S]$.

Como $u_1u_2 \in E(G)$, então $\overline{u}_1\overline{u}_2 \notin E(\overline{G})$. Como G possui componentes conexas G_1, \dots, G_k , então cada vértice de cada subgrafo induzido \overline{G}_j de \overline{G} , para $1 \leq j \leq k$, é adjacente a todo vértice de todo subgrafo induzido $\overline{G}_{j'}$ de \overline{G} , para $1 \leq j' \leq k$, $j \neq j'$. Como $\overline{u}_1\overline{u}_2 \notin E(\overline{G})$, então $d(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = 2$, logo todo vértice \overline{x} em \overline{G}_j , $1 \leq j \leq k$ com $j \neq i$, está em um caminho mínimo entre \overline{u}_1 e \overline{u}_2 , assim $I^2[S]$ contém todo vértice de \overline{G}_j , $1 \leq j \leq k$, $j \neq i$.

Já que $G_{i'}$ é uma componente conexa não trivial de G , então existem pelo menos dois vértices, u_3 e u_4 , que são adjacentes em $G_{i'}$. Temos que $\overline{u}_3, \overline{u}_4 \in I^2[S]$, já que todo vértice de toda \overline{G}_j , $1 \leq j \leq k$, $j \neq i$, está em $I^2[S]$. Como $\overline{u}_3, \overline{u}_4 \in I^2[S]$ e $d(\overline{u}_3, \overline{u}_4) = 2$, então todo vértice $\overline{w} \in \overline{G}_i$ está em um caminho mínimo entre \overline{u}_3 e \overline{u}_4 , logo $I^3[S]$ contém todo vértice $\overline{w} \in \overline{G}_i$. Desta forma $I^3[S]$ contém $V(\overline{G})$.

Resta mostrar que $V(G) \subseteq H[S]$. Considere agora, cada componente conexa G_i , para $1 \leq i \leq k$, em que i inclui $\{i', j\}$. Como a componente G_i é conexa, então existe um caminho entre cada par de vértices de G_i . Como existe pelo menos um vértice u contaminado em cada G_i , então todo vértice $u_l \in G_i$ está em um caminho mínimo entre \overline{u}_l e u , ou entre \overline{u}_l e seu antecessor previamente contaminado, o que implica que $u_l \in H[S]$. Desta forma $V(G) \subseteq H[S]$, logo $V(G\overline{G}) = H[S]$. Portanto, S é um conjunto envoltório de $G\overline{G}$ e temos que $h(G\overline{G}) = k + 1$. □

Ilustrando o Teorema 3.2 temos a Figura 2, na qual os círculos representam as componentes conexas G_i , os círculos tracejados representam os subgrafos \overline{G}_i e as linhas tracejadas representam o conjunto das arestas que ligam cada vértice de \overline{G}_i a cada vértice de \overline{G}_j . Os vértices de cor preta representam um conjunto envoltório de $G\overline{G}$.

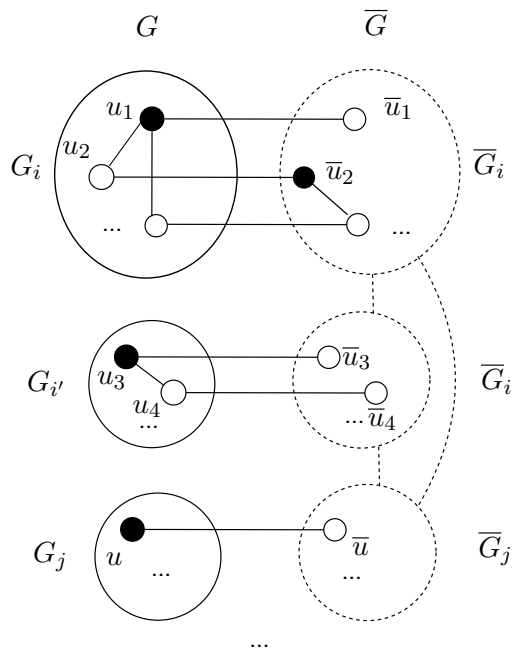


Figura 2: G desconexo com $k \geq 2$ componentes conexas não triviais.

Diferentemente da convexidade P_3 em que o número envoltório para prismas complementares de grafos conexos é limitado a 5, [Duarte et al., 2015], verificamos que na convexidade geodética, o número envoltório para prismas complementares de grafos G e \bar{G} ambos conexos pode ser ilimitado, como demonstrado no Teorema 3.3 a seguir.

Teorema 3.3. *Para todo inteiro $n \geq 2$, existem grafos conexos G e \bar{G} com $h(G\bar{G}) = n$.*

Demonstração. Suponha que $n = 2$. Considere os grafos conexos G e \bar{G} como P_4 e \bar{P}_4 , respectivamente. [Duarte, 2015] mostrou que $h(P_4\bar{P}_4) = 2$. Portanto, para $n = 2$ existem grafos conexos G e \bar{G} tal que $h(G\bar{G}) = n$.

Suponha que $n > 2$. Seja K_n um grafo completo com $V(K_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Considere $G = (V, E)$ um grafo conexo em que $V(G) = V(K_n) \cup \{v_1, v_2\}$ e $E(G) = E(K_n) \cup \{u_1v_1, u_2v_2\}$, veja essa construção na Figura 3.

Como limite inferior, queremos provar que $h(G\bar{G}) \geq n$. Mostraremos então que, para todo $S \subseteq V(G\bar{G})$ com $|S| \leq n-1$, S não é um conjunto envoltório de $G\bar{G}$. Para isso, verificaremos que, se existem dois vértices $u_i, \bar{u}_i \in V(G\bar{G})$ que não pertencem a S , para algum $3 \leq i \leq n$, estes mesmos vértices, u_i, \bar{u}_i não pertencerão a $H[S]$.

Seja $S \subseteq V(G\bar{G})$ tal que $|S| \leq n-1$. Para toda combinação de $n-1$ vértices de $V(G\bar{G})$, temos que, pelo menos algum vértice u_i e seu vértice correspondente \bar{u}_i , para $1 \leq i \leq n$, não estarão em S , já que $|V(K_n)| = |V(\bar{K}_n)| = n$. Consideraremos algumas observações.

Observação 1 *Se $u_1, \bar{u}_1 \notin S$, então existem vértices $u_i, \bar{u}_i \in V(G\bar{G})$ que não pertencem a S , para $2 \leq i \leq n$.*

Suponha que $u_1, \bar{u}_1 \notin S$. Para toda combinação S de até $n-1$ vértices de $V(G\bar{G})$ onde u_1, \bar{u}_1 não pertençam a S , temos que u_1, \bar{u}_1 não pertencem, ou pertencem a $H[S]$. Se u_1, \bar{u}_1 não pertencem a $H[S]$, de imediato S não é um conjunto envoltório de $V(G\bar{G})$. Porém, caso u_1 pertença a $H[S]$, temos que u_1 pertence a um caminho mínimo entre dois outros vértices que estão em S ou em $I^\alpha[S]$. Uma vez que a distância entre cada par de vértices $u_j, u_k \in V(K_n)$ é igual a 1, então u_1 depende de \bar{u}_1 para entrar em $H[S]$.

Para que \bar{u}_1 pertença a $H[S]$, \bar{u}_1 deve pertencer a um caminho mínimo entre dois outros vértices que estão em S ou em $I^{\alpha-1}[S]$. Como \bar{u}_1 é adjacente apenas a $\{u_1, \bar{v}_2\}$, então para que \bar{u}_1 pertença a $I^\alpha[S]$, é necessário que u_1 esteja primeiro em $I^{\alpha-1}[S]$ ou que \bar{u}_1 e u_1 entrem juntos em $I^\alpha[S]$. Logo, se u_1 não pertence a $H[S]$, então \bar{u}_1 também não pertence a $H[S]$.

Dado que $\bar{u}_1 \notin S$, e como a distância entre \bar{v}_2 a qualquer vizinho de u_1 é igual a 2, então u_1 pertence a um caminho mínimo entre v_1 e algum u_j , para $2 \leq j \leq n$, ou entre v_1 e v_2 . Desta forma, se u_1 pertence a $H[S]$, então ao menos $v_1 \in I^\alpha[S]$. Mas, como v_1 é adjacente apenas a u_1, \bar{v}_1 , e a distância entre \bar{v}_1 e qualquer outro vértice de $V(G\bar{G})$ é no máximo 2, então v_1 deve pertencer a S . Desta maneira, S contém no máximo $n-2$ vértices de $V(K_n) \cup V(\bar{K}_n)$. Então pelo menos algum vértice u_i , para $2 \leq i \leq n$, e também seu vértice correspondente \bar{u}_i não estarão em S , já que $|V(K_n)| = |V(\bar{K}_n)| = n$.

Observação 2 *Se $u_2, \bar{u}_2 \notin S$, então existem vértices u_i, \bar{u}_i que não pertencem a S , para $1 \leq i \leq n$, onde $i \neq 2$.*

O mesmo argumento da Observação 1 pode ser aplicado para mostrar que a Observação 2 é válida.

A partir dos argumentos das Observações 1 e 2 constatamos que, se u_1, \bar{u}_1 (u_2, \bar{u}_2) não pertencem a S , é possível que u_1, \bar{u}_1 (u_2, \bar{u}_2) pertençam a $H[S]$. Se isso ocorre, outros vértices u_i, \bar{u}_i , para algum $2 \leq i \leq n$, ($1 \leq i \leq n$, onde $i \neq 2$) não devem pertencer a S .

Observação 3 *Se os vértices $u_1, u_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ não pertencem a S , então existem vértices u_i, \bar{u}_i que não pertencem a S , para $3 \leq i \leq n$.*

Considere que $u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2 \notin S$. Temos que u_1, u_2 e seus correspondentes \bar{u}_1, \bar{u}_2 podem não pertencer, ou pertencer a $H[S]$. Se esses quatro vértices não pertencem a $H[S]$, de imediato S não é um conjunto envoltório de $V(G\bar{G})$. Porém, se u_1, u_2 pertencem a $H[S]$, como a distância entre cada par de vértices $u_j, u_k \in V(K_n)$ é igual a 1, então u_1 não pertence a nenhum caminho mínimo entre u_j e u_k , e o mesmo ocorre com u_2 . Deste modo, temos que ambos u_1, u_2 pertencem ao mesmo caminho mínimo entre dois outros vértices que estão em S ou em $I^\alpha[S]$. Como $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \notin S$, então u_1, u_2 pertencem a um caminho mínimo entre v_1 e v_2 , logo $v_1, v_2 \in I^\alpha[S]$. Contudo, v_1 é adjacente apenas a $\{u_1, \bar{v}_1\}$ e v_2 é adjacente apenas a $\{u_2, \bar{v}_2\}$ e como $d(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 1$, então v_1, v_2 devem pertencer a S . Desta forma, cada combinação de S , neste caso, deve conter $n - 3$ vértices de $V(K_n) \cup V(\bar{K}_n)$, o que implica que pelo menos algum vértice $u_i \in V(K_n)$, para $3 \leq i \leq n$, bem como seu vértice correspondente $\bar{u}_i \in V(\bar{K}_n)$ não estarão em S , já que $|V(K_n)| = |V(\bar{K}_n)| = n$.

Até aqui concluímos que, se $|S| \leq n - 1$, então algum par u_i, \bar{u}_i não deve estar em S . Se $u_1, \bar{u}_1 \notin S$ ou $u_2, \bar{u}_2 \notin S$ ou $u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2 \notin S$, então $u_i, \bar{u}_i \notin S$, para $3 \leq i \leq n$.

Agora, resta mostrar que, se $u_i, \bar{u}_i \notin S$, então $u_i, \bar{u}_i \notin H[S]$, para $3 \leq i \leq n$.

Suponha que $u_i, \bar{u}_i \notin S$, para $3 \leq i \leq n$. Como a distância entre cada par de vértices $u_j, u_k \in V(K_n)$ é igual a 1, então u_i não pertence a nenhum caminho mínimo entre u_j e u_k . Como a distância entre cada par de vértices $\bar{u}_j, \bar{u}_k \in V(\bar{K}_n)$ é no máximo 3, então \bar{u}_i não pertence a nenhum caminho mínimo entre \bar{u}_j e \bar{u}_k , já que qualquer caminho mínimo entre \bar{u}_j e \bar{u}_k que contém \bar{u}_i tem distância maior que 3. Então, como $u_i \notin S$, então $\bar{u}_i \notin H[S]$, e como $\bar{u}_i \notin S$, então $u_i \notin H[S]$. Logo, $u_i, \bar{u}_i \notin H[S]$. Portanto, toda combinação S , de no máximo $n - 1$ quaisquer vértices de $V(G\bar{G})$, não é um conjunto envoltório de $G\bar{G}$. Consequentemente, $h(G\bar{G}) \geq n$.

Para o limite superior, considere $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. Temos que $d(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 3$, logo $u_1, u_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in I[S]$. Como $d(u_1, \bar{v}_1) = 2$ e $d(u_2, \bar{v}_2) = 2$, então $v_1, v_2 \in I^2[S]$. Temos também que todo u_i , para $3 \leq i \leq n$, está em um caminho mínimo entre u_1, \bar{u}_i , logo $u_i \in I^2[S]$. Como $V(G\bar{G}) = I^2[S] = H[S]$, então S é um conjunto envoltório de $G\bar{G}$ de cardinalidade n . Portanto, $h(G\bar{G}) = n$, o que finaliza a prova. \square

A Figura 3 mostra a construção de um prisma complementar de um grafo conexo G tal que \bar{G} também é conexo. Os vértices de cor preta representam um conjunto envoltório de $G\bar{G}$.

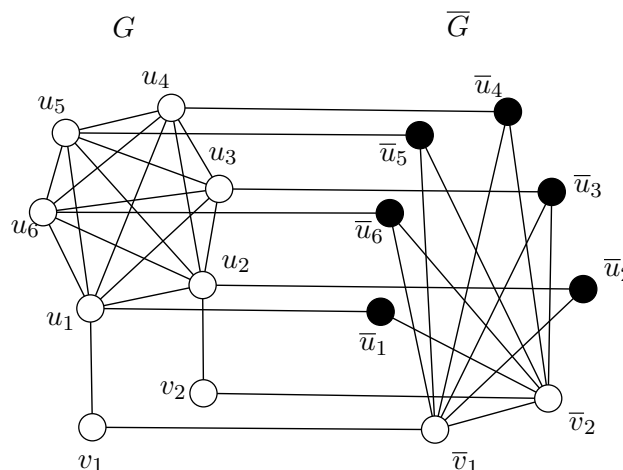


Figura 3: G e \bar{G} conexos, com $h(G\bar{G}) = 6$.

4. Considerações Finais

Como uma extensão do trabalho de [Duarte, 2015], apresentamos o número envoltório de prismas complementares de árvores e de grafos desconexos com pelo menos duas componentes não triviais. Também mostramos que o número envoltório para prismas complementares de grafos G

e \overline{G} conexos pode ser ilimitado na convexidade geodética, ao contrário da convexidade P_3 . Algumas sugestões de trabalho futuro são estudar o número envoltório para prismas complementares de grafos gerais e determinar a complexidade do seguinte problema de decisão:

Problema 4.1. *Seja k um inteiro positivo. Dado um grafo G , decidir se o número envoltório $h(G\overline{G})$ é menor ou igual a k .*

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com apoio da CAPES, CNPq e FAPERJ.

Referências

- Araujo, J., Campos, V., Giroire, F., Nisse, N., Sampaio, L., e Soares, R. (2013). On the hull number of some graph classes. *Theoretical Computer Science*, 475:1–12.
- Barbosa, R. M., Coelho, E. M. M., Dourado, M. C., Rautenbach, D., e Szwarcfiter, J. L. (2012). On the carathéodory number for the convexity of paths of order three. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 26(3):929–939.
- Bollobás, B. (2006). *The art of mathematics: Coffee time in Memphis*. Cambridge University Press.
- Cagaanan, G. B. e Canoy, S. R. (2004). On the hull sets and hull number of the cartesian product of graphs. *Discrete Mathematics*, 287(1):141–144.
- Centeno, C. C., Dourado, M. C., Penso, L. D., Rautenbach, D., e Szwarcfiter, J. L. (2011). Irreversible conversion of graphs. *Theoretical Computer Science*, 412(29):3693–3700.
- Centeno, C. C. (2012). *A Convexidade P_3 para Grafos não Direcionados*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Coelho, E. M. M., Dourado, M. C., Rautenbach, D., e Szwarcfiter, J. L. (2014). The carathéodory number of the p_3 convexity of chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 172:104 – 108. ISSN 0166-218X.
- Coelho, E. M. M., Dourado, M. C., e Sampaio, R. M. (2015). Inapproximability results for graph convexity parameters. *Theoretical Computer Science*, 600:49 – 58. ISSN 0304-3975.
- Domingos, P. e Richardson, M. (2001). Mining the network value of customers. In *Proceedings of the seventh ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, p. 57–66. ACM.
- Dourado, M. C., Gimbel, J. G., Kratochvíl, J., Protti, F., e Szwarcfiter, J. L. (2009). On the computation of the hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, 309(18):5668–5674.
- Dourado, M. C., Protti, F., e Szwarcfiter, J. L. (2010). Complexity results related to monophonic convexity. *Discrete Applied Mathematics*, 158(12):1268–1274.
- Dourado, M. C., Rautenbach, D., Dos Santos, V. F., Schäfer, P. M., e Szwarcfiter, J. L. (2013). On the carathéodory number of interval and graph convexities. *Theoretical Computer Science*, 510: 127–135.
- Dreyer, P. A. e Roberts, F. S. (2009). Irreversible k -threshold processes: Graph-theoretical threshold models of the spread of disease and of opinion. *Discrete Applied Mathematics*, 157(7):1615–1627.
- Duarte, M. A. (2015). *Sobre convexidade em prismas complementares*. PhD thesis, Universidade Federal de Goiás.

- Duarte, M. A., Penso, L., Rautenbach, D., e dos Santos Souza, U. (2015). Complexity properties of complementary prisms. *Journal of Combinatorial Optimization*, p. 1–8.
- Duchet, P. (1988). Convex sets in graphs, ii. minimal path convexity. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 44(3):307–316.
- Erdős, P., Fried, E., Hajnal, A., e Milner, E. (1972). Some remarks on simple tournaments. *Algebra Universalis*, 2(1):238–245.
- Everett, M. G. e Seidman, S. B. (1985). The hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, 57(3): 217–223.
- Hammack, R., Imrich, W., e Klavžar, S. (2011). *Handbook of product graphs*. CRC press.
- Harary, F., Nieminen, J., et al. (1981). Convexity in graphs. *Journal of Differential Geometry*, 16 (2):185–190.
- Haynes, T. W., Henning, M. A., Slater, P. J., e van der Merwe, L. C. (2007). The complementary product of two graphs. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 51:21–30.
- Hernando, C., Jiang, T., Mora, M., Pelayo, I. M., e Seara, C. (2005). On the steiner, geodetic and hull numbers of graphs. *Discrete Mathematics*, 293(1):139–154.
- Moon, J. (1972). Embedding tournaments in simple tournaments. *Discrete Mathematics*, 2(4): 389–395.
- Peleg, D. (2002). Local majorities, coalitions and monopolies in graphs: a review. *Theoretical Computer Science*, 282(2):231–257.
- Penso, L. D., Protti, F., Rautenbach, D., e dos Santos Souza, U. (2015). Complexity analysis of p_3 -convexity problems on bounded-degree and planar graphs. *Theoretical Computer Science*, 607:83–95.
- Varlet, J. C. (1976). Convexity in tournaments. *Bull. Societe Royale des Sciences de Liege*, 45: 570–586.