

SOBRE A COMPLEXIDADE DO PROBLEMA DA ÁRVORE DE CAMINHOS MAIS CURTOS ROBUSTA

Iago A. Carvalho

Departamento de Ciência da Computação - Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte - MG - Brasil
iagoac@ufmg.br

Vinícius F. Santos

Departamento de Ciência da Computação - Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte - MG - Brasil
vinciussantos@dcc.ufmg.br

Thiago F. Noronha

Departamento de Ciência da Computação - Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte - MG - Brasil
tfn@dcc.ufmg.br

RESUMO

O problema da Árvore de Caminhos Mais Curtos Robusta (ACMC-R) é um problema de otimização robusta derivado do problema clássico da Árvore de Caminhos Mais Curtos. O ACMC-R está relacionado a problemas de roteamento em redes 6LoWPAN (*IPv6 Low Wireless Personal Area Networks*), onde há uma grande incerteza na qualidade dos enlaces. Embora o ACMC-R já esteja definido na literatura, a prova de sua complexidade ainda estava em aberto. Este trabalho estabelece duas provas distintas de sua complexidade. Primeiramente, é provado que o ACMC-R é um problema NP-Completo, mesmo quando existem somente dois cenários distintos. Logo após, é provado que o ACMC-R é um problema fortemente NP-Completo quando existe um número indefinido de cenários.

PALAVRAS CHAVE. Complexidade, Otimização robusta, RPL, Internet das Coisas.

Área Principal: Teoria e Algoritmos em Grafos, Otimização Combinatória

ABSTRACT

The Robust Shortest Path Tree problem (RSPT) is a robust optimization problem derived from the classical Shortest Path Tree problem. RSPT is related to routing problem in 6LoWPAN (*IPv6 Low Wireless Personal Area Networks*), where there is a great uncertainty in the links qualities. Although RSPT was defined in literature, the proof of its complexity was still open. This work stabilishes two distinct proofs of its complexity. First, it is proven that RSPT is a NP-Complete problem, even when there is only two distinct scenarios. Next, is is proven that RSPT is a strongly NP-Complete problem when there is an undefined number of scenarios.

KEYWORDS. Complexity, Robust optimization, RPL, Internet of Things.
Main area: Theory and Algorithms in Graphs, Combinatorial optimization

1. Introdução

Atualmente, há um crescente aumento no número de dispositivos conectados à Internet, como computadores, sensores, *smartphones*, eletrodomésticos, dentre outros. Este crescente conjunto introduz um novo paradigma no cenário da moderna comunicação sem fio. Estes dispositivos comunicam-se entre si e colaboram com seus vizinhos para alcançar objetivos comuns, formando a Internet das Coisas (IdC) [Giusto et al., 2010]. Para que a IdC se torne uma realidade, muitos desafios ainda precisam ser superados, como o design de protocolos eficientes que resultam em redes seguras e de baixo consumo energético. Além disto, estes protocolos precisam ser resilientes a grandes variações na qualidade da transmissão, devido a constantes mudanças no enlace da rede.

A principal solução para este desafio são as IPv6 Low Wireless Personal Area Networks (6LoWPAN) [Shelby e Bormann, 2011], redes caracterizadas por baixos recursos, tanto em termos de capacidade de computação quanto em capacidade energética. Cada vértice em uma rede 6LoWPAN representa um dispositivo na IdC. Estes vértices são interconectados por enlaces potencialmente com baixa qualidade de comunicação e taxas de perdas elevadas. Um erro em um único enlace pode afetar muitos outros, fazendo com que a rede se torne ineficiente ou até mesmo desconectada [Winter, 2012].

Vários protocolos de roteamento para 6LoWPAN foram desenvolvidos na tentativa de superar estas dificuldades. O mais promissor destes protocolos é o *IPv6 Routing Protocol for Low-Power and Lossy Networks* (RPL) [Winter, 2012]. Primeiramente, o RPL constrói um Grafo Acíclico Direto Orientado (GADO) para um vértice central da rede s , chamado *sink*, a partir de todos os outros vértices na rede que servem a mesma aplicação que o *sink*. Este GADO é construído levando em consideração o alcance de transmissão dos sensores, bem como a distância entre os sensores na rede. Cada aplicativo de rede tem seu próprio GADO e o roteamento de mensagens para cada aplicação é feita de forma independente. Toda a comunicação entre os sensores é realizada através deste GADO e retransmitida pelo *sink*. Pode existir um número exponencial de rotas entre cada vértice e o *sink* e a eficiência da rede depende da qualidade das rotas escolhidas.

O RPL utiliza uma estimativa da qualidade dos enlaces para determinar as rotas entre o *sink* e os outros vértices da rede. É permitido ao administrador da rede escolher qualquer métrica para estimar a qualidade dos enlaces, como a taxa de transferência, a taxa de perda de pacotes, dentre outras. Contudo, o protocolo sempre faz o roteamento do pacote atual de acordo com observações passadas da métrica escolhida, cujos valores podem ter sido modificados desde a última vez que o RPL atualizou a métrica determinada [Winter, 2012]. Como redes 6LoWPAN são caracterizadas por grandes variações na qualidade do enlace, qualquer estimativa errada da qualidade do enlace usada pelo RPL pode resultar em uma má performance de roteamento [Shelby e Bormann, 2011].

A tabela de roteamento do RPL [Winter, 2012] pode ser representada como uma Árvore de Caminhos Mais Curtos (ACMC) [Cormen et al., 2009]. Ao consideramos a incerteza associada aos enlaces, pode-se construir um problema de otimização robusta derivado do ACMC, denominado Árvore de Caminhos Mais Curtos Robusta (ACMC-R) [Carvalho et al., 2015a, 2016]. Embora este problema já esteja definido na literatura, a prova de sua complexidade ainda permanece em aberto. O objetivo deste trabalho é construir uma prova de complexidade para o ACMC-R. São apresentadas duas provas distintas. Primeiramente, é provado que a ACMC-R é um problema NP-Completo mesmo quando existem somente dois cenários distintos. Em seguida, é provado que, quando o número de cenários é indefinido, a ACMC-R é um problema fortemente NP-Completo.

O restante deste artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, o problema da ACMC-R é definido. Problemas relacionados são discutidos na Seção 3. As provas de complexidade para o ACMC-R são apresentadas na Seção 4. Finalmente, as considerações finais são reportadas na última seção.

2. Definição do problema

Dado um digrafo conectado $G = (V, A)$ com um conjunto V de vértices e um conjunto A de arcos. Cada arco $(i, j) \in A$ é associado a um custo $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Além disso, sejam $n = |V|$ e $m = |A|$ respectivamente o número total de vértices e o número total de arcos de G . O problema do Caminho Mais Curto (CMC) consiste em encontrar o caminho mais curto entre um vértice de origem $s \in V$ para um vértice de destino $t \in V$ sendo o custo total do caminho o mínimo possível. Uma solução existe se e somente se não ocorre a formação de nenhum ciclo de peso negativo no caminho entre s e t . Existem algoritmos de tempo polinomial que resolvem o CMC, como o algoritmo de Dijkstra [Dijkstra, 1959] e o algoritmo de Bellman-Ford [Bellman, 1956]. Uma extensão deste problema é o problema da Árvore de Caminhos Mais Curtos (ACMC) [Wu e Chao, 2004], que consiste em encontrar uma árvore que contenha o caminho mais curto de s para todos os outros vértices em V . Este problema também pode ser resolvido pelo algoritmo de Dijkstra Cormen et al. [2009]. O problema de roteamento do RPL definido em [Vasseur et al., 2011; Winter, 2012] consiste em uma versão distribuída do algoritmo de Dijkstra para a ACMC, em que os vértices em V são associados a dispositivos na IdC, os arcos em A são associados aos enlaces e o custo c_{ij} corresponde ao valor da métrica utilizada para estimar a qualidade do enlace.

Os métodos mais utilizados para resolver problemas de otimização sob incerteza são a programação estocástica [Spall, 2003] e a otimização robusta [Ben-Tal e Nemirovski, 2002; Kouvelis e Yu, 1997]. A programação estocástica é aplicada principalmente quando uma lei de probabilidade associada a incerteza é conhecida antecipadamente. Um ponto falho desta abordagem consiste no fato de que pode ser difícil definir a lei de probabilidade associada à incerteza dos dados, ou algum erro pode ocorrer na estimação dos parâmetros. Pode-se referir a [Nie e Wu, 2009; Bertsekas e Tsitsiklis, 1991] para trabalhos dedicados ao problema do caminho mais curto estocástico, que também estende o CMC, uma vez que ele minimiza o custo total esperado.

Neste trabalho, foi focada a otimização robusta. Ela é uma alternativa à programação estocástica onde a variabilidade dos dados é representada por valores determinísticos. Neste trabalho, foram focados modelos de otimização robusta onde os dados incertos podem ser modelados em um intervalo de valores possíveis. Nos referimos ao livro [Kouvelis e Yu, 1997] para outros modelos de otimização robusta.

O problema do Caminho Mais Curto Robusto (CMC-R) é uma generalização do CMC, onde o custo c_{ij} de cada arco $(i, j) \in A$ é definido em um intervalo $[l_{ij}, u_{ij}]$, com $l_{ij}, u_{ij} \in \mathbb{Z}$, sendo $u_{ij} \geq l_{ij} \geq 0$, para todo $(i, j) \in A$ [Karaşan et al., 2001]. Existem diferentes versões do CMC-R com intervalo de dados na literatura. Elas diferem uma da outra pelo critério de otimização utilizado [Aissi et al., 2009; Averbakh, 2005; Kasperski et al., 2005; Montemanni e Gambardella, 2005a; Candia-Véjar et al., 2011; Montemanni e Gambardella, 2005b; Montemanni et al., 2004].

A versão mais estudada do CMC-R usa o critério *minmax regret* [Kouvelis e Yu, 1997; Aissi et al., 2009; Candia-Véjar et al., 2011] e é chamado *minmax regret* CMC-R [Coco et al., 2014; Kouvelis e Yu, 1997; Montemanni et al., 2004; Montemanni e Gambardella, 2005b]. Seja $P \subseteq A$ um caminho com origem em s e destino t em G . O *regret* de P no cenário r (também referido como o *desvio robusto* de P em r) é definido como a diferença entre o custo de P em r e o custo do caminho mais curto S^r de s a t em r . Em outras palavras, o *desvio robusto* de P em r é o *regret* de se usar P ao invés de S^r caso o cenário r ocorra. O *custo robusto* de P é definido como o maior desvio robusto de P dentre todos os cenários. O *minmax regret* CMC-R consiste em encontrar o caminho P^* de s a t com o menor custo robusto. Este problema é demonstrado ser NP-Difícil mesmo em digrafos acíclicos [Kouvelis e Yu, 1997].

O problema da Árvore de Caminhos Mais Curtos Robusta (ACMC-R) é uma generalização do CMC-R [Salazar-Neumann, 2007]. Seja $G = (V, A)$ um digrafo conectado, onde V é um conjunto de vértices e A é um conjunto de arcos. Cada arco $(i, j) \in A$ é associado a um intervalo de custos $[l_{ij}, u_{ij}]$, com $l_{ij}, u_{ij} \in \mathbb{R}_+$ e $u_{ij} \geq l_{ij} \geq 0$, para todo $(i, j) \in A$. Seja também $s \in V$ o vértice raiz e $V' = V \setminus \{s\}$. Em nossa modelagem para o problema de roteamento do RPL,

os vértices em V são associados a sensores, os arcos em A são associados aos enlaces, l_{ij} corresponde ao menor valor observado pela métrica de qualidade do enlace em um determinado intervalo de tempo, e u_{ij} corresponde ao maior valor observado por esta mesma métrica, durante o mesmo intervalo.

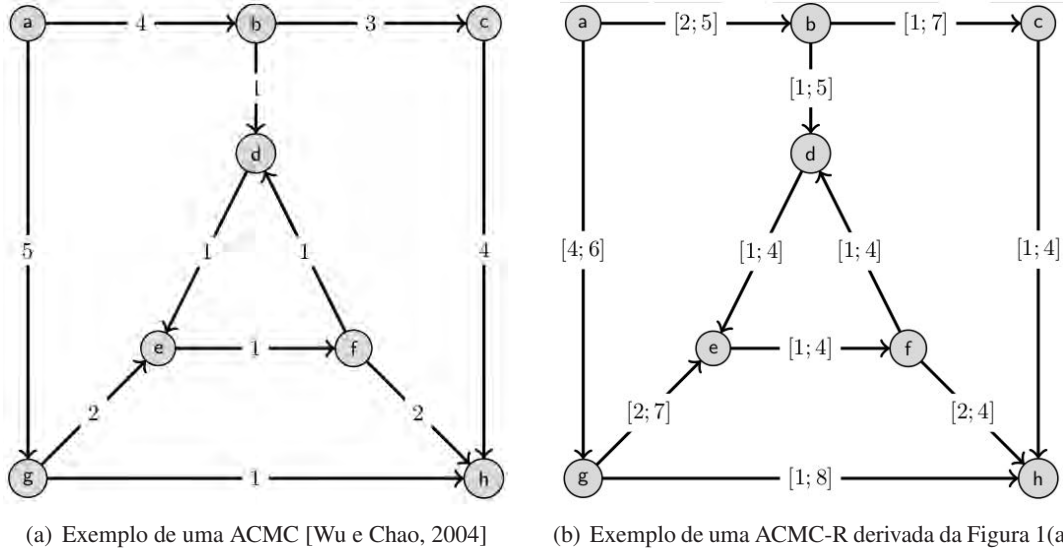


Figura 1: Exemplos de Árvore de Caminhos mais Curtos e Árvore de Caminhos Mais Curtos Robusta

Definição Um cenário r é uma realização do custo dos arcos $c_{ij}^r \in [l_{ij}, u_{ij}]$ para todo arco $(ij) \in A$.

Seja \mathcal{T} o conjunto de todas as árvores geradoras com raiz em s de G . Seja também p_i^t um caminho do vértice s para o vértice $i \in V'$ induzido pela árvore $t \in \mathcal{T}$. Além disto, seja $c^r(p_i^t) = \sum_{(i,j) \in A[p_i^t]} c_{ij}^r$ o custo de p_i^t no cenário r , e $c^r(p_i^*)$ o custo do caminho mais curto p_i^* de s a i no cenário r .

Definição O desvio robusto de um caminho p_i^t induzido por $t \in \mathcal{T}$ no cenário r (também referido como o *regret* de $p_i^t \in r$) é definido como $d^r(p_i^t) = c^r(p_i^t) - c^r(p_i^*)$, isto é, a diferença entre o custo de $p_i^t \in r$ e o melhor caminho possível de s para i no cenário r .

Seja $A[p_i^t] \in A$ o conjunto de arcos que compõe o caminho p_i^t , $A[t]$ o conjunto de arcos que compõe a árvore t , e \mathcal{R} o conjunto de todos os possíveis cenários em G .

Lema 2.1 O desvio robusto de p_i^t é o máximo, dentre todos os cenários em \mathcal{R} , no cenário $r(p_i^t) \in \mathcal{R}$, de tal forma que $c_{ij}^{r(p_i^t)} = u_{ij}$, para todo $(i, j) \in A[p_i^t]$, e $c_{ij}^{r(p_i^t)} = l_{ij}$, para todo $(i, j) \in A \setminus A[p_i^t]$.

Prova Disponível em [Kouvelis e Yu, 1997].

Quanto menor o desvio robusto de p_i^t , melhor é o caminho para enviar mensagens entre s e i . Além disto, quanto menor é o valor de $d^r(p_i^t)(p_i^t)$, mais robusto é o caminho em relação a variações na métrica de qualidade do enlace.

Definição O custo robusto de $t \in \mathcal{T}$ é definido como $R_t = \sum_{i \in V'} d^r(p_i^t)(p_i^t)$, ou seja, a soma do máximo desvio robusto de todos os caminhos entre s e todo vértice $i \in V'$.

Quanto menor é o custo robusto de uma árvore de comunicação em uma 6LoWPAN, mais eficiente e mais confiável é a rede.

Definição Uma árvore $t^* \in \mathcal{T}$ é dita ser *robusta* se ela possui o menor custo robusto dentre todas as árvores em \mathcal{T} .

Portanto, uma ACMC-R pode ser definida como uma árvore geradora de G com raiz em s , isto é, $t^* = \arg \min_{t \in \mathcal{T}} R_t$.

2.1. Formulação matemática

Uma formulação por Programação Linear Inteira Mista (PLIM) para o ACMC-R foi apresentada em [Carvalho et al., 2015a, 2016]. A formulação PLIM é definida com variáveis de decisão $z_{ij} = 1$ se o arco $(i, j) \in A$ pertence a árvore robusta, e $z_{ij} = 0$ caso contrário. Além disso, variáveis auxiliares $y_{ij}^k \in \{0, 1\}$ mantêm o caminho entre s e k induzido pela árvore definida pelas variáveis z_{ij} . Mais além, variáveis $x_i^k \geq 0$ mantêm o custo do caminho mais curto de s para $i \in V'$ no cenário induzido pelo caminho de s para k (definido pelas variáveis y_{ij}^k). Portanto, o caminho mais curto de s para k neste cenário é mantido nas variáveis x_k^k . A correspondente formulação PLIM é definida pelas equações (1) a (9).

$$\min \sum_{k \in V'} \left[\sum_{(i,j) \in A} (u_{ij} y_{ij}^k) - x_k^k \right] \quad (1)$$

$$\sum_{(j,l) \in A} y_{jl}^k - \sum_{(i,j) \in A} y_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{if } j = s \\ -1, & \text{if } j = k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad \forall j \in V, k \in V' \quad (2)$$

$$x_j^k \leq x_i^k + l_{ij} + (u_{ij} - l_{ij}) y_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in A, k \in V' \quad (3)$$

$$y_{ij}^k \leq z_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A, k \in V' \quad (4)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} z_{ij} = n - 1 \quad (5)$$

$$x_s^k = 0, \quad k \in V \quad (6)$$

$$x_i^k \geq 0, \quad \forall i \in V', k \in V \quad (7)$$

$$y_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A, k \in V \quad (8)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A \quad (9)$$

A função objetivo (1) minimiza a soma do desvio robusto máximo para todo $k \in V'$. As restrições (2) são as clássicas restrições de conservação de fluxo e asseguram a conectividade de cada caminho de s para k . As desigualdades (3) constroem um *link* entre as variáveis x e y e impõe o valor correto para x . O custo do caminho entre o vértice s e um vértice j no cenário k é calculado como o custo do caminho entre s e um vértice i adjacente a j e pertencente a seu fecho transitivo inverso acrescido de u_{ij} caso $y_{ij}^k = 1$ ou l_{ij} caso $y_{ij}^k = 0$. As desigualdades (4) constroem um *link* entre as variáveis y e z e estabelece que o caminho do vértice raiz s para todos os vértices $k \in V'$ estejam na árvore. As restrições (5), juntamente as restrições (2) e (4), determinam que as variáveis z induzam uma árvore. As restrições (6) quebram a simetria nas variáveis x , atribuindo para zero o valor do caminho mais curto de s para ele mesmo, para todo $k \in V'$. O domínio das variáveis x , y e z são definidos por (7), (8) e (9), respectivamente.

3. Trabalhos relacionados

Existem três trabalhos sobre o ACMC-R na literatura. Carvalho et al. [2015a] introduzem o ACMC-R, e fornece a primeira formulação matemática para o problema, bem como uma heurística baseada no cenário médio. Carvalho et al. [2016] estendem o trabalho anterior ao apresentar uma heurística baseada em cenários, que apresentou um *gap* menor que o apresentado pela heurística de Carvalho et al. [2015a]. Carvalho et al. [2015b] comparam a heurística apresentada em Carvalho et al. [2015a] com cenários aleatórios construídos na mesma rede, e mostra que o cenário médio é sempre melhor ou igual a 100 árvores de roteamento construídas em instantes aleatórios da rede.

Existem na literatura poucos trabalhos que tratam especificamente sobre a complexidade de problemas de otimização robusta. Um dos principais trabalhos é o livro [Kouvelis e Yu, 1997] apresenta vários problemas de otimização robusta que podem ser resolvidos em tempo polinomial. Ele também apresenta provas de complexidade para vários problemas de otimização robusta, como o problema da Mochila Binária Robusta e o problema da Árvore Geradora Mínima Robusta. Mais além, ele apresenta algoritmos pseudo-polinomiais para resolver casos especiais de alguns problemas, que foram provados ser fracamente NP-Completo.

Aissi et al. [2009] apresentam uma relação entre problemas de otimização robusta e problemas de otimização multiobjetivo. Além disso, ele sumariza os principais resultados sobre a complexidade de problemas de otimização robusta, até a data de sua publicação. Por fim, apresenta um esquema para construção de algoritmos aproximativos para problemas de otimização robusta, primeiramente apresentados em [Aissi et al., 2007].

Averbakh [2001] apresentam o caso de um problema de otimização robusta que é NP-Difícil no caso de um número arbitrário de cenários, mas é resolvido em tempo polinomial no caso em que a incerteza é representada na forma de um intervalo de valores. Desta forma, foi possível demonstrar que não há nenhuma relação direta entre a complexidade de problemas onde a incerteza é modelada de forma intervalar ou na forma de um conjunto de cenários discretos.

Pode-se citar ainda outros trabalhos que apresentam provas de complexidade para uma série de problemas de otimização robusta, como o problema de Atribuição Robusta Aissi et al. [2005], problemas de Agendamento de uma Máquina de Produção Robustos [Aloulou e Della Croce, 2008], o problema da Árvore Geradora Mínima Robusta [Aron e Van Hentenryck, 2004], o problema de Localização de Facilidade [Averbakh, 2003], dentre outros.

4. Provas de complexidade

Para construir as provas de complexidade do ACMC-R, serão realizadas reduções de dois conhecidos problemas NP-Completo: o *2-Partition Problem* (2PT) [Karp, 1972], e o *3-Partition Problem* (3PT) [Garey e Johnson, 1979]. É demonstrado que, com somente dois cenários, a ACMC-R é um problema NP-Completo, e com um número indefinido de cenários, a ACMC-R é um problema fortemente NP-Completo.

Definição Dado um conjunto finito I e um peso $a_i \geq 0, \forall i \in I$, o *2-Partition Problem* visa encontrar um subconjunto $I' \subseteq I$ tal que $\sum_{i \in I'} a_i = \sum_{i \in I \setminus I'} a_i$. Karp [1972] demonstrou que o 2PT é NP-Difícil mesmo quando $|I'| = \frac{|I|}{2}$.

Definição Dado um conjunto finito I de exatamente $3l$ elementos, e um peso $a_i \geq 0, \forall a_i \in I$, o *3-Partition Problem* visa encontrar m subconjuntos disjuntos $s_1, s_2, \dots, s_m \subseteq I$, tal que $s_1 \cup s_2 \cup \dots \cup s_m = I$, e $\sum_{k \in s_m} a_k = B, \forall m \in \{0, 1, \dots, l\}$. Garey e Johnson [1979] demonstraram que o 3PT é fortemente NP-Difícil, mesmo quando $\frac{B}{4} < a_i < \frac{B}{2}, \forall a_i \in I$. Note que, dado esta desigualdade, uma solução para o 3PT consiste sempre em $m = l$ triplas cuja soma de seus elementos seja igual a B .

Teorema 4.1 *A ACMC-R é NP-Completo, mesmo em problemas com somente 2 cenários, em grafos com 3 camadas.*

Prova Podemos reduzir o 2PT para o ACMC-R. Dada uma instância qualquer do 2PT, podemos transformá-lo no ACMC-R em tempo polinomial.

Seja $|I| = m$ a quantidade de elementos do conjunto I . Podemos construir um digrafo $G = (V, A)$ particionado em três subconjuntos disjuntos de vértices $V = V_0 \cup V_1 \cup V_2$. O conjunto V_0 contém um único vértice, denominado s . O conjunto V_1 contém $2m$ vértices, e o conjunto V_2 contém m vértices. Podemos definir três subconjuntos disjuntos de arcos $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$. O subconjunto A_0 contém $2m$ arcos, conectando as camadas V_0 e V_1 na forma de um grafo bipartido completo. O subconjunto A_1 contém um arco do vértice $v_i \in V_1$ para o vértice $w_i \in V_2$, para todo $0 \leq i < m$. O subconjunto A_2 contém um arco do vértice $v_{m+i} \in V_1$ para o vértice $w_i \in V_2$, para todo $0 \leq i < m$. Note que esta construção resulta em um grafo por camadas, contendo três diferentes camadas.

Podemos então definir um problema da ACMC-R com apenas dois cenários r_1 e r_2 . Em ambos os cenários, o custo de todo arco $e \in A_0$ é fixado em 0. No cenário r_1 , o custo de cada arco $e \in A_1$ é fixado em a_i , e o custo de cada arco $e \in A_2$ é fixado em 0. No cenário r_2 , o custo de cada arco $e \in A_1$ é fixado em 0, e o custo de cada arco $e \in A_2$ é fixado em a_i .

Dada a construção acima, sejam t_1 e t_2 duas ACMC em G com raiz no vértice s nos cenários r_1 e r_2 , respectivamente. Note que t_1 e t_2 são únicas por construção. Além disto, sejam dois conjuntos de arcos X e Y , tal que $X = A \setminus A[t_2]$ e $Y = A \setminus A[t_1]$. Um 2PT existe se e somente se $R_{t_1} = R_{t_2} = \frac{1}{2} \sum_{k \in I} a_k$. Para provar a parte do "se", suponha que exista uma partição de I em dois subconjuntos disjuntos X e Y , de tal forma que $\sum_{k \in X} a_k = \sum_{k \in Y} a_k = \frac{1}{2} \sum_{k \in I} a_k$. Podemos construir duas ACMC t_1 e t_2 , tais que $A[t_1] = A_0 \cup X$ e $A[t_2] = A_0 \cup Y$. Tanto t_1 como t_2 podem ser consideradas soluções ótimas para o ACMC-R. Para provar a parte do "somente se", assumamos que o custo da ACMC-R em G é igual a $\frac{1}{2} \sum_{k \in I} a_k$. Seja t_1 a ACMC no cenário r_1 , e t_2 a ACMC no cenário r_2 . Por construção, é claro que $(A[t_1] \cap A[t_2]) \setminus A_0 = \emptyset$. Também pela construção da rede, é claro que $R_{t_1} = R_{t_2} = \frac{1}{2} \sum_{k \in I} a_k$, que é exatamente uma 2PT de I nos conjuntos X e Y .

Teorema 4.2 *A ACMC-R é fortemente NP-Completo em problemas com um número indefinido de cenários, mesmo em grafos com 3 camadas.*

Prova Podemos reduzir o 3PT para o ACMC-R. Dada uma instância qualquer do 3PT, podemos transformá-lo no ACMC-R em tempo polinomial.

Seja $|I| = 3l$ a quantidade de elementos do conjunto I . Podemos construir um digrafo $G = (V, A)$ grafo particionado em três subconjuntos disjuntos de vértices $V = V_0 \cup V_1 \cup V_2$. O conjunto V_0 contém um único vértice, denominado s . O conjunto V_1 contém $3l^2$ vértices, e o conjunto V_2 contém $3l$ vértices. Podemos definir $l + 1$ subconjuntos disjuntos de arcos $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_l \cup A_{l+1}$. O subconjunto A_{l+1} contém $3l^2$ arcos, conectando os conjuntos V_0 e V_1 na forma de um grafo bipartido completo. Cada um dos outros l subconjuntos possui $3l$ arcos, com origem nos vértices $v_{3l+i} \in V_1 | i \in \{0, 1, \dots, 3l\}$ e destino nos vértices $w_i \in V_2$. Note que esta construção resulta em um grafo por camadas, contendo três diferentes camadas.

Podemos então definir um problema da ACMC-R com um número l indefinido de cenários. Em todos os cenários, o custo de todo arco $e \in A_{l+1}$ é fixado em 0. Para cada cenário $r_i \in \{0, 1, \dots, l\}$, o custo de cada arco $e \in A_i$ é fixado em a_i , e o custo de cada arco $e \in A \setminus A_i$ é fixado em 0.

Dada a construção acima, seja $T = \{t_0, t_1, \dots, t_l\}$ o conjunto de ACMC em G com raiz no vértice s nos cenários $\{r_0, r_1, \dots, r_l\}$, respectivamente. Uma 3PT existe se e somente se existe uma ACMC-R t^* em G tal que $R_{t^*} = B$. Para provar a parte do "se", suponha que exista uma 3PT do conjunto I em l subconjuntos distintos, tal que $\sum_{k \in s_m} a_k = B, \forall m \in \{0, 1, \dots, l\}$. Por construção, a ACMC em todos os cenários possui o mesmo custo robusto, ou seja, $R_{t_i} = B, \forall t_i \in T$. Portanto, o custo robusto da ACMC-R em G é igual a $R_{t^*} = \min R_{t_i}, \forall t_i \in T$, que por definição,

é igual a B . Para provar a parte do "somente se", assuma que o custo da ACMC-R em G é igual a B . Pela construção da rede, existem l diferentes ACMC em G , uma para cada cenário l , todas com o mesmo custo robusto B . Pode-se definir l subconjuntos disjuntos de arcos s_1, s_2, \dots, s_l a partir destas l árvores, de tal forma que o subconjunto s_l contém os arcos pertencentes a $t_i \cap \bigcup_{j \in I, j \neq i} t_j$. Como $\sum_{k \in I} a_k = lB$, e existem l árvores de custo robusto B em G , temos exatamente uma 3PT de I nos subconjuntos s_1, s_2, \dots, s_l .

5. Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho, foi apresentado o problema da Árvore de Caminhos Mais Curtos Robusta (ACMC-R). Foram apresentadas duas provas de sua complexidade. A primeira prova apresentada demonstrou que o ACMC-R é NP-Completo mesmo em um problema com somente 2 cenários. A segunda prova demonstrou que o ACMC-R é fortemente NP-Completo quando existe um número l indefinido de cenários.

Como a prova de que o ACMC-R é NP-Completo foi apresentada a partir da redução do 2-Partition Problem, abre-se espaço para a investigação de algoritmos pseudo-polinomiais para resolver este problema. Como trabalhos futuros, podem ser investigados algoritmos pseudo-polinomiais parametrizados no número de cenários, como os algoritmos apresentados em [Kouvelis e Yu, 1997] para o Problema do Caminho Mais Curto Robusto e para o Problema da Árvore Geradora Mínima Robusta. Sugere-se também o desenvolvimento de novos algoritmos exatos, heurísticos, e formulações matemáticas para o ACMC-R quando existe um número indefinido de cenários.

6. Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente suportado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Referências

- Aissi, H., Bazgan, C., e Vanderpooten, D. (2009). Min-max and min-max regret versions of combinatorial optimization problems: A survey. *European journal of operational research*, 197(2): 427–438.
- Aissi, H., Bazgan, C., e Vanderpooten, D. (2005). Complexity of the min–max and min–max regret assignment problems. *Operations research letters*, 33(6):634–640.
- Aissi, H., Bazgan, C., e Vanderpooten, D. (2007). Approximation of min–max and min–max regret versions of some combinatorial optimization problems. *European Journal of Operational Research*, 179(2):281–290.
- Aloulou, M. A. e Della Croce, F. (2008). Complexity of single machine scheduling problems under scenario-based uncertainty. *Operations Research Letters*, 36(3):338–342.
- Aron, I. D. e Van Hentenryck, P. (2004). On the complexity of the robust spanning tree problem with interval data. *Operations Research Letters*, 32(1):36–40.
- Averbakh, I. (2005). Computing and minimizing the relative regret in combinatorial optimization with interval data. *Discrete Optimization*, 2:273–287.
- Averbakh, I. (2001). On the complexity of a class of combinatorial optimization problems with uncertainty. *Mathematical Programming*, 90(2):263–272.
- Averbakh, I. (2003). Complexity of robust single facility location problems on networks with uncertain edge lengths. *Discrete Applied Mathematics*, 127(3):505–522.
- Bellman, R. (1956). On a routing problem. Technical report, DTIC Document.

- Ben-Tal, A. e Nemirovski, A. (2002). Robust optimization—methodology and applications. *Mathematical Programming*, 92(3):453–480.
- Bertsekas, D. P. e Tsitsiklis, J. N. (1991). An analysis of stochastic shortest path problems. *Mathematics of Operations Research*, 16:580–595.
- Candia-Véjar, A., Álvarez-Miranda, E., e Maculan, N. (2011). Minmax regret combinatorial optimization problems: an algorithmic perspective. *RAIRO-Operation Reserach*, 45:101–129.
- Carvalho, I. A., Gomes, M. A., Noronha, T. F., Duhamel, C., e Vieira, L. F. M. (2015a). Formulação e heurística para o problema da Árvore de caminhos mais curtos robusta. In *XLVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*.
- Carvalho, I. A., Gomes, M. A., Noronha, T. F., Duhamel, C., e Vieira, L. F. M. (2015b). Heurística para o problema de construção de Árvore de caminhos mais curtos robusta para a internet das coisas. In *XIV Workshop de Desempenho de Sistemas Computacionais e de Comunicação*.
- Carvalho, I. A., Noronha, T. F., Duhamel, C., e Vieira, L. F. M. (2016). A scenario based heuristic for the robust shortest path tree problem. In *VIII Conference on Manufacturing, Modelling, Management & Control*.
- Coco, A. A., Júnior, J. C. A., Noronha, T. F., e Santos, A. C. (2014). An integer linear programming formulation and heuristics for the minmax relative regret robust shortest path problem. *Journal of Global Optimization*, 60(2):265–287. ISSN 0925-5001.
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., e Stein, C. (2009). Single-source shortest paths. In *Introduction to Algorithms*, p. 580–619. MIT Press Cambridge.
- Dijkstra, E. W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische mathematik*, 1(1):269–271.
- Garey, M. e Johnson, D. (1979). Computers and intractability: a guide to the theory of np-completeness.
- Giusto, D., Lera, A., Morabito, G., e Atzori, L. (2010). *The Internet of Things*. Springer.
- Karaşan, O. E., Yaman, H., e Pinar, M. C. (2001). The robust shortest path problem with interval data. Technical report, Bilkent University, Department of Industrial Engineering.
- Karp, R. M. (1972). *Reducibility among combinatorial problems*. Springer.
- Kasperski, A., Kobylański, P., Kulej, M., e Zieliński, P. (2005). *Minimizing maximal regret in discrete optimization problems with interval data*, p. 193–208. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa.
- Kouvelis, P. e Yu, G. (1997). *Robust discrete optimization and its applications*, volume 14 of *Nonconvex optimization and its applications*. Springer.
- Montemanni, R. e Gambardella, L. M. (2005a). A branch and bound algorithm for the robust spanning tree problem with interval data. *European Journal of Operational Research*, 161(3): 771–779.
- Montemanni, R. e Gambardella, L. M. (2005b). The robust shortest path problem with interval data via benders decomposition. *4OR*, 3(4):315–328.

- Montemanni, R., Gambardella, L. M., e Donati, A. V. (2004). A branch and bound algorithm for the robust shortest path problem with interval data. *Operations Research Letters*, 32(3):225–232.
- Nie, Y. e Wu, X. (2009). Shortest path problem considering on-time arrival probability. *Transportation Research Part B*, 43:597–613.
- Salazar-Neumann, M. (2007). The robust shortest path and the single-source shortest path problems: interval data. In *Annales Du LAMSADE*.
- Shelby, Z. e Bormann, C. (2011). *6LoWPAN: The wireless embedded Internet*, volume 43 of *Wiley Series in Communications Networking & Distributed Systems*. John Wiley & Sons.
- Spall, J. C. (2003). *Introduction to Stochastic Search and Optimization*. Wiley.
- Vasseur, J., Agarwal, N., Hui, J., Shelby, Z., Bertrand, P., e Chauvenet, C. (2011). Rpl: The ip routing protocol designed for low power and lossy networks. *Internet Protocol for Smart Objects (IPSO) Alliance*.
- Winter, T. (2012). Rpl: Ipv6 routing protocol for low-power and lossy networks. Technical report, Internet Engineering Task Force.
- Wu, B. Y. e Chao, K. (2004). Shortest-paths trees. In *Spanning Trees and Optimization Problems*, p. 23–40. CRC Press.