

Abordagem para o Problema de Roteamento de Veículos com Empacotamento Bidimensional

Lorrany Cristina da Silva e Thiago Alves de Queiroz*

Unidade de Matemática e Tecnologia – UFG/Regional Catalão,
Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120, CEP: 75704-020, Catalão-GO, Brasil.
e-mail: *crisrina_lorrany@yahoo.com.br*
taq@ufg.br

Franklina Maria Bragion de Toledo

*Departamento de Matemática Aplicada e Estatística – USP/ São Carlos,
Av. Trabalhador São-Carlense, 400, CEP: 13560-970, São Carlos-SP, Brasil.
email: *fran@icmc.usp.br*

RESUMO

Investiga-se um modelo de programação linear inteira para o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional. No problema estudado é considerado que o descarregamento dos itens não precisa respeitar a sequência dos clientes visitados na rota. Para resolvê-lo, usam-se rotinas de separação para cortes de capacidade e empacotamento, os quais são inseridos durante a otimização. Para analisar a eficiência do modelo foram realizados experimentos computacionais utilizando instâncias da literatura. Os resultados obtidos mostram que o modelo é competitivo com a literatura.

PALAVRAS-CHAVE. Problema de Roteamento de Veículos, Empacotamento Bidimensional, Restrições de Capacidade, Planos de Corte.

L&T – Logística e Transportes, OC – Otimização Combinatória

ABSTRACT

We investigate an integer linear programming model for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. The version of the problem on study considers that the unloading operations do not need to respect the sequence of customers visited on the route. To solve the model, we use separate routines for cuts of capacity and packing, which are inserted during the optimization. To analyze the efficiency of the model, computational experiments were performed over instances from the literature. The results obtained show that the model is competitive with the literature.

KEYWORDS. Vehicle Routing Problem, Two-dimensional Packing, Capacity constraints, Cutting Planes.

L&T – Logistics and Transport, CO – Combinatorial Optimization

1. Introdução

Esse trabalho lida com o problema de roteamento de veículos com restrições de capacidade e restrições de empacotamento bidimensional, referenciado por [Iori et al., 2007] como *Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints* (2L-CVRP). O 2L-CVRP é uma combinação de dois problemas de otimização combinatória: o problema de roteamento de veículos com restrições de capacidade (*Capacitated Vehicle Routing Problem - CVRP*) e o problema de empacotamento em *bins* bidimensionais (*Two-Dimensional Bin Packing Problem - 2BPP*) [Wei et al., 2015]. Este problema tem como objetivo obter rotas de custo mínimo, visando atender a demanda de todos os clientes, em que cada cliente tem uma demanda por itens retangulares (bidimensionais) e a demanda dos clientes de uma mesma rota precisa ser empacotada de forma viável no veículo de carga.

A abordagem do CVRP e 2BPP de forma integrada possui aplicações práticas no ramo logístico, pois a forma dos itens sendo transportados passa a ser tratada, ao invés de apenas olhar a quantidade da demanda (unidimensional) sem saber se ela de fato pode ser empacotada. A aplicação da versão bidimensional de carregamento surge quando não se pode empilhar um item sobre outro ou pela própria forma do item.

O 2L-CVRP é um problema NP-difícil, pois combina dois problemas NP-difíceis [Garey e Johnson, 1979]. Além disso, é um problema pouco estudado, em especial, quanto ao desenvolvimento de métodos exatos para a sua resolução. A primeira abordagem exata foi publicada por [Iori et al., 2007], que resolveram instâncias com até 35 clientes utilizando um algoritmo exato do tipo *branch-and-cut* (B&C) combinado com algumas heurísticas e limitantes para melhorar seu desempenho. [Azevedo, 2009] também desenvolveu um algoritmo do tipo B&C, que contém um algoritmo exato para o empacotamento bidimensional, para o 2L-CVRP, além de adaptar desigualdades válidas. [Souza, 2013] propôs duas heurísticas híbridas e um algoritmo de geração de colunas, sendo que os métodos híbridos encontraram a solução ótima para algumas instâncias conhecidas. [Côté et al., 2015] resolveram o 2L-CVRP de forma exata trazendo novos métodos para resolver o problema de empacotamento, assim checando rapidamente a viabilidade da rota.

Heurísticas para a resolução do 2L-CVRP são encontradas com mais facilidade, pois conseguem resolver problemas com maior número de clientes e de itens, porém sem garantia da solução ótima. [Gendreau et al., 2008] desenvolveram uma meta-heurística do tipo busca Tabu, enquanto [Fuellerer et al., 2009] apresentaram resultados satisfatórios utilizando um algoritmo de colônia de formigas. [Duhamel et al., 2011] propuseram uma heurística que combina GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) com uma busca local evolucionária.

Neste trabalho, busca-se investigar um modelo de programação linear inteira para resolver o 2L-CVRP. O modelo parte da formulação básica proposta em [Iori et al., 2007] com a escrita de [Côté et al., 2015], além disso são considerados cortes válidos inseridos durante a otimização, os quais são construídos a partir de rotinas de separação. As contribuições deste trabalho recaem na forma de resolver o problema de empacotamento em cada rota. Em trabalhos anteriores, a literatura observou que o gargalo do 2L-CVRP está no empacotamento associada a rota, tal que [Côté et al., 2015] usaram/propuseram várias rotinas para resolver tal problema. Assim, baseando-se nas rotinas de [Côté et al., 2015], propõe-se formulações simples, ao mesmo tempo que eficientes, para lidar com o empacotamento.

A próxima seção define formalmente o 2L-CVRP, enquanto a Seção 3 descreve o modelo inteiro usado, bem como as melhorias propostas. Os experimentos computacionais são discutidos na Seção 4 e as considerações finais são apresentadas na Seção 5.

2. Descrição do 2L-CVRP

Seja um grafo não direcionado completo $G = (V, E)$, em que V é o conjunto de $n + 1$ vértices correspondentes ao depósito (vértice 0) e aos clientes ($j = 1, \dots, n$) e E é o conjunto de arestas entre os nós, definido como $E = \{\{i, j\} : i, j \in V, i < j\}$. A cada aresta $(i, j) \in E$ é

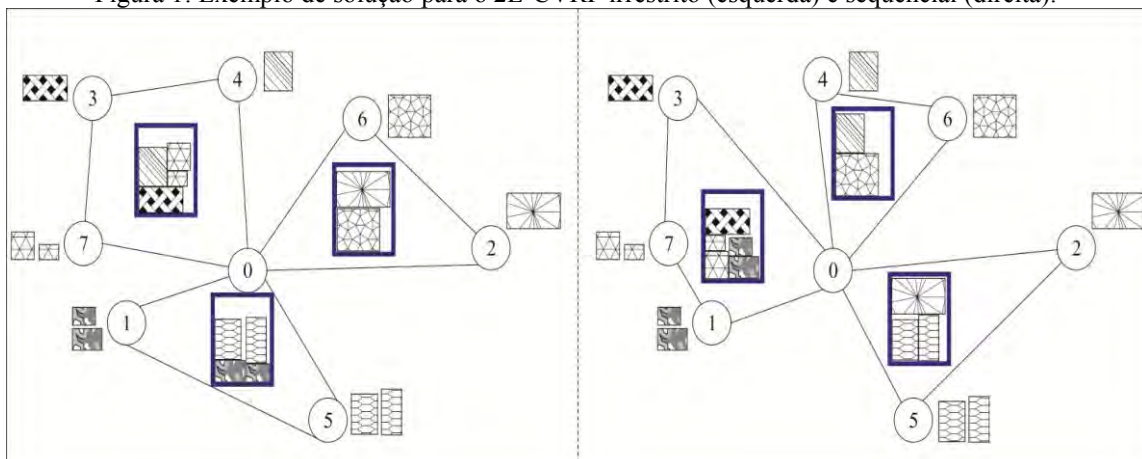
atribuído um custo não negativo c_{ij} para percorrê-la. Um conjunto K de veículos idênticos com capacidade de carga P está disponível no depósito. As dimensões retangulares da base (superfície) do contêiner dos veículos são: L (largura) e A (comprimento) com área $At = L \cdot A$.

Cada cliente j ($j = 1, \dots, n$) possui um conjunto de M_j itens retangulares. Cada item k de cada cliente j possui largura l_j^k , comprimento a_j^k e peso p_j^k com $k = 1, \dots, |M_j|$. Assim, a área total dos itens do cliente j é $at_j = \sum_{k=1}^{|M_j|} l_j^k a_j^k$, e o peso total é dado por $pt_j = \sum_{k=1}^{|M_j|} p_j^k$. Considera-se que para um dado cliente, todos os seus itens devem ser carregados no mesmo veículo e o cliente deve ser visitado exatamente uma vez na rota. Além disso, o 2L-CVRP estudado considera que:

- o número de rotas deve ser menor ou igual ao número de veículos disponíveis;
- as rotas devem iniciar e terminar no depósito;
- não são permitidas rotas com um único cliente, isto é, as rotas precisam ter dois ou mais clientes;
- a soma dos pesos totais dos clientes de uma rota não podem exceder a capacidade do veículo. O mesmo se aplica nas áreas totais;
- o cliente só deve ser visitado por um veículo uma única vez em que todos os seus itens são entregues;
- os itens devem ser empacotados no veículo sem sobreposição e respeitando as dimensões (largura L e comprimento A) do veículo. Considera-se que os itens têm orientação fixa e devem ser empacotados pelo seu canto inferior esquerdo;
- as dimensões dos itens e do recipiente, isto é, largura e comprimento, são, sem perda de generalidade, valores inteiros positivos.

A versão irrestrita do problema é considerada neste trabalho, pela qual não considera que os itens devem respeitar a ordem de descarregamento em relação a rota, ou seja, pode ocorrer o remanejamento da carga durante o descarregamento dos itens. Na prática, esse caso é considerado quando no descarregamento é permitido rearranjar a disposição dos itens. A Figura 1 exemplifica o problema com sete clientes, sendo que a figura da esquerda traz o caso irrestrito, enquanto a da direita representa o caso sequencial para os itens sendo retirados pela parte de trás do veículo. A versão sequencial pode levar a uma solução de pior qualidade, porém evita o remanejamento dos itens.

Figura 1: Exemplo de solução para o 2L-CVRP irrestrito (esquerda) e sequencial (direita).



3. Modelo para o 2L-CVRP

Esta seção traz o modelo de programação linear inteira para resolver o 2L-CVRP, baseado na formulação de [Iori et al., 2007] com a escrita de [Côté et al., 2015].

3.1. Modelo de Programação Linear Inteira

Seja x_{ij} uma variável definida como binária, sendo 1 quando se percorre a aresta $\{i, j\} \in E$, e 0 caso contrário. Dado um subconjunto de clientes $S \subseteq V$, S_{inv} uma rota cujo o empacotamento não é viável e $r(S)$ o menor número de veículos necessários para transportar os itens dos clientes em S , a formulação do 2L-CVRP é dada por:

Minimizar:

$$\sum_{i \in V \setminus \{n\}} \sum_{j \in V: j > i} c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in V: i < j} x_{ij} + \sum_{h \in V: h > j} x_{jh} = 2, \quad \forall j \in V \setminus \{0\} \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} x_{0j} \leq 2K \quad (3)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S: j > i} x_{ij} \leq |S| - r(S), \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, S \neq \emptyset \quad (4)$$

$$\sum_{i \in S_{inv}} \sum_{j \in S_{inv}: j > i} x_{ij} \leq |S_{inv}| - 1, \quad \forall S_{inv} \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall \{i, j\} \in E: i < j \quad (6)$$

A função objetivo (1) minimiza o custo total da viagem. As restrições em (2) garantem que cada cliente seja visitado exatamente uma vez, já a restrições em (3) impõem que seja utilizado um número menor ou igual ao de veículos disponíveis para suprir a demanda dos clientes. As restrições em (4) estão associadas a um conjunto de desigualdades de capacidade e de conectividade garantindo que as rotas sejam conexas e a capacidade do veículo não seja violada. As restrições em (5) são para assegurar que os itens em cada rota estejam completamente organizados dentro da superfície do veículo e sem sobreposição, ou seja, a rota contém um empacotamento viável dos itens dos clientes. Por fim, as restrições em (6) indicam que as variáveis são binárias, de modo que não se admite rotas com um único cliente.

O 2L-CVRP é resolvido por um algoritmo B&C. Inicialmente, o modelo é resolvido sem as restrições (4) e (5), já que a quantidade de restrições deste tipo é da ordem exponencial, tal que elas são adicionadas como planos de corte. Detecta-se a violação das restrições (4) e (5) a partir de rotinas de separação discutidas nas próximas subseções.

3.1.1. Restrição de Capacidade e Conectividade

Segundo [Cornuéjols e Harche, 1993], nas restrições em (4), o cálculo de $r(S)$ é difícil, pois é necessário achar a solução ótima do problema de empacotamento em bins (*Bin Packing Problem*). Portanto, considera-se as desigualdades de capacidade arredondadas desenvolvidas em [Lysgaard et al., 2004], e implementadas no pacote CVRPSEP disponibilizado pelos próprios autores. As desigualdades de capacidade arredondadas consistem no tratamento do cálculo do $r(S)$, substituindo-o por um limitante simples de peso e área, aqui denotado por $r'(S)$.

A rotina para checar essa desigualdade é chamada quando uma solução fracionária ou inteira é obtida a partir da resolução da relaxação em cada um dos nós da árvore de enumeração do 2L-CVRP. Assim, encontram-se cortes para eliminar as soluções que não atendem a desigualdade em (4). Os seguintes procedimentos foram considerados ao usar o CVRPSEP:

Procedimento 1: Seja $G^* = (V, E^*)$ o grafo formado a partir da solução ótima x^* do nó atual da árvore de enumeração, com $E^* = \{\{i, j\} \in E: x_{ij}^* > 0\}$. A rotina do CVRPSEP considera a demanda de peso dos clientes para encontrar um conjunto S , a partir da aplicação de

quatro heurísticas, que viole o lado direito da desigualdade em (4) para $r'(S) = \left\lceil \left\{ \sum_{j \in S} pt_j^k / P \right\} \right\rceil$, que é o número mínimo de veículos para atender a demanda de peso dos clientes em S .

Procedimento 2: De forma análoga ao Procedimento 1, propõe-se considerar a área dos itens e a relaxação de $r(S)$ dada por $r'(S) = \left\lceil \left\{ \sum_{j \in S} at_j^k / P \right\} \right\rceil$, uma vez que a rota deve ser viável tanto em termos de capacidade total de peso e de área.

3.1.2. Restrição de Empacotamento

Para as restrições em (5), que verificam se uma dada rota possui empacotamento viável para os itens dos clientes da rota, realiza-se a resolução do problema de empacotamento ortogonal bidimensional (*Two-dimensional Orthogonal Packing Problem - 2OPP*). O 2OPP verifica se o conjunto de itens por ser organizado de forma ortogonal e sem sobreposição, além de respeitar as dimensões do recipiente.

Como o objetivo é encontrar uma solução ótima para o 2L-CVRP, considera-se a resolução de um modelo para o 2OPP. As restrições de (7) a (9) são propostas neste trabalho para resolver o 2OPP dado os clientes em uma rota S . Seja y_{kpq} uma variável binária que recebe o valor 1 se o item k é empacotado na posição (p, q) , e 0 caso contrário. Também, sejam l_j^k e a_j^k a largura e o comprimento do item k do cliente $j \in S$, respectivamente, enquanto \min_L e \min_A representam a menor largura e o menor comprimento dentre os itens na rota.

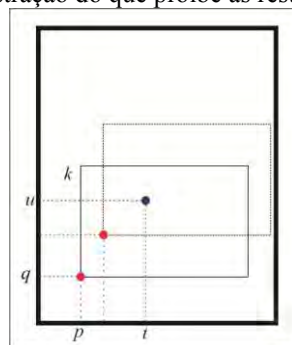
$$\sum_{j \in S} \sum_{k \in M_j} \sum_{\{p=\{0, \dots, L-l_j^k\} | t-l_j^k+1 \leq p \leq t\}} \sum_{\{q=\{0, \dots, A-a_j^k\} | u-a_j^k+1 \leq q \leq u\}} y_{kpq} \leq 1, \quad \forall = 0, \dots, L - \min_L, u = 0, \dots, A - \min_A \quad (7)$$

$$\sum_{p=0}^{L-l_j^k} \sum_{q=0}^{A-a_j^k} y_{kpq} = 1, \quad \forall j \in S, k \in M_j \quad (8)$$

$$y_{kpq} \in \{0,1\}, \quad \forall j \in S, k \in M_j, p = 0, \dots, L - l_j^k, q = 0, \dots, A - a_j^k \quad (9)$$

As restrições em (7) garantem que não ocorra a sobreposição entre os itens empacotados, como mostra a Figura 2, em que cada ponto (t, u) no recipiente só pode ser coberto por um único item k empacotado em algum outro ponto (p, q) . As restrições em (8) asseguram que todos os itens dos clientes na rota S devem ser empacotados, sendo o domínio das variáveis expressos em (9). Note que não há função objetivo, pois se trata de um teste de viabilidade.

Figura 2: Ilustração do que proíbe as restrições em (7).



Como a resolução do modelo para o 2OPP pode ser bastante cara do ponto de vista computacional, propõe-se resolver primeiramente uma formulação relaxada associada ao *One-dimensional Contiguous Bin Packing Problem*, denominado por CBP, que é mais barata computacionalmente. Esta relaxação, proposta deste trabalho, objetiva verificar se o empacotamento é de fato inviável e, assim, inserir uma desigualdade em (5). [Côté et al., 2014, 2015] propuseram uma formulação mais elaborada e que resolve por completo o *One-dimensional Contiguous Bin Packing Problem*, fato este que não ocorre com a formulação das eqs. (10) a (12), que é uma relaxação para o CBP.

Assim, as restrições em (10) a (12) consistem numa relaxação para o CBP dado os clientes em S . Seja e_{kt} uma variável binária que recebe 1 se o item k é empacotado na coordenada t , e 0 caso contrário. Seja $D_k(S, t)$ os pontos t' da forma que o item k do cliente $j \in S$ empacotado em t' cobre t .

$$\sum_{j \in S} \sum_{k \in M_j} \sum_{\{t' \in D_k(S, t) | t - l_j^k + 1 \leq t' \leq t\}} l_j^k e_{kt'} \leq L, \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, L\} \quad (10)$$

$$\sum_{t \in \{0, 1, \dots, L - l_j^k\}} e_{kt} = 1, \quad \forall j \in S, \forall k \in j \quad (11)$$

$$e_{kt} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in S, \forall k \in M_j, \forall t \in \{0, 1, \dots, L - l_j^k\} \quad (12)$$

As restrições em (10) asseguram que a soma da largura dos itens que cobrem o ponto t na direção da largura seja menor ou igual a L , para todo t . Já as restrições em (11) garantem que todos os itens sejam empacotados em algum ponto na direção da largura. Aqui também não se considera uma função objetivo, pois se trata apenas de um teste para verificar se os itens empacotados respeitam a largura do veículo. Observe que as mesmas restrições podem ser consideradas para a direção do comprimento do veículo.

Procedimento 3: Aplicado quando uma solução inteira é encontrada na árvore de enumeração e nenhum dos procedimentos anteriores teve sucesso em gerar algum corte. Primeiro, resolve-se a relaxação para o CBP considerando restrições para a largura e o comprimento. Caso seja retornado que o modelo é inviável, insere-se a desigualdade em (5). Por outro lado, se a solução for viável, então o modelo para o 2OPP é resolvido para de fato comprovar se a rota tem um empacotamento viável (ou inserir um corte).

4. Experimentos Computacionais

Apresenta-se adiante os resultados computacionais da resolução do 2L-CVRP sobre instâncias da literatura. Além disso, faz-se a devida comparação com os resultados de [Azevedo, 2009], uma vez que o autor aborda o 2L-CVRP no caso irrestrito senão resolvido por um método exato, enquanto [Iori et al., 2007] não apresenta resultados para o caso irrestrito e [Wei et al., 2015] considera o caso irrestrito, porém considerando custos reais para as arestas. Por isso, faz-se as devidas comparações apenas com [Azevedo, 2009] que, ao melhor do nosso conhecimento, é o trabalho mais recente que resolve 2L-CVRP irrestrito de forma exata.

O modelo foi codificado em linguagem C++ utilizando o *framework* para B&C presente no pacote de otimização *Gurobi Optimizer* na versão 6.5.1. Os testes computacionais foram realizados em um computador com processador Intel Core i7-4790K de 4.0 GHz, 32 GB de memória RAM e sistema operacional Linux Ubuntu 14.04 LTS.

Foram atribuídos como critério de parada para cada instância: 7.200 segundos como tempo limite para a execução do B&C, conforme sugere [Iori et al., 2007], 300 segundos como tempo limite para resolver o CBP e 300 segundos como tempo limite para resolver o 2OPP. [Azevedo, 2009] estipulou 5.400 segundos como tempo limite e usou uma máquina diferente da usada aqui para os testes, por isso as informações de tempo são apenas para situar o leitor.

Foram consideradas 60 instâncias¹ com número de clientes n entre 15 a 35 e o número total de itens M de 15 a 114. As instâncias estão divididas em 12 conjuntos com diferentes classes e cada qual fornecem: o número de clientes, a quantidade de veículos disponíveis, o número de itens, a capacidade, o comprimento e a largura do recipiente que o veículo transporta, as coordenadas, a capacidade e as dimensões dos itens de cada cliente. O custo c_{ij} de cada aresta é dado pela distância euclidiana entre os vértices pegando apenas o valor inteiro truncado, em que [Azevedo, 2009] também considera os custos desta forma.

As Tabelas 1 e 2 trazem informações como o nome de cada instância, a classe, a quantidade de clientes (n), a quantidade total de itens (M), a quantidade de veículos (K), a quantidade de veículos realmente utilizados na solução encontrada (K Us.); os resultados de [Azevedo, 2009], ou seja, o número de cortes totais inseridos, o número de cortes só de empacotamento, o tempo total gasto em segundos e o valor da solução; os resultados aqui encontrados, ou seja, a quantidade de cortes inserida ao usar o CVRPSEP, a quantidade de cortes após resolver o CBP, a quantidade de cortes após resolver o 2OPP, o tempo total gasto, em segundos, pelo B&C, pelo 2OPP, pelo CBP e apenas para resolver o roteamento (sem os cortes), e o valor da solução obtido pelo B&C.

A Tabela 1 apresenta os resultados dos 12 conjuntos de instâncias considerando apenas a Classe 1, em que cada cliente solicita apenas um item de largura e comprimento iguais a um. Nestas instâncias, todas as rotas são viáveis quanto ao empacotamento, logo se resolve apenas o CVRP. Por este motivo, o número de cortes associado ao empacotamento é igual a zero nessas instâncias, tendo apenas cortes gerados pelo CVRPSEP.

Das 12 instâncias, para 11 foram encontradas soluções iguais a melhor solução conhecida, correspondendo a um percentual aproximado de 92%. Na instância E023-05s, observa-se que o valor encontrado foi menor do que o valor reportado na literatura. Isso aconteceu pelo fato da solução da literatura considerar a restrição (3) tomada com igualdade, ou seja, o número de veículos usados deve ser exatamente K . Como este trabalho considera a restrição com sinal menor ou igual, utilizou-se 3 dos 5 veículos disponíveis. O tempo gasto, em média, por [Azevedo, 2009] foi de 16,58 segundos, enquanto o tempo do algoritmo B&C foi de 4,49, em média. Como comentado, os tempos são reportados apenas para fins de conhecimento, pois as máquinas usadas nos experimentos são diferentes.

Tabela 1: Comparação dos resultados com [Azevedo, 2009] para a Classe 1.

Instâncias (nxm)	Cl	n	M	K	K Us.	Cortes Azev.	Temp Azev.	Solução Azev.	Cortes CVRPSEP	Tempo B&C	Tempo 2OPP	Tempo CBP	Tempo Rot.	Solução B&C
E016-03m	1	15	15	3	3	529	0,63	273	309	0,47	0,18	0	0,29	273
E016-05m	1	15	15	5	5	284	0,36	329	253	3,18	1,64	0,03	1,51	329
E021-04m	1	20	20	4	4	2.056	1,76	351	669	2,92	1,2	0,01	1,71	351
E021-06m	1	20	20	6	6	243	0,26	423	510	2	0,75	0,01	1,24	423
E022-04g	1	21	21	4	4	101	0,14	367	78	1,38	0,56	0,01	0,81	367
E022-06m	1	21	21	6	6	1.043	1,05	488	693	2,32	1,02	0,01	1,29	488
E023-03g	1	22	22	3	3	11	0,09	558	96	0,33	0,16	0	0,17	558
E023-05s	1	22	22	5	3	2	0,1	657	96	0,71	0,35	0	0,36	558
E026-08m	1	25	25	8	8	901	1,54	609	448	2,53	1,15	0,01	1,37	609
E030-03g	1	29	29	3	3	1.435	2,33	524	993	8,8	2,33	0,02	6,45	524
E033-03n	1	32	32	3	3	30	0,14	1991	270	2,5	1,12	0,12	1,26	1991
E036-11h	1	35	35	11	11	118.124	190,55	682	4.239	26,69	2,5	0,02	24,17	682
Média:						16,58				4,49				

¹ <http://www.or.deis.unibo.it/>

Na Tabela 2 foram consideradas as demais classes contendo entre 15 a 35 clientes. Nas Classes de 2 a 5, as dimensões e a quantidade de itens foram distribuídas em intervalos determinados por [Iori et al., 2007]. Os valores em negrito são aqueles iguais aos valores ótimos conhecidos na literatura e correspondem a 38 das 48 instâncias, ou seja, para aproximadamente 79% das instâncias. Vale comentar que [Azevedo, 2009] não conseguiu encontrar a solução ótima para 11 instâncias. Além disso, o B&C retornou para 3 instâncias um valor de solução menor do que o valor conhecido, pois aqui se considera que o número de veículos usados pode ser menor do que o número efetivamente disponível.

O tempo computacional gasto por [Azevedo, 2009] foi, em média, de 388,23 segundos. Para o algoritmo aqui desenvolvido, este tempo foi de 1.213,62 segundos, em média. Notou-se que em todas as instâncias, o tempo computacional utilizado para o empacotamento foi significativamente maior do que o efetivamente gasto com a parte de roteamento, o que de fato corrobora para as conclusões da literatura sobre ele ser o maior gargalo do 2L-CVRP.

Em média, [Azevedo, 2009] inseriu 490,70 cortes para o empacotamento, já o algoritmo proposto inseriu apenas um corte após resolver o 2OPP, dada as 48 instâncias. Isso ocorreu devido a resolução do CBP primeiramente, o que permitiu inserir uma média de 56,46 cortes. No total, foram inseridos em média 3.080,58 cortes pelo B&C, enquanto [Azevedo, 2009] adicionou 22.007,5 cortes.

Os valores marcados com (*) indicam as instâncias para as quais foram alcançadas o tempo limite estabelecido para checar a viabilidade do empacotamento, observando que na instância E021-04m.3, mesmo atingindo esse limite, conseguiu-se encontrar uma solução igual a melhor solução conhecida na literatura. Já o valor marcado com (**) indica que o B&C atingiu o tempo limite imposto, de forma que não se pode afirmar que a solução é ótima para a instância, resultando assim em um valor maior (ou até menor do que o ótimo conhecido, uma vez que se tenha utilizado menos veículos). Vale destacar que para a instância E033-03n.4, o tempo limite foi atingido, além do tempo máximo estabelecido para checar a viabilidade do empacotamento, assim não é possível afirmar se a dada rota sendo analisada é inviável ou não.

5. Conclusões

Este trabalho investigou um modelo de programação linear inteira para resolver o 2L-CVRP, que busca determinar rotas para atender clientes de acordo com as suas demandas por itens retangulares. Foi desenvolvido um algoritmo *branch-and-cut* a partir da resolução de um modelo de programação linear inteira. Para tanto, propôs-se novas rotinas de separação, em particular, para lidar com a viabilidade do empacotamento de cada rota.

Testes computacionais foram realizados em 60 instâncias da literatura com os resultados sendo comparados com [Azevedo, 2009], já que tal autor aborda o 2L-CVRP na versão irrestrita, considera as mesmas instâncias e utiliza um método.

Observou-se que para as instâncias da Classe 1, encontrou-se para aproximadamente 92% das instâncias a mesma solução reportada por [Azevedo, 2009], além de ter sido possível melhorar a solução de uma instância. Já para as instâncias das demais classes, conseguiu-se encontrar a solução ótima para 38 das 48 instâncias analisadas, resolvendo instâncias que [Azevedo, 2009] não conseguiu resolver (devido ao tempo limite que ele impôs), além de melhorar a solução de 3 instâncias, por permitir usar menos veículos que o disponível. Assim, resolução da relaxação do CBP antes de resolver diretamente o 2OPP permitiu que o B&C obtivesse tais resultados competitivos.

Trabalhos futuros devem focar no desenvolvimento de abordagens para lidar com o empacotamento de cada rota, uma vez que ele é um dos principais gargalos ao resolver o 2L-CVRP. Outras direções apontam para o estudo e desenvolvimento de novas desigualdades válidas.

Agradecimentos. Os autores agradecem o apoio financeiro recebido do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG).

Tabela 2: Comparação com os resultados de [Azevedo, 2009] para as classes de 2 a 5.

Instância (nxm)	CI	n	M	K	K Us.	Cortes		Solução Azev.	Cortes		Solução B&C	Tempo Rot.	Tempo CBP	Tempo 2OPP	Tempo B&C	Cortes 2OPP	Cortes CBP	Cortes CVRPSEP	Solução B&C
						AZEV.	Emp. Azev.		Azev.	Azev.									
E016-03m	2	15	24	3	3	2.049	78	4,8	273	965	4	0	97,87	92,42	2,06	3,39	273	273	
	3	15	31	3	3	2.943	75	20,11	279	1.035	5	0	502	484,7	13,06	4,24	279	279	
	4	15	37	4	4	1	0	0,08	277	115	0	0	16,47	15,3	0,1	1,07	277	277	
	5	15	45	4	4	-	-	5,400	-	237	2	0	398,1	360,3	31,79	6,01	273	273	
E016-05m	2	15	25	5	5	284	0	0,36	329	253	0	0	9,1	7,45	0,05	1,6	329	329	
	3	15	31	5	5	6.256	124	7,72	347	1.480	4	0	90,73	80,89	0,62	9,22	347	347	
	4	15	40	5	5	284	0	0,45	329	253	0	0	156,7	152,5	0,54	3,66	329	329	
	5	15	48	5	5	284	0	16,33	329	253	0	0	18,29	14,77	0,3	3,22	329	329	
E021-04m	2	20	29	5	5	12.227	10.245	42,59	381	4.767	146	0	912,5	797,2	3,38	111,92	381	381	
	3	20	46	5	5	24.543	3.954	223,45	387	1.744	9	0	1.439	1.390	32,32	16,68	387 (*)	387 (*)	
	4	20	44	5	4	-	-	5,400	-	1.043	4	0	954,9	923,6	19,57	11,73	353	353	
	5	20	49	5	4	105	0	0,22	369	211	0	0	7,77	5,79	0,12	1,86	351	351	
E021-06m	2	20	32	6	6	243	0	0,24	423	510	0	0	12,73	10,95	0,08	1,7	423	423	
	3	20	43	6	6	243	0	0,32	423	510	0	0	42,27	40,09	0,45	1,73	423	423	
	4	20	50	6	6	16.146	43	54,49	438	1.126	0	0	237,4	228,9	0,72	7,78	438	438	
	5	20	62	6	6	243	0	1,13	423	510	0	0	10,81	8,56	0,22	2,03	423	423	
E022-04g	2	21	31	4	4	101	0	0,12	367	78	0	0	18,6	16,87	0,09	1,64	367	367	
	3	21	37	4	4	197	12	0,38	373	245	5	0	70,27	62,1	1,43	6,74	373	373	
	4	21	41	4	4	397	6	3,32	377	139	1	0	17,58	15,57	0,21	1,8	377	377	
	5	21	57	5	4	47	0	0,11	389	92	0	0	9,15	7,5	0,16	1,49	367	367	
E022-06m	2	21	33	6	6	1.385	4	1,35	488	694	0	0	31,61	28,18	0,14	3,29	488	488	
	3	21	40	6	6	1.408	11	3,74	489	993	1	0	25,38	23,03	0,16	2,19	489	489	
	4	21	57	6	6	1.022	6	1,13	489	927	0	0	46,88	43,49	0,32	3,07	489	489	
	5	21	56	6	6	1.043	0	1	488	693	0	0	7,12	6,13	0,09	0,9	488	488	

Instância (nxm)	CI	n	M	K	K Us.	Cortes AZEV.	Cortes Emp. AZEV.	Tempo AZEV.	Solução AZEV.	Cortes CVR/SEP	Cortes CBP	Cortes 2OPP	Tempo B&C	Tempo 2OPP	Tempo CBP	Tempo Rot.	Valor Solução	
E023-03g	2	22	32	5	5	-	-	-	-	3.229	59	0	317,30	285	2,62	29,68	715	
	3	22	41	5	4	959	372	5,28	685	1.022	51	0	7.851	7.591	239,2	20,8	669(**)	
	4	22	51	5	4	-	-	-	-	1.027	24	0	220,8	170,5	39,01	11,29	692	
	5	22	55	6	4	107	52	514,71	742	1.686	0	0	213,1	206,6	1,48	5,02	646	
	5	22	29	5	-	392	1.021	4,55	680	11.194	784	0	7.225	5.583	252	1.390	677(**)	
E026-08m	3	22	42	5	4	-	-	-	-	1.771	18	1	526,9	509,6	4,27	13,03	728	
	4	22	48	5	4	-	-	-	-	1.273	1	0	370,6	349,6	14,42	6,58	683	
	5	22	52	6	3	-	-	-	-	415	0	0	589,2	285,2	301,5	2,5	600	
	2	25	40	8	8	901	0	1,58	609	448	0	0	4,11	3,34	0,03	0,74	609	
	3	25	61	8	8	901	0	1,55	609	448	0	0	25,74	23,3	0,19	2,25	609	
E030-03g	4	25	63	8	8	45.059	77	127,08	626	1.837	6	0	44,2	33,6	0,66	9,94	626	
	5	25	91	8	8	901	0	1,59	609	448	0	0	16,01	12,57	0,33	3,11	609	
	2	29	43	6	5	-	-	-	-	11.769	849	0	5.207	3.166	153,9	1.887,1	677	
	3	29	49	6	5	-	-	-	-	4.150	75	0	2045	1790	187,9	67,1	604	
	4	29	72	7	6	-	-	-	-	1.337	6	0	778,7	754	15,91	8,79	696	
E033-03n	5	29	86	7	5	-	-	-	-	1.835	2	0	5.920	4.438	1.467	15	665	
	2	32	44	7	6	-	-	-	-	50.159	493	0	7.200	5.134	143,1	1.922,9	2.581(**)	
	3	32	56	7	6	-	-	-	-	9.128	112	0	4.936	3.923	172,8	840,2	2.421(*)	
	4	32	78	7	6	-	-	-	-	2.365	45	0	7.278	6.692	585,2	0,8	2.019(**)	
	5	32	102	8	5	-	-	-	-	994	0	0	1.936	1.030	902	4	2.320(*)	
E036-11h	2	35	56	11	11	203.979	56	500,33	682	4.239	0	0	40,4	15,93	0,15	24,32	682	
	3	35	74	11	11	56.634	1	65,93	682	6.043	1	0	94,74	52,39	0,65	41,7	682	
	4	35	93	11	11	226.840	56	993,19	687	5.228	3	0	218	176,3	1,93	39,77	687	
	5	35	114	11	11	118.124	0	190,51	682	4.239	0	0	62,6	30,51	0,78	31,31	682	
			Média		22.007,515	490,70	388,23			3.024,10	56,46	0,02	1.213,62					Média dos cortes:
																		3.080,58

Referências

- Azevedo, B. L. P. (2009). *Uma abordagem exata para o problema de roteamento de veículos capacitados com restrições bidimensionais de carregamento*. 71 f. Dissertação de mestrado – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- Cornuéjols, G. e Harche, F. (1993). Polyhedral study of the capacitated vehicle routing. *Mathematical Programming*, 60:21-52.
- Côté, J.F., Guastaroba, G, e Speranza, M.G. (2015). The value of integrating loading and routing. Technical Report *CIRRELT*, CIRRELT-2015-31.
- Côté, J.F., Gendreau, M. e Potvin, J.Y. (2014). An exact algorithm for the two-dimensional orthogonal packing problem with unloading constraints. *Operations Research*, 62:1126-1141.
- Duhamel, C., Lacomme, P., Quilliot, A. e Toussaint, H. (2011). A multi-start evolutionary local search for the two-dimensional loading capacitated vehicle routing problem. *Computers and Operations Research*, 38(3):617-640.
- Fuellerer, G., Doerner, K., Hartl, R. e Iori, M. (2009). Ant colony optimization for the two-dimensional loading vehicle routing problem. *Computers and Operations Research*, 36(3):655–673.
- Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the theory of NP-Completeness*. San Francisco: Freeman.
- Gendreau, M., Iori, M., Laporte, G. e Martello, S. (2008). A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *Networks*, 51(1):4-18.
- Iori, M., Salazar-González, J. e Vigo, D. (2007). An exact approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *Transportation Science*, 41(2):253-264.
- Lysgaard, J., Letchford, A. N. e Eglese, R.W. (2004). A new branch-and-cut algorithm for the capacitated vehicle routing problem. *Mathematical Programming*, 100(2):423-445.
- Souza, V. A. A. (2013). *Algoritmos para o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Restrições de Carregamento Bidimensional*. 110 f. Dissertação de mestrado – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Wei, L., Zhang, Z., Zhang, D. e Lim, A. (2015). A variable neighborhood search for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 243(3):798-814.