APLICAÇÃO DE FUNÇÃO UTILIDADE PARA A MODELAGEM DE UM PROBLEMA MULTICRITÉRIO DE TOMADA DE DECISÃO EM GRUPO COMO JOGO

Alexandre Bevilacqua Leoneti
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo
Av Bandeirantes, 3900, Ribeirão Preto, SP
e-mail ableoneti@usp.br

RESUMO

Para auxiliar no processo de tomada de decisão, vários métodos multicritério foram propostos. No entanto, os métodos existentes assumem um único decisor e podem ter a eficiência reduzida na assistência a decisão de grupo, que é mais bem tratada pela teoria dos jogos. O objetivo desta pesquisa é apresentar uma função de utilidade que permite a modelagem de problemas multicritério de tomada de decisão em grupo como jogos tendo em conta as preferências individuais fornecidas pelos vetores de ponderação dos tomadores de decisão (jogadores). Um jogo com três estratégias (manter a alternativa inicial quando outra é oferecida por um outro jogador; alterá-la para a que é oferecida por um outro jogador, ou alterá-la para outra alternativa diferente daquela oferecida por um outro jogador) foi modelado usando a função de utilidade e o conceito de comparação em pares entre todas as alternativas (em direção e ângulo) com uma alternativa ideal. A vantagem de usar essa função para modelar problemas multicritério de tomada de decisão em grupo como jogos é o uso da abordagem da teoria dos jogos para contornar a limitação da metodologia de agregação para a decisão multicritério em grupo.

PALAVRAS CHAVE. Análise de Decisão. Teoria dos jogos. Tomada de decisão em grupo e negociação.

ADM - Apoio à Decisão Multicritério

ABSTRACT

To assist in the decision making process, several multicriteria methods have been proposed. However, the existing methods assume a single decision-maker and may have reduced efficiency in assisting group decision, which is better addressed by Game Theory. The aim of this research is to present a Utility Function that allows the modeling of Group Multicriteria Decision Making Problems as Games taking into account individual preferences provided by the Weighting Vectors of Decision Makers (Players). A game with three strategies (keeping the initial alternative when another is offered by another player; changing it for the one offered by another player; or changing it for another alternative different from that offered by another player) was modeled using the Utility Function and the concept of trade-off among all alternatives relative (in direction and angle) to an Ideal Alternative. The advantage of using this function for modeling Group Multicriteria Decision Making Problems as Games is the use of Game Theory Approach to circumvent the limitation of the aggregation methodology on the traditional Group Multicriteria Decision Making approach.

KEYWORDS. Decision Analysis. Game theory. Group Decision Making and Negotiation.

ADM – Multicriteria Decision Aid

1. Introdução

Para auxiliar no processo de tomada de decisão multicritério, vários métodos têm sido propostos. Estes métodos são conhecidos como métodos multicritério de tomada de decisão (MCDM) (Wallenius et al., 2008, Dyer et al., 1992). No entanto, os métodos multicritério existentes assumem um único decisor, em vez de um grupo de tomadores de decisão (Kocher & Sutter, 2005). Consequentemente, quando o processo de tomada de decisão envolve mais de um indivíduo, métodos MCDM podem ter sua eficiência reduzida (Keeney, 2013; Samuelson & Zeckhauser, 1988).

Para as decisões em grupo, a análise estratégica da decisão é comumente abordada pela Teoria dos Jogos (TJ) (Osborne & Rubistein, 1994). Szidarovszky e Duckstein (1984) já demonstravam que os conceitos da TJ poderiam ser usados para desenvolver uma metodologia de solução para uma determinada classe de problemas multicritério e que seus pontos de equilíbrio seriam pontos de solução mínima, ou o resultado da escolha subjetiva do tomador de decisão. Tecle, Fogel e Duckstein (1988) também apresentaram a resolução de um problema multicritério envolvendo a aplicação da TJ. Carraro et al. (2005) apontaram que muitos dos problemas ambientais são melhor tratados dentro de uma abordagem de jogos, por meio da TJ. Madani e Lund (2011) também propuseram a modelagem de problemas MCDM como um jogo estratégico, e resolveram o mesmo usando conceitos de jogos não-cooperativos.

O item chave para unificar o uso de métodos MCDM em grupos (GMCDM) e TJ seria uma Função de Utilidade (FU) que traduzisse em um número real todas as combinações possíveis de opções (estratégias) no processo GMCDM. Com base na ideia de que o espaço Euclidiano permite uma comparação entre alternativas, Leoneti (2016) propôs uma FU que utiliza, como passo intermediário, uma função de comparação (FC), com base nos ângulos e na distância (norma) entre as alternativas. Assim, o objetivo deste trabalho é demonstrar a aplicação desta FU através de um exemplo numérico de GMCDM. A vantagem de modelar os problemas GMCDM como jogos é que isto permite a possibilidade de considerar soluções de equilíbrio, geralmente utilizadas em TJ, em vez de usar o conceito tradicional de otimização por preferências agregadas (estado da arte).

2. Função utilidade

Leoneti (2016) propôs uma FU para um jogo estratégico como $<N, A_i, \succsim_i>$, onde N é o conjunto de *n* jogadores (decisores), A é o conjunto de *m* ações (alternativas), e $\succsim_i$ é a preferência definida sobre A para cada jogador $i \in N$. No jogo proposto, três estratégias para cada jogador são definidas, sendo: (I) manter a alternativa inicial quando outra é oferecida por um outro jogador; (II) mudar a alternativa inicial para a oferecida por outro jogador; ou (III) alterar a alternativa inicial para uma outra alternativa diferente da oferecida por outro jogador. Portanto, a função π: $\Re_+^{c\times n} \rightarrow [0,1]$, que é uma representação numérica do conjunto de preferências $\succsim_i$ conjuntamente, estima o retorno para cada estratégia conjunta dos *n* jogadores, considerando que um jogador começa com uma alternativa *x* e precisa decidir, de acordo com a sua preferência sobre os *c* critérios em avaliação, se mantem ou muda para outra alternativa *y*, quando a mesma é oferecida por um outro jogador.

Como um passo intermediário para a FU, uma Função de Comparação (FC) aos pares, com base nos ângulos e distância (Norma) entre as alternativas (Deng, 2007), foi proposta. A FC tem como objetivo estimar a avaliação de pares de tomadores de decisão, a fim de manter as condições de racionalidade. A FC proposta tem dois componentes principais: (i) um componente relativo, calculado pela projeção proporcional de uma alternativa em outra; e (ii) uma componente de direção, com base no ângulo entre as alternativas.

Com os componentes de relação e direção, a FC: $\varphi: \Re_{+}^{c} \rightarrow [0,1]$, para comparar cada par de alternativas a partir do conjunto de ações A contra o conjunto de critérios C (com *c* sendo o número de critérios), é definida como mostrado na Equação 1.

$$\varphi(x,y) = \left[\frac{\alpha_{xy}}{\|y\|}\right]^{\delta}.\cos\theta_{xy}, \text{onde } \delta = \begin{cases} 1, \text{se } \alpha_{xy} \leq \|y\| \\ -1, \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

A equação 1 mostra os cálculos para a FC proposta, onde $\varphi(x,y)$ é a medição da comparação aos pares entre as alternativas *x* e *y* em $\Re^{c}$, $\cos\theta_{xy}$ é o ângulo entre as duas alternativas, $\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_c^2}$ é a norma do respectivo vetor, e $\alpha_{xy} = \|x\|.\cos\theta_{xy}$ é a projeção escalar do vector *x* no vetor *y*. A imagem da função varia entre 0 e 1 (devido à condicional δ), ou seja, quanto mais próximo de 1, mais semelhantes são as alternativas. Em termos matemáticos, a FC satisfaz as seguintes propriedades: (i) estabelece valores intermediários entre zero e um para as comparações de pares; e (ii) é assimétrica, isto é, estabelece os valores diferentes quando se tem no início uma alternativa, em vez de outra. Uma condição necessária é que os critérios devem ser independentes, devido ao fato de que no espaço Euclidiano a condição de ortogonalidade é necessária.

Na prática, a FC fornece informações de preferência ordinal sobre as alternativas, que são usadas para estimar avaliação aos pares das alternativas pelos decisores. De fato, a FC satisfaz todas as propriedades de preferência, que é: (i) global, uma vez que é possível comparar qualquer par de alternativas no espaço euclidiano; (ii) é monótona, uma vez que valores maiores são preferidos à valores menores (é necessário que todos os critérios sejam critérios do tipo benefício); (iii) é reflexiva, uma vez que para duas quaisquer alternativas *x* e *y* iguais, então $\varphi(x,y) \sim \varphi(y,x)$; e (iv) é homotética, uma vez que para as mesmas duas alternativas iguais *x* e *y*, então $k.\varphi(x,y) \sim k.\varphi(y,x)$, para qualquer $k \geq 0$. A propriedade transitiva é condicional, dada a alternativa inicial escolhida.

Finalmente, a UF proposta por Leoneti (2016) representa numericamente a utilidade conjunta para cada jogador, a fim de alcançar maior pontuação para manter (Estratégia I) ou para a negociação (Estratégias II ou III) entre alternativas próximas à Alternativa Ideal (AI)[1]. De acordo com Keeney (2013), é possível definir uma FU para cada estratégia conjunta de um conjunto de jogadores que combinam os seus valores individuais de utilidade. Aqui, a combinação dos valores individuais é utilizada para definir um valor numérico para a estratégia conjunta dos jogadores, que é usado para propor a FU π: $\Re^{c \times n} \rightarrow [0,1]$ para o jogo <N, A, $\succsim_i$> como pode ser visto na Equação 2.

$$\pi(x, y_i) = \varphi(x, IA).\prod_{i=1}^{n-1} \varphi(x, y_i).\varphi(y_i, IA) \quad (2)$$

A Equação 2 apresenta a FU proposta para o jogo <N, A, $\succsim_i$>, onde $\succsim_i$ é dada por $\pi(x,y)$, que define, para um determinado jogador, a recompensa para todas as estratégias (I, II e III) para alternativa *x* quando da negociação com um outro conjunto de alternativas y_i propostas por todos os outros (n – 1) jogadores. Com um pouco de desenvolvimento algébrico, pode-se ver que a UF pode ser calculada usando a Equação 3 para n = 2 jogadores.

$$\pi(x, y) = \varphi(x, IA).\varphi(x, y).\varphi(y, IA) \quad (3)$$

[1] Uma maneira de diferenciar entre alternativas em um espaço euclidiano é o uso de uma Alternativa Ideal (AI), que incorpora as melhores performances de todos os critérios (Deng, 2007)

Matematicamente, se um dos termos da função de utilidade é próximo de zero (baixa similaridade entre qualquer par de alternativa), então $\pi(x, y)$ tende a ser zero também, o que significa que apenas alternativas semelhantes perto da AI serão consideradas no que é chamado de "núcleo" do jogo. O uso da FU irá gerar as tabelas de pagamento para os jogadores, estimando uma medida de satisfação para cada estratégia conjunta possível no conjunto de ações A.

3. Aplicação, resultados e discussão

Antes de iniciar esta seção, vale a pena recordar que o processo de modelagem de problemas GMCDM pode ser projetado com o auxílio de uma matriz que envolve as alternativas e critérios selecionados. Esta matriz é conhecida como a Matriz de Decisão (MD), e geralmente é normalizada, e depois ponderada por vetores de ponderação, gerando Matrizes de Decisão Ponderadas (MDP).

Um problema comum de tomada de decisão em grupo é decidir sobre um destino de viagem. Cada um dos membros do grupo precisa concordar com uma decisão conjunta que normalmente é alcançada por meio de negociação. Para modelar tal problema, vamos considerar um grupo de três pessoas: P1, P2 e P3, que devem decidir juntos qual destino viajar: A1, A2 ou A3. Vamos também considerar quatro critérios para diferenciar as alternativas, que são: (i) C1 - Avaliação do hotel: as notas de avaliação hotel; (ii) C2 - O tempo de viagem (em horas): duração da viagem; (iii) C3 - Tempo de permanência (número de noites): número de noites incluídas; e (iv) C4 - Custo: o custo em reais do pacote que inclui alojamento e café da manhã. A Tabela 1 apresenta a MD para o problema GMCDM proposto.

Tabela 1 – Matriz de Decisão para o problema GMCDM de escolha de destino de viagem

	C1	C2*	C3	C4*
A1	3	2,5	2	4850
A2	3,5	12	6	3700
A3	4	4	5	2600

(*) Os critérios C2 e C4 devem ser convertidos para critérios de benefício usando a transformação $_{1/C2}$ e $_{1/C4}$

Vamos também supor que os jogadores têm diferentes preferências de classificação sobre o C1 critérios a C4, sendo: P1 [1º; 2º; 3º; 4º]; P2 [4º; 3º; 2º; 1º]; e P3 [3º; 4º; 1º; 2º]. Ao aplicar os procedimentos ROC[2] à estas ordens definidas, os seguintes vetores de peso são encontrados: [0,52; 0,27; 0,15; 0,06] para a P1; [0,06; 0,15; 0,27; 0,52] para P2; e [0,15; 0,06; 0,52; 0,27] para P3. Estes vetores de peso são utilizados para ponderar a MD, a fim de aplicar o FU (Equação 2) para criar o jogo (Tabela 2).

Tabela 2 – Tabela de Payoffs para o problema GMCDM de escolha de destino de viagem

P1	P2	P3	$\pi_1(x, y_i)$	$\pi_2(x, y_i)$	$\pi_3(x, y_i)$
A1	**A1**	**A1**	0,463	0,133	0,056
A2	**A1**	**A1**	0,155	0,100	0,027
A3	**A1**	**A1**	0,420	0,083	0,030
A1	**A2**	**A1**	0,276	0,101	0,049
A2	**A2**	**A1**	0,199	0,187	0,144
A3	**A2**	**A1**	0,323	0,155	0,131

[2] O método Rank-Ordered Centroid (ROC) é utilizado para elicitar as preferências dos decisores a partir da transformação dos postos da ordenação dos critérios em uma razão. É uma abordagem útil quando pouca informação quantitativa é conhecida sobre os critérios e/ou para o processo de tomada de decisão em grupo (Jia et al., 1998).

A1	**A3**	**A1**	0,411	0,126	0,057
A2	**A3**	**A1**	0,216	0,184	0,128
A3	**A3**	**A1**	0,524	0,260	0,139
A1	**A1**	**A2**	0,276	0,101	0,049
A2	**A1**	**A2**	0,199	0,187	0,144
A3	**A1**	**A2**	0,323	0,155	0,131
A1	**A2**	**A2**	0,165	0,077	0,042
A2	**A2**	**A2**	0,255	0,349	0,759
A3	**A2**	**A2**	0,248	0,291	0,577
A1	**A3**	**A2**	0,245	0,096	0,049
A2	**A3**	**A2**	0,277	0,345	0,677
A3	**A3**	**A2**	0,403	0,487	0,615
A1	**A1**	**A3**	0,411	0,126	0,057
A2	**A1**	**A3**	0,216	0,184	0,128
A3	**A1**	**A3**	0,524	0,260	0,139
A1	**A2**	**A3**	0,245	0,096	0,049
A2	**A2**	**A3**	0,277	0,345	0,677
A3	**A2**	**A3**	0,403	0,487	0,615
A1	**A3**	**A3**	0,365	0,120	0,058
A2	**A3**	**A3**	0,300	0,341	0,603
A3	**A3**	**A3**	0,655	0,817	0,655

Pode ser visto na Tabela 2 que a combinação que gera maiores pagamentos para os três jogadores é, simultaneamente, quando P1, P2 e P3 escolhem a alternativa A3 (uma solução de consenso). Supondo que os três jogadores iniciaram o jogo com estas alternativas e nenhum achou necessário fazer uma troca, pode-se dizer que eles utilizaram a Estratégia I. Também pode ser visto que existem coalizões que também conduzem a elevados pagamentos como, por exemplo, quando P1 e P2 escolha alternativa A3 e P3 escolhe a alternativa A2 (solução de coalizão). Supondo agora, por exemplo, que o jogador P3 iniciou o jogo com a alternativa A3, como anteriormente apresentado, e modificou sua alternativa para a alternativa A2, ele estaria utilizando a Estratégia II, caso a mesma tivesse sido apresentada por um outro jogador, ou a Estratégia III, caso contrário. Ressalta-se, portanto, que a Estratégia I trata-se de manter a alternativa inicial, enquanto as Estratégias II e III referem-se à abandonar a alternativa inicial em favor de uma outra oferecida por um outro jogador (Estratégia II) ou outra alternativa qualquer (Estratégia III). Por outro lado, os menores pagamentos sempre incluem a alternativa A1, como pode ser visto, por exemplo, quando os três jogadores escolhem alternativa A1 (consenso) ou quando P1 e P2 escolhem a alternativa A1 e P3 escolhe alternativa A2. Cabe lembrar aqui que estas situações distantes do bom senso devem ser mapeadas, pois há situações onde os jogadores podem não seguir a condição da racionalidade.

Pode-se, por fim, verificar que os dois equilíbrios de Nash para o jogo são: (i) uma solução de consenso com os jogadores concordando com a alternativa A2; e (ii) uma solução de consenso com os jogadores concordando com a alternativa A3. Mais importante, pode-se verificar que agora é possível conhecer cada combinação possível de estratégia e escolher a que pode aumentar a chance de um acordo de grupo, sendo esta a vantagem da utilização da TJ.

4. Conclusão

A função de utilidade proposta por Leoneti (2016) permite a modelagem de problemas multicritério de decisão em grupo como jogos, tendo em conta as preferências individuais para estimar a satisfação com a decisão do grupo. Um jogo com três estratégias (manter a alternativa inicial quando outra é oferecida por um outro jogador; alterá-la para a que é oferecida por um outro jogador, ou alterá-la para uma alternativa diferente daquela oferecida pelo outro jogador) pode ser modelada usando a função de utilidade. A base da função utilidade é comparações de

pares entre todas as alternativas em relação a uma alternativa ideal no espaço Euclidiano de dimensão múltipla (uma dimensão para cada critério utilizado para avaliar as alternativas).

A vantagem de usar essa função para modelar problemas multicritério de decisão em grupo como jogos é o uso da abordagem teoria dos jogos para contornar a limitação do método de agregação, que é necessário para a decisão em grupo na abordagem decisão multicritério tradicional. É importante também mencionar que a teoria dos jogos melhor resolve os problemas em que uma decisão deve ser feita sem garantia de acordos de colaboração.

A fim de ilustrar a aplicação da função de utilidade, um exemplo numérico foi modelado com sucesso. Um problema de decisão em grupo quanto a um destino de viagem foi modelado como um jogo usando a função de utilidade. Análises foram feitas a fim de destacar a vantagem de fazer uma decisão de grupo usando a função de utilidade proposta.

A principal contribuição da presente pesquisa é permitir que os tomadores de decisão possam escolher as estratégias que lhes darão o maior retorno, levando em consideração a preferência dos outros jogadores envolvidos .

Agradecimentos: O autor agradece ao CNPq pelo Auxílio à Pesquisa (458511/2014-5).

Referências

Carraro, C.; Marchiori, C.; Sgobbi, A. Applications of Negotiation Theory to Water Issues (2005). Artigos da Fondazione Eni Enrico Matt FEEM. Disponível em <http://ssrn.com/abstract=722362>

Deng, H. A Similarity-Based Approach to Ranking Multicriteria Alternatives. Advanced Intelligent Computing Theories and Applications. Lecture Notes in Computer Science, (2007), Volume 4682/2007, 253-262

Dyer, J. S., Fishburn, P. C., Steuer, R. E., Wallenius, J., & Zionts, S. Multiple criteria decision making, multiattribute utility theory: The next ten years. Management Science, v. 38, 1992

Jia, J.; Fischer, G.W.; Dyer, J.S. Attribute Weighting Methods and Decision Quality in the Presence of Response Error: A simulation Study. Journal of Behavioral Decision Making, v. 11, (1998), p. 85–105

Leoneti, A. B., Utility Function for modeling Group Multicriteria Decision Making problems as games, Operations Research Perspectives, Available online 3 May 2016, ISSN 2214-7160, <http://dx.doi.org/10.1016/j.orp.2016.04.001>

Keeney, R.L., Foundations for Group Decision Analysis. Decision Analysis, v. 10(2), 2013

Kocher, M. G. and Sutter, M.. The decision maker matters: Individual versus group behaviour in experimental beauty contest games. The Economic Journal, v. 115, 2005

Madani, K.; Lund, J., R. A Monte-Carlo game theoretic approach for multi-criteria decision making under uncertainty. Advances in water resources, v. 34(5), 2011

Osborne, M. J. and Rubinstein, A. A Course in Game Theory. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1994

Samuelson, W.; Zeckhauser, R. Status Quo Bias in Decision Making, Journal of Risk and Uncertainty, v. 1, 1988

Szidarovszky, F.; Duckstein, L. Multiobjective management of mining under water hazard by game theory. European Journal of Operational Research 15 (1984) 251-258

Tecle, A.; Fogel, M.; Duckstein, L. Multicriterion selection of wastewater management alternatives. Journal of Water Resources Planning and Management, Vol. 114, No. 4, July, 1988

Wallenius, J., Dyer, J. S., Fishburn, P. C., Steuer, R. E., Zionts, S., & Deb, K. Multiple Criteria Decision Making, Multiattribute Utility Theory: Recent Accomplishments and What Lies Ahead. Management Science, v. 54(7), 2008