

ANÁLISE DE FATOS ESTILIZADOS EM SÉRIE PLUVIOMÉTRICA

Pedro Pelacani Berger

Universidade Federal do Espírito Santo, Av. Fernando Ferrari, s/n, Vitória-ES
pedropberger@gmail.com

Gutemberg Hespanha Brasil

PPGECO/PPGGP -UFES/ES
Universidade Federal do Espírito Santo, Av. Fernando Ferrari, s/n, Vitória-ES
ghbrasil@terra.com.br

RESUMO

Este estudo analisa a série de índices pluviométricos em Fortaleza (Posto Funceme), Brasil, utilizando registros mensais desde 1849. São avaliados alguns fatos estilizados presentes na série, tais como valores extremos, estacionariedade, heterocedasticidade condicional e sazonalidade. A dependência linear pode ser modelada a partir de modelos ARMA e a heterocedasticidade condicional através de modelos da família GARCH. Adicionalmente estima-se a taxa de retorno para alguns os horizontes via método de Gumbel. Uma breve discussão sobre a identificação de fatos estilizados em séries dessa natureza também é realizada. Os resultados dos ajustes foram comparados com a série do El Niño, apresentando evidências de sua relação com a volatilidade condicional da série.

PALAVRAS CHAVE: Séries temporais; Valores extremos; Propriedades estatísticas de séries.

Tópicos (EST- estatística, AG&MA - PO na Agricultura e Meio Ambiente)

ABSTRACT

This study analyzes the series of rainfall in Fortaleza (Posto Funceme), Brazil, using monthly records since 1849. They are valued some stylized facts in the series, such as extreme values, stationary, conditional heteroskedasticity and seasonality. The linear dependence can be modeled from ARMA and conditional heteroskedasticity through models of GARCH family. Additionally it is estimated the rate of return for some horizons via Gumbel method. A brief discussion about stylized facts in series of this nature is also performed. The results of the adjustments were compared with the El Niño series, presenting evidence of his relationship with the conditional volatility of the series.

KEYWORDS: Time Series; Extreme Value; statistical series proprieties.

Paper topics (EST- Statistics, AG&MA - PO on Agriculture and Environment)

1. Introdução

Em séries temporais de dados climáticos, o conhecimento de suas propriedades é essencial para uma boa modelagem. Conhecendo o comportamento é possível então administrar o risco. Comumente em séries financeiras, é buscada a quantificação do risco. No caso de séries climáticas, esse risco busca estimar eventos pouco prováveis, causados por fatores naturais, como secas por longos períodos e enchentes; e sua grandeza pode ser mensurada pela magnitude desses eventos.

Esse estudo pretende caracterizar, de forma simples e prática, fatos estilizados da série de precipitação pluviométrica em Fortaleza, Ceará, Brasil. Uma das séries climáticas mais longas, com registro desde 1849. A análise temporal desta série procura extrair suas características, principalmente a mensuração de ciclos, volatilidade condicional, a modelagem dos extremos e a taxa de retorno.

Uma primeira análise busca entender o comportamento dos valores extremos da série, a partir de inferência sobre os máximos anuais, utilizando uma abordagem da teoria dos valores extremos e encontrando assim a taxa de retorno. Em seguida, analisa-se a presença de estacionariedade e sua volatilidade, e realizada a construção de modelos úteis para o entendimento e determinação de previsões. Por fim, uma comparação é realizada com a série do El Niño, buscando evidências da influência do fenômeno climático na variância da série de chuvas.

2. Metodologia aplicada no estudo

2.1. Os Dados

A série de dados pluviométricos tratada neste estudo contém informações pluviométricas da cidade de Fortaleza, Ceará, sendo a série pluviométrica brasileira com registros mais antigos. Os dados pluviométricos foram coletados pela FUNCEME – Fundação Cearense de Meteorologia e Recursos Hídricos, de Janeiro de 1849 à Julho de 2008, mês de encerramento de atividades do Posto Pluviométrico, e então acrescidos de informações até Março de 2016 do Posto PICI, localizado no mesmo município e a menos de 10 km do posto extinto. Todos os dados estão disponíveis, juntamente com os dos demais postos meteorológicos de Fortaleza, no site da FUNCEME.

O índice pluviométrico diário se refere a altura que a água chegaria em uma caixa com 1 metro quadrado de base no dia, e sua medida é dada em milímetros. Os dados medem a quantidade total mensal de chuvas na região, correspondendo ao somatório dos totais diários de chuva em cada mês.

A série de dados de registros anuais do El Niño foi obtida de 1849 a 2010 do Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos do Instituto Nacional de Pesquisas Especiais (CPTEC/INPE). A partir dessa ano foram utilizados dados do Golden Gate Weather Services.

O El Niño é um fenômeno climático, que ocorre devido ao aquecimento anormal das águas do oceano pacífico, afetando clima de diversas regiões do planeta. Geralmente seu período de duração é de 10 a 18 meses, com intervalos irregulares entre suas ocorrências. Para esse estudo, foi considerado o nível de intensidade do fenômeno na maior parte do ano em questão, medido em quatro níveis de intensidade: nula, baixa, moderada e forte. Os gráficos de ambas as séries podem ser observados na Figura 1.

Todas as análises foram realizadas pelo Software e linguagem de programação R [R Core Team, 2016], com auxílio das funções implementadas nos pacotes *evir*, *extRemes* e *rugarch*.

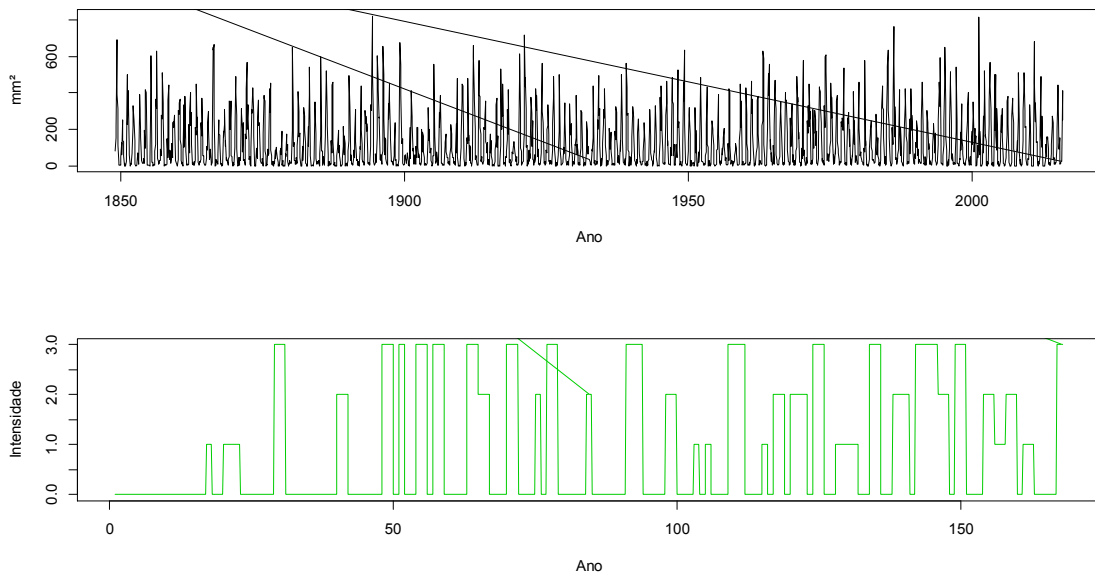


Figura 1: Gráfico da Série de Chuvas e da Série da Intensidade do El Niño

2.2. Taxa de Retorno e Valores Extremos

Valores extremos tratam de eventos raros, de baixa probabilidade, que em determinado conjunto de dados não se assemelham a da maioria dos demais elementos. Numa amostra, uma boa forma de definir os valores extremos seriam seus máximos e mínimos, os quais apresentam um comportamento diferente do usual, e são melhor ajustados através da teoria dos valores extremos.

A Teoria dos Valores Extremos se baseia no teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko, Fisher e Tippett (1928), ou teorema dos valores extremos, que encontra possíveis distribuições limitantes para o máximo amostral de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Definindo melhor, considere F uma função de distribuição subjacente e x^* seu último ponto a direita, ou seja:

$$x^* := \sup \{x : F(x) < 1\};$$

Podendo ser infinito, então:

$$\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \xrightarrow{P} x^*, \quad n \rightarrow \infty,$$

onde \xrightarrow{P} significa convergência em probabilidade, desde que

$$P[\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x] = P[X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x] = F^n(x),$$

Que converge para zero quando $x < x^*$ e para 1 quando $x \geq x^*$. Assim, a fim de obter uma distribuição limite não degenerativa, uma normalização é necessária [Hann e Ferreira 2006].

Suponhamos que exista uma sequência de constantes $a_n > 0$, e b_n reais onde $n = 1, 2, \dots$, de tal forma que

$$\frac{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) - b_n}{a_n}$$

tem uma distribuição limite não degenerativa quando $n \rightarrow \infty$; então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x)$$

Onde $G(x)$ é uma função degenerativa para cada ponto de continuidade x . Todas as funções de distribuição que são obtidas a partir do limite acima são chamadas de distribuições de valores extremos.

De acordo com o teorema definido por Fisher e Tippet (1928), dado que exista uma sequência de constantes $a_n > 0$, e b_n reais ($n = 1, 2, \dots$), e G uma função não degenerada então:

$$\frac{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} G$$

Onde \xrightarrow{d} representa convergência em distribuição. Nesse caso G pertence a uma das 3 famílias de distribuições de valores extremos, que são as distribuições de Gumbel, Weibull e Frechét, também representadas pela Distribuição dos Valores Extremos Generalizada (GEV).

Após a obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da GEV, o estimador de máxima verossimilhança para o quantil da distribuição de valores extremos generalizada x_p para $0 < p < 1$, a taxa de retorno $1/p$, é dado por:

$$\hat{x}_p = \begin{cases} \xi - \frac{\hat{\theta}}{\hat{k}} [1 - y_p^{-\hat{k}}], & \text{para } \hat{k} \neq 0 \\ \xi - \theta \log y_p, & \text{para } \hat{k} = 0 \end{cases}$$

Onde $y_p = -\log(1 - p)$.

O valor de p representa a probabilidade de retorno, que é útil quando desejamos encontrar a magnitude de um evento com p chance de ocorrer. E x_p é o quantil p da GEV. (Em uma terminologia mais frequente, x_p é o **nível de retorno** associado com o **período de retorno** $1/p$) [Coles, 2001]. Em suma, numa aplicação, a taxa de retorno apresenta a magnitude de um evento extremo, esperado um dado período de tempo $1/p$. Podemos citar como exemplo, a quantidade máxima de chuvas que pode ocorrer em uma determinada região nos próximos 50 anos.

Para que a convergência dos máximos amostrais para uma GEV seja satisfatória, é importante que seja feita uma boa seleção dos reais valores extremos de uma amostra. Por se tratar se uma série mensal, com comportamento semelhante ano após ano, no presente trabalho optou-se pelo uso do Método de Gumbel para seleção dos valores discrepantes.

O Método de Gumbel basicamente consiste na divisão uma série temporal em n grupos de igual tamanho, podendo ser definidos como meses, estações, ou a critério do pesquisador; Gumbel (1958). Os máximos de cada agrupamento são ajustados através da distribuição dos Valores Extremos Generalizada (GEV), e a partir da estimação dos parâmetros são estimadas as taxa de retorno para diferentes períodos.

O método não trata explicitamente de componentes de sazonalidade e tendência, e é necessário o pressuposto de independência, que não se verifica na prática, mas é comumente admitido em estudos, pois além de permitir uma maior facilidade dos cálculos, fornece resultados próximos aos que seriam derivados caso a verdadeira dependência fosse conhecida e levada em conta; Belitsky e Moreira (2007).

2.3. Volatilidade

Engle (1982) introduziu os primeiros modelos autoregressivos com heterocedasticidade condicional (ARCH), mostrando que em um determinado processo X_t não-

correlacionado serialmente a sua variância condicional (volatilidade) possui dependência serial, podendo ser ajustada através de uma função quadrática. Definida por:

$$X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r X_{t-r}^2$$

Onde ε_t é *i. i. d.* (0,1), $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, i > 0$.

Sendo que ε_t possui distribuição Normal (0,1). Distribuições com caudas mais pesadas são comumente utilizadas com êxito para aprimoramento dos ajustes.

Bollerslev (1986) propôs uma generalização dos modelos ARCH, que são os modelos GARCH (Hereocedasticidade Condicional Autoregressiva Generalizada), permitindo ajustes com uma memória mais longa e menos parâmetros. Sendo definido por:

$$X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i X_{t-i}^2 + \dots + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}$$

Onde ε_t é *i. i. d.* (0,1), $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0, \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \beta_i) < 1, q = \max(r, s)$

Como no caso do ARCH, supomos que ε_t possui distribuição Normal (0,1) e distribuições com caudas mais pesadas são comumente utilizadas com êxito para aprimoramento dos ajustes.

Um primeiro passo para a modelagem da volatilidade de uma série temporal é ajustar um modelo ARMA, a fim de remover a correlação serial na série. Nesse caso temos:

$$\phi(B)X_t = \theta_0 + \theta(B)\alpha_t$$

Onde $\alpha_t \sim ARCH(r)$.

Mais detalhes sobre as propriedades de modelos para ajuste da volatilidade condicional e métodos de aplicação utilizados nesse estudo podem ser encontrados em Costa e Baidya (2001), Yusof e Kane (2013), Box et al (2008), Harvey (2005) e Harvey e Jaeger (1993). Algumas aplicações com essa mesma série encontram-se em Brasil e Souza (2002) e Berger e Brasil (2012).

3. Análise dos Fatos Estilizados

O comportamento da série mensal pode ser observado na Figura 2. A série foi dividida em blocos anuais, e os máximos de cada um dos blocos estimados utilizando-se o método de Gumbel. Foram obtidos 168 máximos, e estes ajustados a distribuição de Valores Extremos Generalizada de três parâmetros GEV(ξ, θ, k). O ajuste a uma GEV de dois parâmetros (Distribuição de Gumbel) foi descartado, dado que o teste de razão de verossimilhança a 95% de confiança para a hipótese de $k=0$, não foi aceita, com o p-valor do teste de 0,00064. Os parâmetros estimados para o modelo podem ser observados na Tabela 1. A qualidade do ajuste pode ser observada graficamente na Figura 3.

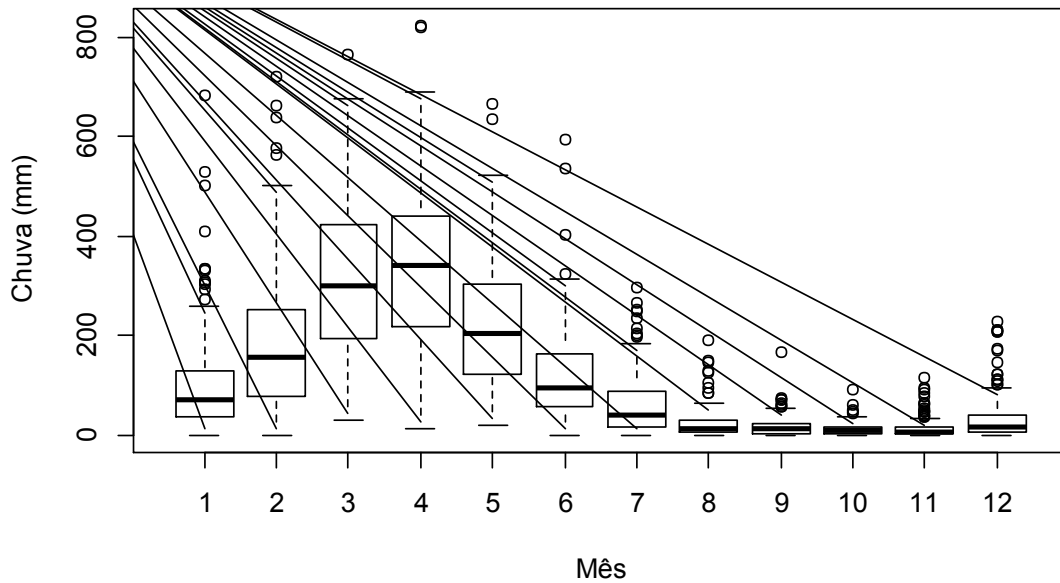


Figura 2: Box-plot dos Índices Pluviométricos Mensais

Tabela 1: Parâmetros estimados da GEV pelo método de Gumbel

	$\hat{\xi}$	$\hat{\theta}$	\hat{k}
Estimativas	364,384	135,475	-0,201
Erro Padrão	11,544	8,074	0,048

Foi estimada a taxa de retorno dos para 5, 10, 20, 30, 50 e 100 anos, a partir do fim da série, com um intervalo de confiança de 95%. A tabela com as taxas estimadas e o gráfico podem ser observados a seguir, na Tabela 2 e Figura 4.

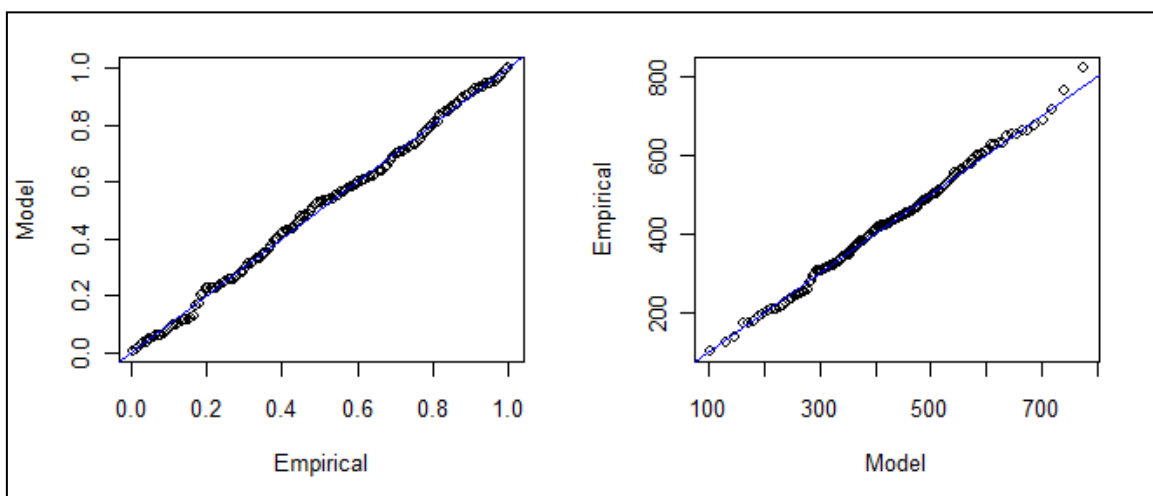


Figura 3: PP-plot e QQ-plot do modelo ajustado GEV(ξ , θ , k)-método de Gumbel

Tabela 2: Taxas de retorno estimadas pelo Método de Gumbel

Período de Retorno (Anos)	Retorno Esperado (mm)	IC 95% Inferior	IC 95% Superior
5	540	512	567
10	609	578	641
20	667	629	705
30	697	654	740
50	730	680	781
100	771	709	833

Os valores acima representam o máximo de chuvas dentro de um mês esperados dentro do período proposto.

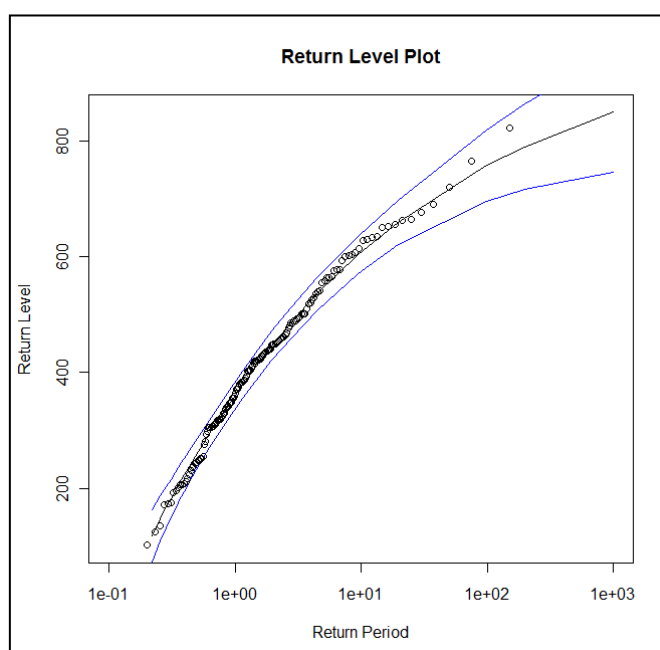


Figura 4: Gráfico das taxas de retorno estimadas em relação ao período: As linhas azuis representam os intervalos de confiança de 95% e a linha central o modelo estimado

A modelagem da volatilidade foi realizada a partir de três diferentes modelos GARCH. As diferenças na modelagem se deram na parte inicial do processo que é o ajuste da série bruta a um modelo autoregressivo.

Três abordagens foram realizadas: i) o ajuste de um modelo ARMA na série sem nenhuma forma de tratamento anterior dos dados; ii) O ajuste da série após a diferenciação de Ordem=12, a fim de reduzir o fator sazonal do processo; iii) o ajuste de um modelo sazonal SARIMA. Os parâmetros estimados para os modelos podem ser observados na Tabela 3, os modelos selecionados foram escolhidos por apresentarem o melhor ajuste pelo Critério de Akaike (AIC).

Parâmetros	SARIMA(4,0,1)(2,0,0)[12]		ARIMA(5,0,1)		ARIMA(3,0,1)(2,1,0)[12]	
	Estimado	Erro padrão	Estimado	Erro padrão	Estimado	Erro padrão
ar1	0,8756	0,0816	1,0194	0,0464	-0,3081	0,6931
ar2	-0,0896	0,0416	-0,219	0,0389	0,2376	0,1894
ar3	-0,0542	0,0314	-0,1205	0,0324	0,0861	0,0559
ar4	-0,0965	0,0255	-0,0738	0,0321	-	-
ar5	-	-	-0,0734	0,0263	-	-
ma1	-0,5321	0,0788	-0,508	0,0413	0,5716	0,695
sar1	0,2864	0,0239	-	-	-0,6472	0,0216
sar2	0,2837	0,0236	-	-	-0,3032	0,0215
Intercepto	121,2743	6,6944	120,8989	2,5666	-	-
AIC	24269		24547		24188	

Tabela 3: Parâmetros estimados para os modelos autoregressivos

Os diferentes modelos resultaram em diferentes estruturas de autocorrelação para os resíduos, como podem ser observados nas funções de autocorreção apresentadas na Figura 5.

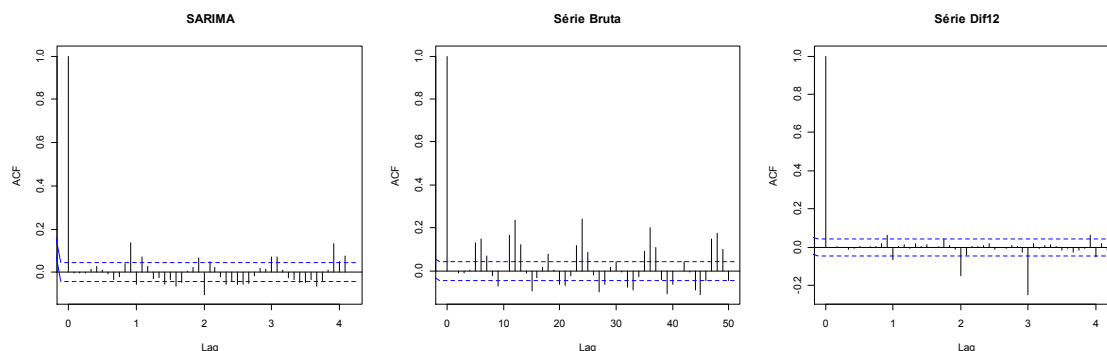


Figura 5: ACF dos resíduos.

Apesar de todas as séries de resíduos se mostrarem i.i.d pelo teste de Ljung-Box (p -valor $> 0,85$ em todos casos) o SARIMA apresentou uma estrutura mais próxima de um ruído branco, indicando um possível melhor ajuste para a média. A série bruta manteve os picos de ordem 12 na série, indicando uma possível ainda presença da sazonalidade contida na série original, e por fim, a série diferenciada em ordem 12, apesar de também indicar um ruído branco, picos de autocorrelação podem ser observados na sua ACF (vide Tabela 5) e PACF no lag 12.

A relação linear pode ser observada novamente nas séries quadráticas dos resíduos, apresentadas na Figura 6.

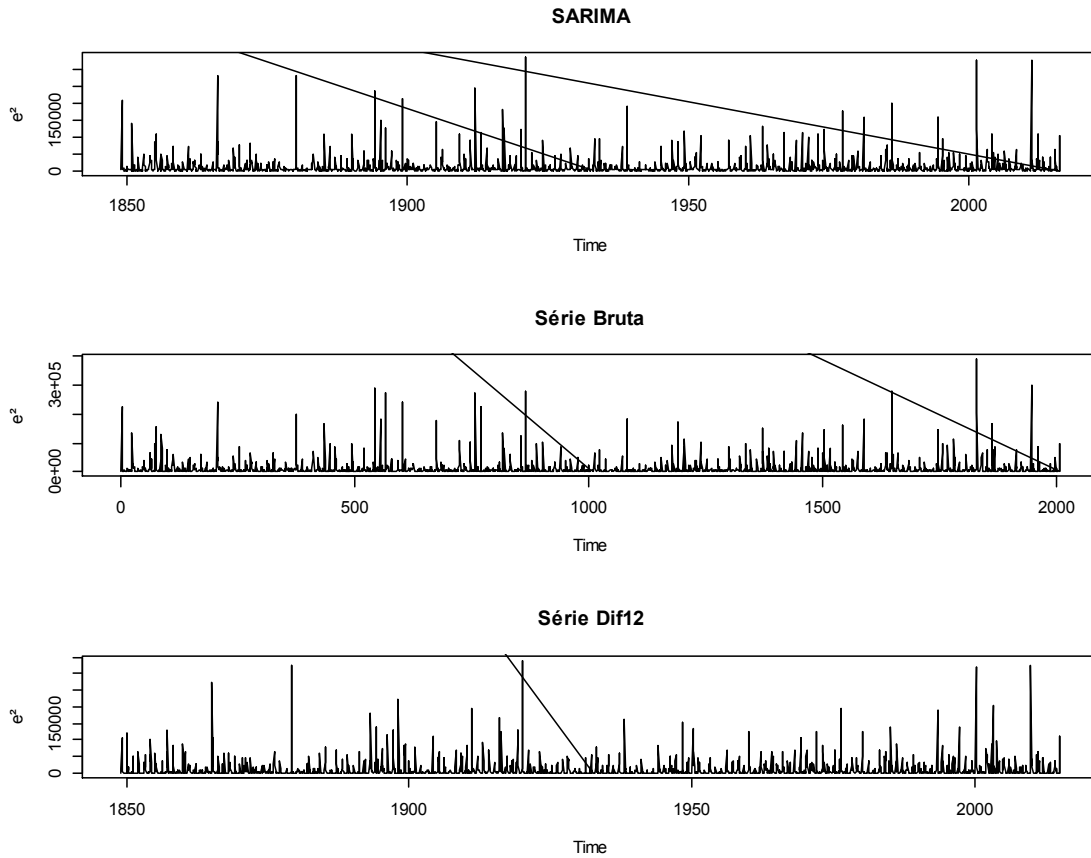


Figura 6: Quadrado dos resíduos dos modelos autorregressivos ajustados.

As funções de autocorrelação das série quadrática dos resíduos, observadas na figura 7, apresentaram comportamento semelhante em todos os ajustes. Seu comportamento com picos de autocorrelação no lag 12 indicam um comportamento periódico na variância.

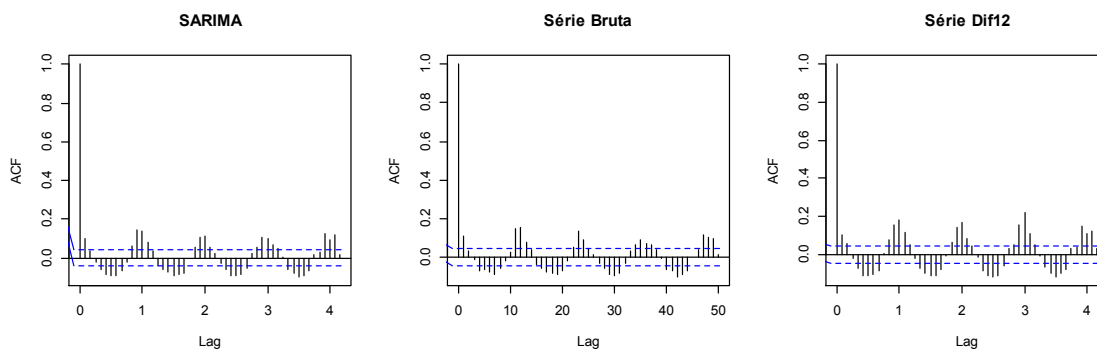


Figura 7: Função de Autocorrelação dos resíduos quadraticos

Por fim, foram ajustados três modelos GARCH(1,1) as séries apresentadas, com a finalidade de modelar a volatilidade condicional. Os parâmetros estimados para cada ajuste podem ser observados na tabela 4.

Parâmetros	SARIMA		Série Bruta		Série Dif12	
	Estimado	Erro padrão	Estimado	Erro padrão	Estimado	Erro padrão
mi	10335,45	0,466942	11904,36	0,537955	10688,17	0,276333
omega	745697,54	33570,077	875950,46	39580,907	740742,55	19265,598
Akaike	28,211		27,828		28,862	

Tabela 4: Parâmetros estimados do ajuste GARCH(1,1)

A série ajustada para a volatilidade condicional obtida pelo modelo GARCH sobre a Série Bruta pode ser observada em preto na Figura 8. Sobrepondo em verde está a série de intensidade do El Niño, para fins comparativos.

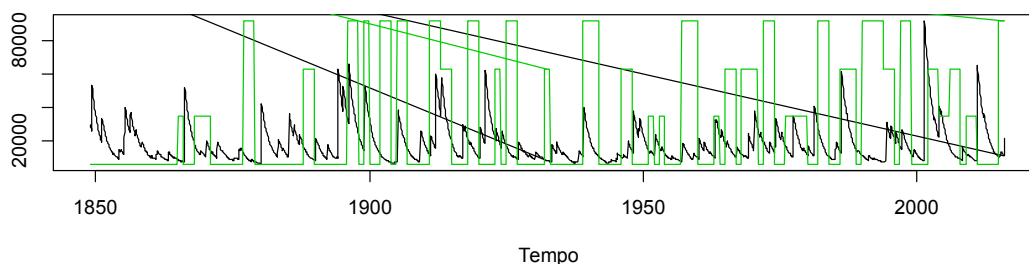


Figura 8: Série da Volatilidade Condicional e intensidade do El Niño.

4. Análise e Discussão

Uma visualização alternativa dos dados, no Box-plot da Figura 2, permite observar-se o comportamento da série juntamente com sua estrutura de sazonalidade. A elevação da média nos meses de março a maio é tão evidente quanto o a da variância do total mensal de janeiro a maio, indicando a existência de possível volatilidade condicional na série.

O ajuste de qualidade dos parâmetros a uma GEV pelo método de Gumbel mostra que o método é eficaz para a separação de extremos em séries climáticas com sazonalidade, e possibilitou a estimação das taxas de retorno apresentada na Tabela 2. Os resultados permitem extrapolarmos que em 10 anos, a 95% de chance de ocorrer chuvas quase cinco vezes maiores que a média da série. A diferença no retorno de 30 para 100 anos foi de 10,6%, com isso, podemos supor que medidas preventivas tomadas com a finalidade de proteção a eventos de médio prazo têm grandes chance de apresentarem eficácia a prazos mais longos, quanto ao máximo de chuvas esperados, sendo um resultado de grande auxílio para o planejamento da prevenção de enchentes e cheias.

O presente estudo não teve enfoque no melhor ajuste série de chuvas em si, mas sim a observação da sua volatilidade condicional, que foi alcançado com sucesso. A série bruta de chuvas apresentou alguns entraves: A quantidade excessiva de zeros, a sazonalidade anual e a existência de ciclos climáticos não considerados acabam inserindo diferentes ruídos tornam a possibilidade de um ajuste de qualidade algo menos trivial.

Mediante a isso, os três diferentes modelos foram ajustados com a idéia de otimizar a modelagem da volatilidade condicional. O ajuste da média presente na Tabela 3 indicou um melhor ajuste, pelo critério de Akaike, para a série diferenciada em ordem 12 e o pior para a série bruta (sem nenhum procedimento de correção anterior ao ajuste dos parâmetros). Esses resultados contrastam com os apresentados na Tabela 4, onde, apesar de ajustes semelhantes, o melhor ajuste da volatilidade condicional se deu para os resíduos quadráticos resultantes da modelagem da série bruta.

Fica demonstrado assim que empiricamente, a modelagem da média não impacta sempre positivamente no melhor ajuste da volatilidade condicional em séries climáticas quando bem selecionados os modelos. É importante destacar a necessidade de constantes alterações na escolha do algoritmo otimizador para estimação dos parâmetros, devido a diversas falhas no processo de convergência, provavelmente em razão da presença de muitos zeros na série.

Uma opção possível para o melhoramento do ajuste seria uma nova modelagem da volatilidade considerando a distribuição dos erros como uma de cauda mais pesada, como a Distribuição t de Student ou a Distribuição de Valores Extremos Generalizada, apresentada neste trabalho.

Por fim, a sobreposição da série da Volatilidade Condicional de melhor ajuste com a série de intensidade do El Niño apresentada na Figura 8 permite supormos a existencia de uma relação entre ambos. Em grande parte dos momentos os picos se sobrepõe, ou um antecede o outro, sendo esse um forte indicativo que a presença do fenômeno venha também a implicar na ocorrência de valores extremos, os mesmos cujo retorno pode ser modelado pela GEV (Tabela 1).

A comparação quantitativa entre o El Niño e a variância da série de chuvas não foi realizada nesse estudo devido as informações apresentadas serem anuais, mesmo se tratando de um fenômeno de leituras mensais e diárias. A obtenção futura dessas informações irá possibilitar novas análises e discussões mais aprofundada sobre a relação dos fenômenos.

Referências

Belitsky, V.; Moreira F. M. (2007), Emprego do método “Peaks-Over-Threshold” na estimação de risco: uma exposição abrangente, detalhada, mas simples. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.

Berger, P. P. e Brasil, G. H. (2012), "Valores extremos: conceitos, abordagem clássica e métodos de modelagem", Anais do XVI CLAIO/XLIV SBPO, Rio de Janeiro, RJ, Abstract Book, p. 95. (trabalho 101543) (ISSN 1518-1731).

Box, G. E. P.; Jenkins, G. M.; Reinsel, G. C. (2008), Time Series Analysis: Forecasting and Control. 4th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons, 2008.

Brasil, G. H.; Souza, R.C. (2002), Uma Reanálise da Série de Chuvas em Fortaleza, Brasil, XI CLAIO-Congreso Latino Iberoamericano de Investigacion de Operaciones. Concepción, Chile, Artigo completo na Acta de Trabajos, Cd-Rom (Trabajo A42n02, 13 p).

Coles, S. (2001), An introduction to statistical modeling of extremes values, Springer, 2001.

Costa, P. H. S.; Baidya, T. K. N. (2001), Propriedades Estatísticas das séries de retornos das principais ações brasileiras. *Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro. v.21, n.1, p. 61-87. 2001.

cPTEC (2016), Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São Paulo, Brasil, <http://www.cptec.inpe.br/>

Engle, R. F. (1982), Autorregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, Vol 50, Issue 4, p 987-1008.

Fisher, R. A.; Tippett, L. H. C. (1928), Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philophical Society*, n.24, p.180-190, 192.

FUNCEME (2016), Fundação Cearense de Meteorologia e Recursos Hídricos, Governo do Estado do Ceará. Fortaleza, Brasil. <http://www.funceme.br/>

Golden Gate Weather Services (2016), Golden Gate Weather Services. Saratoga, USA.
<http://www.ggweather.com/>

Harvey, A C; Jaeger, A. (1993), Detrending, Stylized Facts and the Business Cycle, *Journal of Applied Econometrics*, John Wiley & Sons, Ltd., vol. 8(3), pages 231-47, July-Sept.

Harvey, A. C. (2005), Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter, Cambridge Univ. Press, U.K.

R Core Team (2016), R: A Language and Environment for Statistical Computing, R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria, <https://www.R-project.org>

Yusof, F., Kane, I. L. (2013), Volatility modeling of rainfall time series. *Theoretical and Applied Climatology*, Volume 113, Issue 1, pp 247-258