PROGRAMAÇÃO POR METAS DO TIPO SOMA PONDERADA PARA RESOLUÇÃO DO MODELO MCDEA

Ana Paula dos Santos Rubem
Centro de Análise de Sistemas Navais
Rua da Ponte, Edifício 23, Ilha das Cobras, 20091-000, Rio de Janeiro, RJ
anapaula@casnav.mar.mil.br

João Carlos Correia Baptista Soares de Mello
Departamento de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, São Domingos, 24210-240, Niterói, RJ
jccbsmello@id.uff.br

Lidia Angulo Meza
Departamento de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Av. dos Trabalhadores, 420, 27255-125, Volta Redonda, RJ
lidia_a_meza@pq.cnpq.br

RESUMO

Buscando melhorar a discriminação e os multiplicadores nos modelos DEA (*Data Envelopment Analysis*) tradicionais, o modelo MCDEA (*Multiple Criteria* DEA) incorporou duas funções objetivo ao problema DEA mono-objetivo. Na tentativa de obter uma solução satisfatória que, tanto quanto possível, otimizasse conjuntamente os objetivos MCDEA, os modelos GPDEA (*Goal Programming* DEA) foram propostos com base na metodologia de programação por metas. Todavia, os modelos GPDEA provaram-se inválidos. Assim, o objetivo deste trabalho é desenvolver formulações que solucionem, adequadamente, o modelo MCDEA, usando programação por metas do tipo soma ponderada. As formulações aqui desenvolvidas são denominadas modelos WGP-MCDEA (*Weighted* GP-MCDEA) e geram as soluções MCDEA básicas não-dominadas, quando os níveis de aspiração para as metas são definidos com este fim. Quando esses níveis são flexibilizados, em geral, os modelos WGP-MCDEA geram a solução MCDEA básica não-dominada que cobre a maior área na região de indiferença de pesos.

PALAVRAS CHAVE. DEA, Programação multiobjetivo, Programação por metas.

Tópicos (DEA, ADM, PM)

ABSTRACT

Seeking to improve discrimination and multipliers in traditional DEA models, the MCDEA model incorporated two objective functions to the single objective DEA problem. In an attempt to obtain a satisfactory solution that, as far as possible, jointly optimizes the MCDEA objectives, the GPDEA models have been proposed based on goal programming methodology. However, GPDEA models were proved to be invalid. Thus, the objective of this work is to develop formulations that solve adequately the MCDEA model using weighted goal programming. The formulations developed here are called WGP-MCDEA models and generate the basic non-dominated MCDEA solutions when the aspiration levels for the goals are defined for this purpose. When these levels are smoothened, in general, WGP-MCDEA models generate the basic non-dominated MCDEA solution that covers the largest area on the weights indifference region.

KEYWORDS. DEA. Multiple objective programming. Goal programming.

Paper topics (DEA, ADM, PM)

1. Introdução

A baixa capacidade de discriminação entre unidades produtivas (DMUs, de *Decision-Making Units*) e multiplicadores pouco realistas usados no cálculo da eficiência destas unidades são limitações da Análise Envoltória de Dados (DEA, de *Data Envelopment Analysis*).

A baixa discriminação ocorre quando o número de DMUs avaliadas é muito menor que o total de *inputs* e *outputs* usados na avaliação [Sexton et al. 1986], resultando em um grande número de DMUs eficientes. Já os multiplicadores pouco realistas surgem quando uma DMU prioriza poucos *inputs* e/ou *outputs* na ponderação, atribuindo-lhes multiplicadores positivos e valores nulos aos demais [Li e Reeves 1999].

Essas limitações estão interligadas, pois os problemas de otimização resolvidos pela metodologia DEA permitem total flexibilidade na alocação de multiplicadores, de modo que cada DMU possa maximizar sua própria eficiência. A questão é controversa, pois alguns autores acreditam que todos os *inputs* e *outputs* devem ser considerados no cálculo da eficiência [e.g., Ghasemi et al. 2014], e enquanto outros [e.g., Angulo-Meza e Lins 2002] entendem que a flexibilidade dos multiplicadores deve ser preservada.

Uma das propostas desenvolvidas para amenizar as citadas limitações é o modelo MCDEA (de *Multiple Criteria* DEA) de Li e Reeves (1999), que recorre à programação linear multiobjetivo, incorporando duas funções objetivo ao modelo DEA original [Charnes et al. 1978].

Na análise MCDEA, geralmente, não há solução viável que satisfaça todos os objetivos simultaneamente. Assim, na tentativa de otimizar conjuntamente as três funções objetivo do MCDEA, Bal et al. (2010) propuseram uma abordagem de programação por metas: os modelos GPDEA (de *Goal Programming* DEA). Porém, na análise crítica conduzida por Ghasemi et al. (2014), os modelos GPDEA foram invalidados em razão de falhas decorrentes do uso inadequado da metodologia de programação por metas.

Este trabalho tem por objetivo desenvolver formulações que solucionem adequadamente o modelo MCDEA para os casos de retornos constantes e variáveis de escala, usando programação por metas do tipo soma ponderada, uma vez que os modelos GPDEA não atingem tal propósito, e não foi identificada na literatura proposta desenvolvida com este fim.

Na Seção 2, são apresentados os fundamentos teóricos utilizados. A Seção 3 resume a metodologia de programação por metas e exibe as formulações aqui desenvolvidas para resolução do modelo MCDEA. Na Seção 4, a proposta desenvolvida é aplicada para análise de eficiência em transporte aéreo. Por fim, a Seção 5 apresenta as conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

2. Fundamentos Teóricos

2.1. Modelos DEA

Os modelos DEA considerados são o CCR [Charnes et al. 1978] e o BCC [Banker et al. 1984]. O CCR supõe que as DMUs em análise operam em escala ótima e assume retornos constantes de escala (i.e., qualquer variação nos *inputs* produz uma variação proporcional nos *outputs* e esta proporção é igual para todas as DMUs). O BCC assume retornos variáveis de escala (i.e., substitui o axioma da proporcionalidade entre *inputs* e *outputs* pelo axioma da convexidade), admitindo que a produtividade máxima varie em função da escala de produção.

Considerando um processo produtivo em que cada DMU_k ($k = 1, \dots, n$) consome r *inputs* x_{ik} ($i = 1, \dots, r$) na produção de s *outputs* y_{jk} ($j = 1, \dots, s$), os problemas de programação linear dados em (1a) e (1b) denotam a formulação dos multiplicadores para os modelos CCR e BCC linearizados, orientados a *inputs*, respectivamente.

Em (1a) e (1b), u_j e v_i são variáveis de decisão que denotam os multiplicadores atribuídos aos *output* j e *input* i, respectivamente; e d_o denota o desvio de eficiência da DMU_o, a DMU avaliada. Em (1b), u_* é a variável de decisão que denota o fator de escala. Em (1a) e (1b), a DMU_o é eficiente, se $d_o = 0$. Caso contrário, quão o menor for d_o, menos ineficiente é a DMU.

Modelo CCR (formulação alternativa):

Min d_o
s. a. $\sum_{j=1}^{s} v_i x_{io} = 1$
$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} + d_k = 0, \forall k$ (1a)
$u_j, v_i, d_k \geq 0, \forall j, i, k$

Modelo BCC (formulação alternativa):

Min d_o
s. a. $\sum_{j=1}^{s} v_i x_{io} = 1$
$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} + d_k + u_* = 0, \forall k$ (1b)
$u_j, v_i, d_k \geq 0, \forall j, i, k$
$u_* \in \mathcal{R}$

2.2. Modelos MCDEA

O modelo MCDEA incorpora duas funções objetivo aos problemas DEA. Aqui, além da formulação de Li e Reeves (1999) baseada no modelo CCR dado em (1a), será usada a formulação baseada no modelo BCC dado em (1b), introduzida por Silveira et al. (2012).

Nos modelos MCDEA a primeira função objetivo é a mesma dos modelos DEA, por isto o conjunto de soluções MCDEA inclui a solução DEA. A segunda função objetivo minimiza o maior dos desvios das DMUs do conjunto de análise, ou seja min max d_k ($k=1, \ldots, n$), sendo chamada de minimax. A terceira função objetivo minimiza a soma dos desvios (i.e., min $\sum_{k=1}^{n} d_k$), sendo chamada de minisoma. As funções objetivo adicionais costumam fornecer soluções mais restritivas e tendem a reduzir a flexibilidade dos multiplicadores.

Assim, considerando as formulações dadas por (1a) e (1b), respectivamente, as formulações MCDEA correspondentes são descritas em (2a) e (2b), respectivamente.

MCDEA-CCR:

Min d_o
Min M
Min $\sum_{k=1}^{n} d_k$
s. a. $\sum_{j=1}^{s} v_i x_{io} = 1$
$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} + d_k = 0, \forall k$ (2a)
$M - d_k \geq 0, \forall k$
$u_j, v_i, d_k \geq 0, \forall j, i, k$

MCDEA-BCC:

Min d_o
Min M
Min $\sum_{k=1}^{n} d_k$
s. a. $\sum_{j=1}^{s} v_i x_{io} = 1$
$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} + d_k + u_* = 0, \forall k$ (2b)
$M - d_k \geq 0, \forall k$
$u_j, v_i, d_k \geq 0, \forall j, i, k$
$u_* \in \mathcal{R}$

Em (2a) e (2b), a variável M na segunda função objetivo (minimax) denota o máximo de todos os desvios d_k, e a introdução da terceira restrição (i.e., $M - d_k \geq 0, \forall k$) não altera a região viável de solução, só assegura que $\max d_k \geq 0$. Cabe ressaltar, ainda, que o único desvio limitado ao intervalo [0, 1] é o da DMU$_o$ (i.e., d_o). Os desvios de todas as demais DMUs (i.e., $d_{k\neq o}$) podem ser maiores que um.

Por definição, uma DMU é minimax eficiente, se o valor d_o referente à solução que otimiza a segunda função objetivo é nulo. Analogamente, uma DMU é minisoma eficiente, se o valor d_o correspondente à solução que otimiza a terceira função objetivo é nula. Portanto, quando uma DMU é minimax ou minisoma eficiente, ela também é eficiente no sentido DEA tradicional, pois as eficiências minimax e minisoma requerem $d_o = 0$ [Li e Reeves 1999].

De modo geral, o modelo MCDEA não permite uma ordenação completa das DMUs. Como, em geral, não há solução ótima que satisfaça a todos os objetivos MCDEA simultaneamente, o resultado é conjunto de soluções não-dominadas (i.e., conjunto de soluções viáveis tais que não haja outra solução viável que forneça uma melhora em uma das funções objetivo sem produzir piora em outra [Clímaco et al. 2003]). A análise de soluções MCDEA não-dominadas pode ser vista em Clímaco et al. (2008) e Soares de Mello et al. (2009), dentre outros.

Alguns trabalhos buscam a otimização simultânea das funções objetivo MCDEA, usando programação por metas. Bal e Örkcü (2007) desenvolveram o modelo GPMCDEA (de *Goal Programming* MCDEA) que usa a variante lexicográfica. Bal et al. (2010) propuseram os modelos GPDEA que se baseiam na variante da soma ponderada. Porém, os modelos GPDEA foram provados inválidos (vide Seção 1), e isto que se estende aos modelos GPMCDEA.

3. MCDEA via Programação por Metas

3.1. Programação por Metas

A programação por metas [Charnes e Cooper 1961] é um método multiobjetivo que permite minimizar o desvio entre as metas e os respectivos níveis de aspiração. Ao usá-la, deve-se, primeiramente, atribuir a cada um dos objetivos um valor g_i que representa seu nível de aspiração (i.e., o valor que deseja alcançar como mínimo ou não deseja superar, ou, ainda, em alguns casos, o valor exato que deseja atingir para o objetivo correspondente). Combinando o objetivo e o nível de aspiração, obtém-se a meta propriamente dita, cuja formulação deve obedecer as seguintes condições [Caballero et al. 1997]:

- para um objetivo $f_i(.)$ de maximização, ao se definir um nível de aspiração g_i, deseja-se que $f_i(.) \geq g_i$;
- para um objetivo de minimização, ao se definir um nível de aspiração, deseja-se que $f_i(.) \leq g_i$; e
- quando o decisor desejar que determinado objetivo se iguale ao nível de aspiração, isto é, $f_i(.) = g_i$, o objetivo original pode ser de maximização ou minimização.

Após a definição das metas, atribuem-se os níveis de prioridade entre os objetivos. Essa atribuição de prioridades pode ser uma a uma, ou seja, a cada nível corresponderá um único objetivo (variante lexicográfica). Alternativamente, pode-se preferir que vários objetivos compartilhem um mesmo nível de prioridade, demandando a definição de um esquema de ponderação para os objetivos no mesmo nível (variante da soma ponderada).

Portanto, a resolução do problema multiobjetivo por meio de programação por metas atenderá as metas impostas e os níveis de prioridade estabelecidos. As soluções assim obtidas são denominadas satisfatórias.

Adicionalmente, para a aplicação do método de programação por metas, é necessário introduzir variáveis positivas de desvio nas metas do problema. Essas variáveis representam as diferenças existentes entre os níveis de aspiração e o resultado alcançado em cada objetivo, devendo ser minimizadas. A introdução deve obedecer o seguinte [Caballero et al. 1997]:

- para um objetivo de maximização, a meta deve ser do tipo $f_i(.) \geq g_i$, e o desvio indesejável deve reduzir o nível de aspiração, sendo denotado por d_i^-.
- para um objetivo de minimização, a meta deve ser do tipo $f_i(.) \leq g_i$, e o desvio indesejável associado deve aumentar o nível de aspiração, sendo denotado por d_i^+.
- no caso em que a meta deva se igualar ao objetivo, $f_i(.) = g_i$, então a soma dos desvios d_i^- e d_i^+ deve ser tratada como indesejável, e o desvio indesejável será dado por $d_i^- + d_i^+$.

A função que minimiza os desvios indesejáveis é denominada função de realização, sendo denotada por $a(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)$, onde $\mathbf{d}^- = \left(d_1^-, \cdots, d_p^-\right)$ e $\mathbf{d}^+ = \left(d_1^+, \cdots, d_p^+\right)$. Um dos tipos mais usados é o da soma ponderada, representado como em (4), para o caso específico em que todas as p metas devam se igualar aos objetivos do problema original.

$$\text{Min } a\left(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+\right) = \sum_{i=1}^{p} \delta_i (d_i^- + d_i^+) \quad (3)$$

No problema de programação por metas, em geral, o primeiro conjunto de restrições é formado pelas restrições originais do problema multiobjetivo, denominadas duras ou técnicas, por serem de cumprimento obrigatório. O segundo conjunto de restrições é formado por aquelas que resultam da construção das metas, denominadas restrições brandas, uma vez que seu cumprimento não é obrigatório. Assim, dadas as metas, e considerando a função de realização em (3), o problema de programação por metas pode ser escrito como em (4).

$$\begin{aligned}&\text{Min} \textstyle\sum_{i=1}^{p} \delta_i (d_i^- + d_i^+)\\ &\text{s.a. } z \in Z\\ &f_i(z) + d_i^- - d_i^+ = g_i, i = 1, \ldots, p\\ &d_i^-, d_i^+ \geq 0, i = 1, \ldots, p\end{aligned} \quad (4)$$

Embora as variantes lexicográfica e da soma ponderada sejam as mais referenciadas, há outras, como, por exemplo, a Minimax [Romero 2004] e a multimetas [Zeleny 1982].

3.2. Formulações para Resolução do MCDEA via Programação por Metas

Considerando os fundamentos teóricos apresentados na Subseção 3.1, a Tabela 1 sintetiza a estrutura para a aplicação da metodologia de programação por metas aos problemas MCDEA descritos em (2a) e (2b), para os casos CCR e BCC, respectivamente.

Tabela 1 – Estrutura para aplicação de programação por metas aos problemas MCDEA

Objetivos MCDEA	Metas iniciais	Metas transformadas	Desvios indesejáveis
$f_1 = \min d_o$	$d_o = g_1$ ou $d_o \leq g_1$	$d_o + d_1^- - d_1^+ = g_1$	$d_1^- + d_1^+$ ou d_1^+
$f_2 = \min M$	$M = g_2$ ou $M \leq g_2$	$M + d_2^- - d_2^+ = g_2$	$d_2^- + d_2^+$ ou d_2^+
$f_3 = \min \sum_{k=1}^{n} d_k$	$\sum_{k=1}^{n} d_k = g_3$ ou $\sum_{k=1}^{n} d_k \leq g_3$	$\sum_{k=1}^{n} d_k + d_3^- - d_3^+ = g_3$	$d_3^- + d_3^+$ ou d_3^+

A Tabela 1 apresenta as três funções objetivo dos modelos MCDEA, as duas possibilidades de meta para cada objetivo (igualdade ou desigualdade não-estrita), a representação das metas após a inclusão das variáveis de desvio, e o desvio indesejável a ser minimizado na função de realização para atingir o nível de aspiração definido pelo decisor, dependendo do tipo de meta definido (igualdade ou desigualdade não-estrita).

Na variante da soma ponderada, a função de realização deve minimizar a soma ponderada dos desvios indesejáveis mostrados na Tabela 1, que podem variar conforme o tipo de meta inicial definida.

No desenvolvimento das formulações aqui propostas, inicialmente, listou-se conjunto de restrições originais dos modelos MCDEA (restrições duras), que têm de ser obrigatoriamente satisfeitas (vide Subseção 3.1), para, então, relacionar as restrições brandas, decorrentes das definições das metas e que não precisam ser obrigatoriamente atendidas. Essas formulações serão chamadas de WGP-MCDEA (de *Weighted Goal Programming* MCDEA). As formulações dos modelos WGP-MCDEA, que visam resolver os modelos MCDEA, descritos em (2a) e (2b), são dadas, respectivamente, por (5a) e (5b).

Como visto na Subseção 2.2, d_o é o único desvio de eficiência limitado ao intervalo [0, 1]. Por esse motivo, poder-se-ia fixar o nível de aspiração g_1=1 na quarta restrição (primeira meta) em (5a) e (5b). No entanto, como os desvios de eficiência das demais DMUs (i.e., $d_{k\neq o}$) podem ser maiores que 1, optou-se por não pré-fixar os valores máximos para os níveis de aspiração g_2 e g_3, já que estes valores dependem do conjunto de dados e podem ser calibrados ao longo da análise.

Assim, por questão de padronização, nas formulações aqui propostas optou-se por flexibilizar todos níveis de aspiração. Com isso, todas as metas dos modelos WGP-MCDEA são de desigualdade não-estrita. Adicionalmente, na função de realização, também optou-se por flexibilizar os coeficientes de ponderação (pesos).

WGP-MCDEA-CCR:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } a = \{\delta_1 d_1^+ + \delta_2 d_2^+ + \delta_3 d_3^+\} \\
&\text{s. a. } \textstyle\sum_{i=1}^{r} v_i x_{io} = 1 \\
&\textstyle\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} + d_k = 0, \forall k \\
&M - d_k \geq 0, \forall k \\
&d_o + d_1^- - d_1^+ \leq g_1 \\
&M + d_2^- - d_2^+ \leq g_2, \forall k \\
&\textstyle\sum_{k=1}^{n} d_k + d_3^- - d_3^+ \leq g_3 \\
&u_j, v_i \geq 0, \forall j, i \\
&\delta_1, \delta_2, \delta_3, d_k, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0, \forall k
\end{aligned} \tag{5a}$$

WGP-MCDEA-BCC:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } a = \{\delta_1 d_1^+ + \delta_2 d_2^+ + \delta_3 d_3^+\} \\
&\text{s. a. } \textstyle\sum_{i=1}^{r} v_i x_{io} = 1 \\
&\textstyle\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} + u_* + d_k = 0, \forall k \\
&M - d_k \geq 0, \forall k \\
&d_o + d_1^- - d_1^+ \leq g_1 \\
&M + d_2^- - d_2^+ \leq g_2, \forall k \\
&\textstyle\sum_{k=1}^{n} d_k + d_3^- - d_3^+ \leq g_3 \\
&u_j, v_i \geq 0, \forall j, i \\
&\delta_1, \delta_2, \delta_3, d_k, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0, \forall k \\
&u_* \in \mathcal{R}
\end{aligned} \tag{5b}$$

4. Aplicação para Avaliação de Companhias Aéreas

Esta seção apresenta uma aplicação do modelo WGP-MCDEA-CCR dado em (5a) a um conjunto de dados reais, baseada no trabalho de Pereira et al. (2013), que conduz uma avaliação MCDEA da eficiência das companhias aéreas brasileiras. Porém, devido à indisponibilidade dos dados originais, foram necessárias algumas modificações nas variáveis usadas no modelo, sendo considerados como *outputs* as métricas “passageiros-km transportados” e “toneladas-km transportadas” e como *inputs* a “capacidade da frota” e o “total de funcionários”, cujos valores foram obtidos no sítio da Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC).

A Tabela 2 apresenta os dados utilizados na análise, os quais se referem ao ano de 2008. As DMUs são as dezessete companhias que operaram conjuntamente o serviço de transporte aéreo de carga e passageiro naquele ano.

Tabela 2 – *Inputs* e *outputs* praticados pelas companhias aéreas em 2008

DMU	Companhia	*Inputs*		*Outputs*	
		Total de funcionários	Capacidade da frota (t)	Passageiros-km transportados	Toneladas-km transportadas
1	Abaeté	8	11,8	1.378.000	124.618.000
2	Air Minas	237	31,2	18.744.000	1.679.494.000
3	Gol/Varig	15911	8486,6	26.296.872.000	2,75374E+12
4	Meta	144	29,65	37.800.000	3.983.704.000
5	NHT	105	39,6	16.678.000	1.499.134.000
6	Oceanair	1349	980,772	1.464.627.000	1,59498E+11
7	Pantanal	286	100,2	79.126.000	7.295.597.000
8	Passaredo	345	71,4	86.746.000	8.531.520.000
9	Puma	26	28	4.172.000	433.543.000
10	Rico	76	173,17	50.013.000	5.251.874.000
11	Sete	98	19,84	9.075.000	1.000.180.000
12	TAF	207	442	77.986.000	44.866.432.000
13	TAM	22781	13617,5	40.702.300.000	4,67156E+12
14	Team	66	14	3.480.000	286.871.000
15	Total	275	442	66.507.000	41.849.129.000
16	Trip	1177	392,2	517.235.000	51.882.217.000
17	Webjet	972	673,574	1.180.795.000	1,2358E+11

O *output* “passageiros-km transportados” representa o número de passageiros transportados por uma determinada companhia multiplicado pela distância total voada (em quilômetros) por todas as aeronaves pertencentes a sua frota. O *output* “toneladas-km transportadas’ indica a tonelagem total de carga transportada por uma determinada companhia multiplicada pela distância total percorrida (em quilômetros) por todas as aeronaves pertencentes à respectiva frota. Os trabalhos de Silveira et al. (2012) e Gomes Júnior et al. (2016) reportam o uso desses mesmos *outputs*.

O *input* "capacidade da frota" considera o peso máximo de decolagem (em toneladas) de todas as aeronaves pertencentes à frota de uma companhia. O uso desse mesmo *input* é reportado nos em Silveira et al. (2012) e Gomes Júnior et al. (2016). O *input* "total de funcionários" inclui pessoal de voo, técnico, tráfego, vendas e demais funcionários de uma determinada companhia, e, portanto, denota a quantidade total de pessoas por ela empregadas.

Apesar da diferença de escala de operação entre as companhias, não há garantia de desproporcionalidade entre *inputs* e *outputs*. Isso fundamenta o uso da suposição de retornos constantes de escala. Essa suposição evita que as empresas que operam fora da escala ótima sejam beneficiadas. A orientação a *inputs* foi usada para se avaliar as empresas em condições de reduzir sua capacidade de frota e força de trabalho sem prejuízo ao total de carga e passageiros transportados [Pereira et al. 2013].

Os dados da Tabela 2 foram normalizados, dividindo-se cada *input*/*output* pelo seu respectivo máximo, para evitar distorções decorrentes diferenças nas unidades de medida. Primeiramente, o modelo MCDEA-CCR dado em (6a) foi aplicado aos dados de *inputs* e *outputs* normalizados, utilizando-se o *software* iMOLPe versão 2.1 para obtenção dos resultados.

O conjunto de soluções básicas não-dominadas é exibido na Tabela 3, onde se observa que, para a DMU 1 (Abaeté), há solução que otimiza os três objetivos simultaneamente. Nota-se, ainda, que as DMUs eficientes são as DMUs 3, 12 e 13 (Gol/Varig, TAF e TAM, respectivamente), duas das quais (Gol/Varig e TAM) detinham 93% do mercado à época. A DMU 3 (Gol/Varig) é minisoma eficiente; a DMU 12 (TAF) é simplesmente eficiente, pois otimizou apenas o primeiro objetivo (solução 1), equivalente ao CCR tradicional; enquanto a DMU 13 (TAM) é tanto minimax como minisoma eficiente.

A seguir, o modelo WGP-MCDEA-CCR descrito em (5a) foi aplicado ao mesmo conjunto de dados, fixando-se $\delta_1= \delta_2= \delta_3=1$ como os pesos usados na função de realização, e $g_1=g_2=1$ e $g_3=17$ como os níveis de aspiração para as metas que correspondem ao primeiro, segundo e terceiro objetivos MCDEA, respectivamente.

Optou-se pelo uso de pesos iguais na tentativa de otimizar os três objetivos simultaneamente. Os níveis de aspiração g_1 e g_2 foram definidos como sendo unitários por representarem os desvios de eficiência. No primeiro caso, (i.e., para d_o), isso se deve ao fato de a meta ter que obrigatoriamente se restringir ao intervalo [0,1]. No segundo caso, embora o valor máximo dos desvios de eficiência das DMUs em análise possa ser maior que 1 (veja Subseção 2.2), optou-se por fixar o nível de aspiração para o objetivo minimax (i.e., g_2) como sendo também unitário. Usando um raciocínio similar, o nível de aspiração g_3 para a meta minisoma (soma dos desvios de eficiência das 17 DMUs) foi definido como igual a 17. Tal procedimento não é obrigatório e busca apenas simplificar o processo.

Tabela 3 – Soluções básicas não-dominadas MCDEA-CCR para as companhias aéreas

DMU	Solução	Valores das funções objetivo			Eficiência
		f_1	f_2	f_3	(1- f_1)
1	1 (λ_1=λ_2=λ_3=1)	0,9609087	42,4424	186,1318	0,0390913
2	1 (λ_1= 1; λ_2=λ_3=0)	0,8061619	16,28167	88,597	0,1938381
	2 (λ_1=λ_3=0; λ_2=1)	0,9447016	3,975542	22,16162	0,0552984
	3 (λ_1=λ_2=0; λ_3=1)	0,9557342	5,032448	19,15877	0,0442658
3	1 (λ_1= λ_3= 1;λ_2=0)	0	0,04975553	0,2463643	1
	2 (λ_2=1; λ_1=λ_3=0)	0,0288506	0,04340798	0,2613794	0,9711494
4	1 (λ_1=1; λ_2=λ_3=0)	0,5875612	16,89344	74,08642	0,4124388
	2 (λ_1=λ_3=0; λ_2=1)	0,8234684	6,293283	35,08184	0,1765316
	3 (λ_1=λ_2=0; λ_3=1)	0,8530793	8,282573	31,53216	0,1469207
5	1 (λ_1=1; λ_2=λ_3=0)	0,8640815	12,8309	69,81955	0,1359185
	2 (λ_1=λ_3=0; λ_2=1)	0,8938229	7,482974	45,05843	0,1061771
	3 (λ_1=λ_2=0; λ_3=1)	0,9110986	11,35896	43,2441	0,0889014
6	1 (λ_1=1; λ_2=λ_3=0)	0,4390377	0,9893909	3,766659	0,5609623
	2 (λ_1=λ_3=0; λ_2=1)	0,4707923	0,4707923	2,834857	0,5292077
	3 (λ_1=λ_2=0; λ_3=1)	0,5107103	0,5107103	2,239727	0,4892897
7	1 (λ_1=1; λ_2=λ_3=0)	0,7451521	5,070893	27,59336	0,258479
	2 (λ_1=λ_3=0; λ_2=1)	0,8105907	2,813649	16,94228	0,1894093
	3 (λ_1=λ_2=0; λ_3=1)	0,8451516	4,170247	15,87633	0,1548484
8	1 (λ_1=1; λ_2=λ_3=0)	0,6079144	7,116296	38,72345	0,3920856
	2 (λ_1=λ_3=0; λ_2=1)	0,8309993	2,625338	14,63492	0,1690007
	3 (λ_1=λ_2=0; λ_3=1)	0,8592708	3,457074	13,16125	0,1407292
9	1 (λ_1=1; λ_2=λ_3=0)	0,9423533	18,07911	89,51864	0,0576467
	2 (λ_1= 0; λ_2= λ_3=1)	0,9520548	17,88894	78,4522	0,0479452
10	1 (λ_1=1; λ_2=λ_3=0)	0,6316818	15,6933	59,74515	0,3683182
	2 (λ_1=0; λ_2= λ_3=1)	0,9066949	2,892476	12,685	0,0933051
11	1 (λ_1=1; λ_2=λ_3=0)	0,8494242	25,24648	110,7188	0,1505758
	2 (λ_1=λ_3=0; λ_2=1)	0,9376142	9,263729	51,64056	0,0623858
	3 (λ_1=λ_2=0; λ_3=1)	0,9481709	12,17031	46,33297	0,0518291
12	1 (λ_1=1; λ_2=λ_3=0)	0	11,172	25,69177	1
	2 (λ_1= 0; λ_2= λ_3=1)	0,8452966	1,133236	4,969824	0,1547034
13	1 (λ_1=λ_2=1;λ_3=0)	0	0,03214597	0,1591707	1
	2 (λ_1=λ_3=1; λ_2=0)	0	0,0288781	0,1738884	1
14	1 (λ_1=1; λ_2=λ_3=0)	0,9464376	20,13845	99,71545	0,0535624
	2 (λ_1=λ_3=0; λ_2=1)	0,9646538	13,68702	76,29816	0,0353462
	3 (λ_1=λ_2=0; λ_3=1)	0,9704886	18,07107	68,79744	0,0295114
15	1 (λ_1=1; λ_2=λ_3=0)	0,2846538	8,568059	19,70359	0,7153462
	2 (λ_1=λ_3=0; λ_2=1)	0,8585134	1,133236	4,969824	0,1414866
16	1 (λ_1=1; λ_2=λ_3=0)	0,5743917	1,295521	7,049602	0,4256803
	2 (λ_1=λ_3=0; λ_2=1)	0,6944212	0,6944212	4,18143	0,3055788
	3 (λ_1=λ_2=0; λ_3=1)	0,7540396	1,013331	3,8578	0,2459604
17	1 (λ_1=1; λ_2=λ_3=0)	0,3200733	1,227048	4,67143	0,6799267
	2 (λ_1=λ_3=0; λ_2=1)	0,364689	0,6324111	3,808039	0,635311
	3 (λ_1=λ_2=0; λ_3=1)	0,4343798	0,7436308	3,261204	0,5656202

A Tabela 4 apresenta alguns resultados obtidos a partir da aplicação do modelo WGP-MCDEA-CCR aos dados das companhias avaliadas. Os resultados reportados são os necessários para efetuar a comparação com as soluções MCDEA-CCR da Tabela 3. As folgas denotadas por s_2 e s_3 representam os déficits em relação aos níveis de aspiração g_2 e g_3, respectivamente.

Tabela 4 – Resultados WGP-MCDEA-CCR para os dados das companhias aéreas

DMU	d_o	Desvios indesejáveis			Folgas		Eficiência	Solução
		d_1^+	d_2^+	d_3^+	s_2	s_3	$(1-d_o)$	equivalente
1	0,9609087	0	41,4424	169,1318	0	0	0,0390913	1
2	0,9557338	0	4,032448	2,158773	0	0	0,04426616	3
3	0,07496013	0	0	0	0,9250399	16,71462	0,9250399	-
4	0,8530793	0	7,282574	14,53216	0	0	0,1469207	3
5	0,9018275	0	6,932165	27,21777	0	0	0,09817248	-
6	0,5180648	0	0	0	0,4819352	14,18094	0,4819352	-
7	0,8105906	0	1,813649	0	0	0,05772408	0,1894094	2
8	0,8309992	0	1,625338	0	0	2,365079	0,1690008	2
9	0,9520548	0	16,88894	61,4522	0	0	0,04794523	2
10	0,9066949	0	1,892476	0	0	4,315002	0,09330505	2
11	0,9481709	0	11,17031	29,33297	0	0	0,05182911	3
12	0,8452966	0	0,1332362	0	0	12,03018	0,1547034	2
13	0	0	0	0	0,9476454	16,80068	1	-
14	0,9704886	0	17,07107	51,79744	0	0	0,02951137	3
15	0,8585135	0	0,1332362	0	0	12,03018	0,1414865	2
16	0,7525992	0	0	0	0	13,13438	0,2474008	-
17	0,4342575	0	0	0	0,2456605	12,89525	0,5657425	-

Na Tabela 4, observa-se que, para a maioria (11 de 17) das companhias avaliadas, o modelo WGP-MCDEA-CCR resultou em uma das soluções básicas não-dominadas MCDEA-CCR. Com exceção da DMU7 (Pantanal), a solução MCDEA-CCR reproduzida foi a que cobre a maior área na região de indiferença de pesos (o espaço onde todos os conjuntos de pesos λ_i fornecem a mesma solução). No caso da DMU 1 (Abaeté), o modelo WGP-MCDEA-CCR reproduziu a solução ótima MCDEA-CCR.

Baseando-se na Tabela 4, as equivalências entre os valores atingidos pelas metas do modelo WGP-MCDEA-CCR e valores "ótimos" para as funções objetivo da solução básica não-dominada MCDEA-CCR equivalente encontrada (vide Tabela 3), tornam-se evidentes ao se adicionar os desvios indesejáveis não-nulos aos respectivos níveis de aspiração (e.g., DMUs 1, 2, e 4), e/ou subtrair as folgas não-nulas dos respectivos níveis de aspiração (e.g., DMUs 6, 7 e 8).

Embora não constem das Tabelas 3 e 4, para as 11 DMUs em que o modelo WGP-MCDEA-CCR resultou em alguma solução básica não-dominada MCDEA, as equivalências se estendem aos multiplicadores.

No caso das seis DMUs, em que o modelo WGP-MCDEA-CCR não resultou exatamente igual a uma solução básica não-dominada MCDEA-CCR, as diferenças nos resultados de eficiência foram moderadas em relação às respectivas soluções básicas não-dominadas MCDEA-CCR que cobrem a maior área na região de indiferença, com exceção da DMU 13 (TAM), cuja solução WGP-MCDEA-CCR apesar de não ter reproduzido os valores "ótimos" das funções objetivo minimax e minisoma MCDEA-CCR, resultou em 100% de eficiência tal como na Tabela 2. Isso porque a DMU 13 (TAM) é tanto minimax como minisoma eficiente.

É fato que, dependendo dos níveis de aspiração definidos para as metas, os resultados obtidos pelo modelo WGP-MCDEA-CCR podem variar. Contudo, como visto na aplicação aqui analisada, os resultados de eficiência obtidos são, geralmente, iguais ou bem próximos aos da solução básica não-dominada MCDEA-CCR que abrange a maior área na região de indiferença.

Embora nem todas as soluções básicas não-dominadas MCDEA-CCR exibidas na Tabela 3 tenham sido encontradas pelo modelo WGP-MCDEA-CCR, isto não significa que não possam ser. A obtenção de tais soluções poderia ser efetuada mediante a definição de níveis de aspiração iguais aos resultados "ótimos" das soluções básicas não-dominadas MCDEA-CCR.

Adicionalmente, o método usado pelo *software* iMOLPe na resolução do problema MCDEA-CCR foi o da soma ponderada. Esse método resulta em soluções básicas não-dominadas que representam pontos extremos (vértices da fronteira). Em razão disso, dentre as seis DMUs cujos resultados obtidos pelo modelo WGP-MCDEA-CCR não foram idênticos a alguma das soluções básicas não-dominadas MCDEA-CCR, quatro (DMUs 5, 6, 16 e 17) obtiveram resultados que correspondem a soluções não-dominadas MCDEA-CCR que representam pontos interiores da fronteira. Nesses casos, a maior área (ou parcela significativa) da região de indiferença corresponde a soluções não-dominadas do tipo pontos interiores.

No caso das DMUs 3 e 13, as soluções WGP-MCDEA-CCR obtidas são dominadas. Em ambos os casos, os valores "ótimos" para os objetivos minimax e minisoma nas soluções básicas não-dominadas MCDEA-CCR diferem bastante dos valores atribuídos aos níveis de aspiração g_2 e g_3, respectivamente. Além disso, os valores "ótimos" das funções objetivo minimax e minisoma diferem muito pouco entre cada solução básica não-dominada MCDEA-CCR. Com isso, mesmo após sucessivas reduções nos valores atribuídos aos níveis de aspiração g_2 e g_3, o modelo WGP-MCDEA-CCR demora encontrar alguma das soluções básicas não-dominadas MCDEA-CCR.

Em que pesem os aspectos acima mencionados, é importante ressaltar que o modelo WGP-MCDEA-CCR resultou em apenas uma DMU 100% eficiente (DMU 13 - TAM), que é eficiente nas duas soluções não-dominadas MCDEA-CCR exibidas na Tabela 3. Em 2008, ano em análise, a TAM era a maior companhia aérea do mercado brasileiro, detendo 50% do mercado. Nesse sentido, a formulação WGP-MCDEA-CCR aumentou a discriminação entre as DMUs, em relação ao modelo CCR tradicional (vide soluções 1 da Tabela 3), cuja aplicação resulta em três DMUs eficientes (DMUs 3, 12 e 13 - Gol/Varig, TAF e TAM, respectivamente).

Na Tabela 4, observa-se que usando o modelo WGP-MCDEA-CCR, a DMU 3 (Gol/Varig), vice-líder de mercado à época, embora tenha obtido um resultado de eficiência alto (92,5%), não ficou empatada com a empresa líder (DMU 13 - TAM), classificada neste modelo como a mais eficiente de todas (i.e., a única companhia 100% eficiente). No caso da DMU 12 (TAF), ficou evidente que o modelo CCR tradicional foi bastante benevolente ao classificá-la como eficiente, uma vez que na solução WGP-MCDEA-CCR, esta empresa obteve um resultado de eficiência pouco expressivo (15,47%).

5. Conclusões

Neste trabalho, foram introduzidas formulações que solucionam adequadamente o modelo MCDEA, para os casos CCR e BCC, mediante o uso de programação por metas do tipo soma ponderada. Essas formulações foram denominadas modelos WGP-MCDEA-CCR e WGP-MCDEA-BCC.

Para ilustrar a validade dos modelos propostos, avaliou-se o modelo WGP-MCDEA-CCR, quando aplicado a um estudo análise de eficiência de companhias aéreas. A análise revelou que, apesar da sensibilidade aos níveis de aspiração definidos para as metas dos objetivos minimax e minisoma, o modelo, de modo geral, resultou em eficiências iguais ou bastante similares àquelas obtidas por alguma solução não dominada MCDEA-CCR, geralmente aquela que cobre a maior área na região de indiferença de pesos.

As formulações WGP-MCDEA expandem a aplicabilidade dos modelos MCDEA, pois permitem resolvê-los, oferecendo uma solução satisfatória única. Essa solução atende, tanto quanto possível, as preferências e prioridades definidas *a priori*, ao invés de simplesmente gerar múltiplas soluções não dominadas. A solução única permite, ainda, a ordenação completa das DMUs, o que, via de regra, não ocorre com o uso dos modelos MCDEA, a menos que se recorra a procedimentos adicionais (e.g., Soares de Mello et al., 2009; Zhao et al., 2006).

Uma limitação dos modelos WGP-MCDEA é que eles podem resultar em soluções dominadas. Contudo, o uso de programação por metas por si já pressupõe a concordância em se afastar das soluções não dominadas, uma vez que a solução satisfatória encontrada pode representar uma solução dominada para o problema tri-objetivo original.

Não obstante, como visto nas aplicação aqui ilustrada, o modelo WGP-MCDEA, normalmente, resulta na solução não dominada MCDEA que cobre a maior área na região de indiferença de pesos. Isso acontece porque, como as soluções obtidas dependem do nível de aspiração definido para as metas, ao se estabelecer estes níveis, há maiores chances de o modelo WGP-MCDEA encontrar a solução não dominada que cobre a maior área na região de indiferença do que outras soluções restritas a áreas menores.

Em trabalhos futuros, pretende-se avaliar o uso da variante lexicográfica, com a finalidade de reformular os modelos GPMCDEA [Bal e Örkcü 2007]. Outra possibilidade é estender as formulações WGP-MCDEA, para a orientação a *outputs* [Rubem et al. 2015a, 2015b; Rubem e Brandão 2015] e para os duais parciais MCDEA [Chaves et al. 2016]. Por fim, considera-se que a análise de sensibilidade dos níveis de aspiração é de grande relevância, a fim de determinar, por exemplo, os intervalos em que estes níveis de aspiração podem variar sem alterar a solução WGP-MCDEA obtida.

Referências

Angulo-Meza, L. e Lins, M. P. E. (2002). Review of methods for increasing discrimination in data envelopment analysis. *Annals of Operations Research*, 116:225–242.

Bal, H. e Örkcü, H. H. (2007). A Goal programming approach to weight dispersion in data envelopment analysis. *Gazi University Journal of Science*, 20:117–125.

Bal, H., Örkcü, H. H. e Celebioglu, S. (2010). Improving the discrimination power and weights dispersion in the data envelopment analysis. *Computers and Operations Research*, 37:99–107.

Banker, R. D., Charnes, A. e Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30:1078–1092.

Caballero, R., Gómez, T., González, M., Muñoz, M. M., Rey, L. e Ruiz, F. (1997). *Programación matemática para economistas*. Servicio de Publicaciones y Divulgación Científica de la Universidad de Málaga, Málaga.

Charnes, A. e Cooper, W. W. (1961). *Management model and industrial application of linear programming*. Wiley, New York.

Charnes, A., Cooper, W. W. e Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2:429–444.

Chaves, M. C. C., Soares de Mello, J. C. C. B. e Angulo-Meza, L. (2016). Studies of some duality properties in the Li and Reeves model. *Journal of the Operational Research Society*, 67:474–482.

Clímaco, J. C. N., Antunes, C. H. e Alves, M. J. (2003). *Programação linear multiobjectivo*. Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra.

Clímaco, J. C. N., Soares de Mello, J. C. C. B. e Angulo-Meza, L. (2008). Performance measurement - from DEA to MOLP. In F. Adam, P. Humphreys (eds.), *Encyclopedia of decision making and decision support technologies*. Information Science Reference.

Ghasemi, M. R., Ignatius, J. e Emrouznejad, A. (2014). A bi-objective weighted model for improving the discrimination power in MCDEA. *European Journal of Operational Research*, 233:640–650.

Gomes Júnior, S. F., Rubem, A. P. S., Soares de Mello, J. C. C. B. e Angulo-Meza, L. (2016). Evaluation of Brazilian airlines nonradial efficiencies and targets using an alternative DEA approach. *International Transactions in Operational Research*, 23:669–689.

Li, X. -B. e Reeves, G. R. (1999). A multiple criteria approach to data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 115: 507–517.

Pereira, E. R., Chaves, M. C. C. e Soares de Mello, J. C. C. B. (2013). Evaluation of efficiency of Brazilian airlines using the MCDEA-TRIMAP model. In *Proceedings of the* 2nd *International Conference on Operations Research and Enterprise Q9 Systems*, p. 213–221.

Romero, C. (2004). A general structure of achievement function for a goal programming model. *European Journal of Operational Research*, 153: 675–686.

Rubem, A. P. S. e Brandão, L. C. (2015). Multiple criteria data envelopment analysis – an application to UEFA EURO 2012. *Procedia Computer Science*, 55:186–195.

Rubem, A. P. S., Brandão, L. C., Costa, E. F., Angulo-Meza, L. e Soares de Mello, J. C. C. B. (2015a). Evaluation of operational efficiency for Brazilian port terminals specialized in container cargo using Multiple Criteria Data Envelopment Analysis. In *27th European Conference on Operational Research*, Glasgow.

Rubem, A. P. S., Brandão, L. C., Costa, E. F., Angulo-Meza, L. e Soares de Mello, J. C. C. B. (2015b). Avaliação da eficiência operacional de terminais brasileiros especializados em contêineres usando uma adaptação do modelo de Li e Reeves. In *Anais do XLVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Porto de Galinhas.

Rubem, A. P. S., Brandão, L. C. e Soares de Mello, J. C. C. B. (2015c). Goal-programming-based procedure for calculating positive multipliers under a multiple criteria aata envelopment analysis framework: an application to UEFA EURO 2012. *Annals of Data Science*, 2: 439–451.

Sexton, T. R., Silkman, R. H. e Hogan, A. J. (1986). Data envelopment analysis: critique and extensions. In R. H. Silkman (ed.), *Measuring efficiency: an assessment of data envelopment analysis*. Jossey-Bass.

Silveira, J. Q., Soares de Mello, J. C. C. B. e Angulo-Meza, L. (2012). Brazilian airlines efficiency evaluation using a data envelopment analysis (DEA) and multiobjective linear programming hybrid model. *Ingeniare*, 20:331–342.

Soares de Mello, J. C. C. B., Clímaco, J. C. N. e Angulo-Meza, L. (2009). Efficiency evaluation of a small number of DMUs: an approach based on Li and Reeves's model. *Pesquisa Operacional*, 29: 97–110.

Zeleny, M. (1982). *Multiple Criteria Decision Making*. Mc Graw Hill, New York.

Zhao, M. -Y., Cheng, C. -T., Chau, K. -W. e Li, G. (2006). Multiple criteria data envelopment analysis for full ranking units associated to environment impact assessment. *International Journal of Environment and Pollution*, 28:448–-464.