

## HEURÍSTICAS CONSTRUTIVAS PARA O PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM CUSTOS ESCALONADOS

**Débora P. Ronconi**

Universidade de São Paulo – Escola Politécnica  
Av. Prof. Almeida Prado, 128, Cidade Universitária – São Paulo-SP – Brasil  
[dronconi@usp.br](mailto:dronconi@usp.br)

**João L. V. Manguino**

Universidade de São Paulo – Escola Politécnica  
Av. Prof. Almeida Prado, 128, Cidade Universitária – São Paulo-SP – Brasil  
[joao.manguino@usp.br](mailto:joao.manguino@usp.br)

### RESUMO

O problema de roteamento de veículos tem grande relevância na indústria. Na literatura, o seu estudo vem evoluindo visando aproximar-se da realidade das empresas. Alinhado a essa tendência, esse artigo aborda o problema de roteamento de veículos quando há a terceirização da frota na entrega de mercadorias. Uma forma possível de cobrança do frete é por meio de custos escalonados, que são calculados de acordo com o tipo de veículo e a distância percorrida, com valores fixos por faixas de distância. Apesar de ser uma forma comum de frete na indústria, nenhum trabalho focado nesta característica foi encontrado na literatura. Neste trabalho, inicialmente é apresentado um modelo de programação linear inteira mista para este problema. Em seguida, heurísticas construtivas são propostas buscando lidar com problemas de maior dimensão. Experimentos numéricos mostram que o melhor método proposto apresenta um bom desempenho em diferentes cenários do problema.

**PALAVRAS CHAVE:** roteamento de veículos, custo escalonado, heurística.

### ABSTRACT

The vehicle routing problem has great relevance in the industry. In the literature, the study of this problem has been evolving in order to approach the reality experienced by companies. Aligned with this trend, this article addresses the vehicle routing problem in which there is outsourcing of the fleet of vehicles when delivering goods. A possible form of freight charging is through step-cost functions that calculated the cost according to the type of vehicle and the distance traveled, with fixed values for each distance range. Despite being a common form of freight-charge in the industry, no work focused on this feature was found in the literature. In this work, initially a mixed linear programming model is presented for this problem. Then constructive heuristics are proposed aiming to handle large problems. Numerical experiments show that the best proposed method offers a good performance in different scenarios.

**KEYWORDS:** vehicle routing, step-cost function, heuristic.

## 1. Introdução

O tema de roteamento de veículos tem grande importância na literatura e vem sendo amplamente estudado por sua relevância para a indústria. A primeira abordagem para o problema de roteamento de veículos clássico (VRP - *Vehicle Routing Problem*) foi feita por Dantzig e Ramser (1959) para um problema real de distribuição de combustível para estações de venda. Neste problema, veículos idênticos partiam de um depósito central e realizavam entregas em pontos distribuídos no espaço com diferentes demandas e custo pré-determinado de traslado entre pontos. A partir deste artigo, o tema foi amplamente estudado e tem como marco a heurística das economias (*Savings Heuristic*), proposta por Clarke e Wright (1964).

Com a evolução do tema na literatura e tendo como objetivo aproximar-se mais da realidade vivida pela indústria e transportadoras, este problema foi enriquecido com mais restrições, características de clientes, frotas e rotas (Laporte, 2009). A partir do clássico VRP, foi agregada uma característica que o aproximasse de um caso real, o dimensionamento da frota. Assim, os veículos utilizados no roteamento não são mais idênticos, mas de diferentes tipos. Golden *et al.* (1984) foram os primeiros a estudar este problema, nomeando-o “problema de roteamento de veículos com determinação do tamanho e composição da frota” ou FSMVRP (*Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem*). Após essa primeira abordagem, diversos outros autores publicaram estudos sobre este tema, como pode ser visto na pesquisa de Hoff *et al.* (2010). No VRPTW (*Vehicle Routing Problem with Time Windows*) adiciona-se ao VRP clássico o limite de horário de atendimento nos pontos de demanda (clientes), trazendo o problema mais próximo à realidade. Em casos reais, as empresas têm horário de início e fim de operação, como por exemplo as restrições de horário para circulação de caminhões em algumas cidades. O artigo publicado por Solomon (1987) apresentou a primeira abordagem considerando esse cenário, com a proposição de uma formulação matemática e heurísticas.

A evolução natural do problema foi a união das características e restrições do FSMVRP com o VRPTW. Surge, assim, o FSMVRPTW (*Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Time Windows*). Nesse caso o objetivo é minimizar simultaneamente os custos fixos e variáveis do roteamento de uma frota heterogênea de veículos, respeitando as janelas de tempo nos clientes, fornecedores e do armazém central. A primeira abordagem para o problema foi feita por Liu e Shen (1999) que propuseram uma heurística, baseando-se principalmente nos métodos desenvolvidos por Golden *et al.* (1984). Dullaert *et al.* (2002) apresentaram restrições de janelas de tempo que devem ser adicionadas à formulação do FMSVRP para que este se torne compatível com o FSMVRPTW, além de usar um novo método heurístico baseado em Solomon (1987) para esse problema, obtendo bons resultados. Dell’Amico *et al.* (2007) apresentaram uma nova formulação e uma heurística construtiva para fornecer uma solução inicial a uma meta-heurística que soluciona o FSMVRPTW.

O presente trabalho se propõe a adicionar um importante aspecto ao FSMVRPTW; será analisado o caso de roteamento de veículos onde a entrega é feita utilizando a frota de veículos de um parceiro. Nesse problema, a empresa prepara a própria rota de entrega de seus produtos, mas não é dona e nem deve incorrer com os custos diretos da frota de veículos; ela utiliza os serviços de um parceiro logístico. Estas empresas que oferecem este serviço são conhecidas como “prestadores de serviços logísticos” (PSL), ou simplesmente “operadores logísticos”. O uso de um PSL traz vantagens para os dois lados da negociação. Para a empresa que contrata, ela pode manter sua estrutura organizacional focada na sua função principal e, assim, evitar custos relacionados à aquisição e manutenção de uma frota de veículos, depreciação dos equipamentos, salários e encargos de motoristas e ajudantes, entre outros componentes de custo, além de evitar administrar toda essa estrutura. O fornecedor de frete, por sua vez, possui uma extensa frota de veículos distintos e portfólio de clientes. Ele fornece os veículos prontos para utilização e realização das entregas.

Os custos de frete considerados neste trabalho são calculados a partir de uma tabela de frete na qual para cada roteiro deve se combinar o tipo de veículo utilizado e a distância percorrida para se encontrar o seu custo. O processo de cálculo de custo logístico para a empresa se torna mais rápido e transparente. Na literatura, vários métodos de custo de frete e transporte

são abordados. Em Ghiani *et al.* (2004), são listados diferentes métodos de custo de frete, levando em conta se a empresa é dona de sua frota de veículos, se a aluga ou contrata um operador logístico. Entre as formas de custo apresentadas, existem inclusive custos escalonados de acordo com o peso transportado. No entanto, não há uma abordagem direta ao FSMVRPTW com custos escalonados de acordo com a distância percorrida.

O problema com essas características pode ser classificado, segundo a nomenclatura corrente na literatura, como FSMVRPTW com a adição da restrição de custos escalonados. Assim, é adicionado à sigla o termo em inglês para custos escalonados, “*step costs*”, formando assim a sigla: FSMVRPTWSC (*Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Time Windows and Step Costs*). Liu e Shen (1999) provaram que o FSMVRPTW pertence à classe NP-Difícil dos problemas de otimização combinatória. Por redução polinomial, o FSMVRPTWSC também pode ser provado pertencer à classe NP-Difícil. O objetivo é minimizar o custo total do roteamento, atendendo as demandas dos clientes e respeitando as restrições de janelas de tempo. Na próxima seção apresentamos uma descrição mais detalhada do problema, assim como a sua formulação matemática. A seguir são apresentadas heurísticas construtivas e experimentos numéricos. A Seção 5 resume as principais conclusões.

## 2. Descrição do problema e formulação matemática

Neste problema existe um conjunto de pontos  $N = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  distribuídos no espaço, sendo que o local 0 é o armazém (ou centro de distribuição) e os demais pontos são os clientes. Para cada par de locais  $(i, j)$  pertencentes ao conjunto  $N$ , existe uma distância  $d_{ij}$  e um tempo de percurso  $t_{ij}$  conhecidos. Cada cliente  $i$  possui uma demanda  $q_i$  que requer um tempo de atendimento  $s_i$  e janelas de tempo para que o atendimento seja iniciado com início em  $e_i$  e fim em  $l_i$ . O horário de funcionamento do armazém é definido por  $[e_0, l_0]$ . Existem  $K$  diferentes tipos de veículos. Cada tipo de veículo  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) possui uma capacidade  $a_k$  ( $a_1 < a_2 < \dots < a_K$ ). Além disso, o custo de cada veículo  $k$  depende da faixa de distância na qual a distância percorrida por este veículo se encaixa, ou seja, cada veículo  $k$  possui custos  $C_{kf}$  para distâncias entre  $W_f$  e  $W_{f+1}$  quando  $f = 1, 2, \dots, F-1$ , sendo  $F-1$  a penúltima faixa de distância. A última faixa de distância,  $F$ , é uma exceção por não possuir um limitante superior e possuir custos linearmente crescentes com a distância a partir do valor de  $C_{kF-1}$  e somando  $C_{kF}$  para cada unidade de distância adicionada. Desta forma, dada uma distância  $d$  percorrida, o custo  $C_k$  de um veículo do tipo  $k$  pode ser calculado da seguinte forma:

$$C_k(d) = \begin{cases} C_{kf} & \text{se } W_f < d \leq W_{f+1} \text{ e } 1 \leq f < F, \\ C_{kF-1} + (d - W_F)C_{kF} & \text{se } d > W_F. \end{cases}$$

A Figura 1 ilustra como funciona o mecanismo de custos escalonados com três tipos de veículos ( $K = 3$ ) e quatro faixas de distância ( $F = 4$ ). Observe que para cada faixa de cobrança  $f$  existem dois parâmetros: *i*) um custo  $C_{kf}$  para cada tipo de veículo  $k$  e *ii*) uma distância  $W_{f+1}$  que determina o limitante superior para a faixa, ou seja, a distância máxima percorrida pelo veículo para que ele ainda esteja naquela faixa de custo.

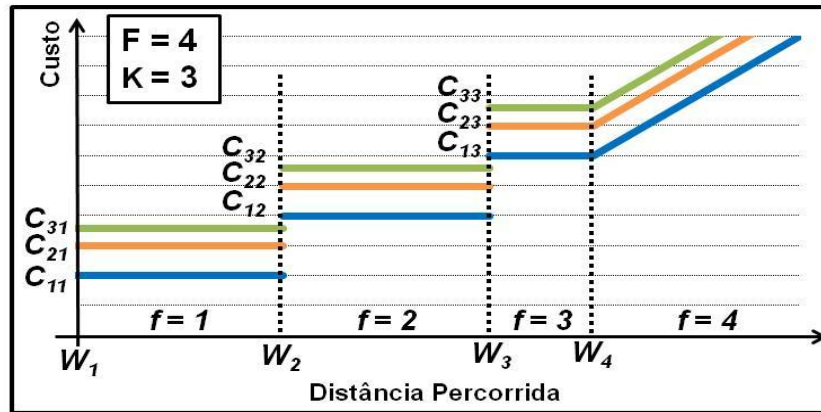


Figura 1. Representação gráfica do custo escalonado em função da distância percorrida em um exemplo com três tipos de veículos e quatro faixas de distância.

A seguir é apresentada a formulação de programação linear inteira mista para o FSMVRPTWSC, com base na formulação para FSMVRP de Golden *et al.* (1984) e com os apontamentos sobre janelas de tempos para adaptá-lo para o FSMVRPTW de Dullaert *et al.* (2002).

**Índices:**

$p, i, j$ : clientes;  $k$ : tipo de veículo;  
 $v$ : veículos;  $f, y$ : faixa de distância;

**Parâmetros:**

$n$ : número total de clientes;  $t_{ij}$ : tempo de trânsito de  $i$  a  $j$ ;  
 $K$ : quantidade de tipos de veículos;  $d_{ij}$ : distância de  $i$  a  $j$ ;  
 $F$ : quantidade de faixas de distância;  $s_i$ : tempo de serviço em  $i$ ;  
 $q_i$ : demanda de  $i$ ;  $e_i$ : início da janela de tempo em  $i$ ;  
 $a_k$ : capacidade de veículos do tipo  $k$ ;  $l_i$ : fim da janela de tempo em  $i$ ;  
 $W_f$ : início da faixa de distância  $f$ ;  
 $C_{kf}$ : custo fixo do veículo tipo  $k$  para faixas de distância  $f$  em que  $f = 0, 1, 2, \dots, F - 1$ ;  
 $C_{kF}$ : custo, por unidade de distância percorrida, do veículo tipo  $k$  na última faixa de distância;  
 $V$ : Número máximo de veículos;  $M$ : Número positivo grande

**Variáveis:**

$x_{ij}^v$ : assume valor 1 se veículo  $v$  vai de  $i$  para  $j$ , 0 caso contrário;  
 $z_{kf}^v$ : assume valor 1 se veículo  $v$  é do tipo  $k$  e percorre distância da faixa  $f$ , 0 caso contrário;  
 $b_i^v$ : instante de início do serviço de  $v$  no cliente  $i$ ;  
 $D^v$ : distância percorrida por  $v$ ;  $P^v$ : custo de  $v$

**Modelo:**

$$\text{Minimize } \sum_{v=1}^V P^v \tag{1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=0}^n x_{0j}^v = 1 \quad v = 1, \dots, V \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ip}^v - \sum_{j=0}^n x_{pj}^v = 0 \quad v = 1, \dots, V; p = 0, \dots, n \tag{3}$$

$$\sum_{v=1}^V \sum_{i=0}^n x_{ij}^v = 1 \quad j = 1, \dots, n \tag{4}$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n q_i x_{ij}^v \leq \sum_{f=0}^F \sum_{k=1}^K a_k z_{kf}^v \quad v = 1, \dots, V \tag{5}$$

$$b_i^v + s_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}^v) \leq b_j^v \quad v = 1, \dots, V; i = 0, \dots, n; j = 1, \dots, n \tag{6}$$

$$e_i \leq b_i^v \leq l_i \quad v = 1, \dots, V; i = 0, \dots, n \tag{7}$$

$$b_i^v + s_i + t_{i0} - M(1 - x_{i0}^v) \leq l_0 \quad v = 1, \dots, V; i = 1, \dots, n \tag{8}$$

$$D^v = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_{ij}^v d_{ij} \quad v = 1, \dots, V \quad (9)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{f=0}^F z_{kf}^v = 1 \quad v = 1, \dots, V \quad (10)$$

$$D^v - W_y \leq M \sum_{k=1}^K \sum_{f=y}^F (z_{kf}^v) \quad v = 1, \dots, V; y = 1, \dots, F - 1 \quad (11)$$

$$-(D^v - W_F) \leq M(1 - \sum_{k=1}^K z_{kF}^v) \quad v = 1, \dots, V \quad (12)$$

$$P^v \geq \sum_{k=1}^K \sum_{f=0}^{F-1} z_{kf}^v C_{kf} \quad v = 1, \dots, V \quad (13)$$

$$P^v \geq C_{kF-1} + C_{kF}(D^v - W_F) - M(1 - z_{kF}^v) \quad v = 1, \dots, V; k = 1, \dots, K \quad (14)$$

$$b_i^v \geq 0 \quad v = 1, \dots, V; i = 0, \dots, n \quad (15)$$

$$x_{ij}^v \in \{0,1\} \quad v = 1, \dots, V; i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, n \quad (16)$$

$$z_{kf}^v \in \{0,1\} \quad v = 1, \dots, V; k = 1, \dots, K; f = 0, \dots, F \quad (17)$$

A função objetivo (1) minimiza a soma dos custos de todos os veículos utilizados no roteamento. O conjunto (2) determina que todos os veículos devem sair do armazém. As restrições (3) determinam que se um veículo  $v$  chega a um ponto  $p$  qualquer deve, em seguida, sair dele. As restrições (4) garantem que cada cliente será atendido por exatamente um veículo. Note que esses três conjuntos de restrições combinados também garantem que todos os veículos devem encerrar a sua rota retornando ao armazém. As restrições (5) garantem que a capacidade de cada veículo não seja excedida. O conjunto de restrições (6), (7) e (8) garantem o respeito às janelas de tempo dos pontos de demanda. As restrições (6) determinam o instante mínimo de início do atendimento em cada cliente, bem como garantem a não existência de sub rotas, enquanto (7) garante que esse instante esteja dentro das janelas de tempo do cliente. As restrições (8) tem funcionamento similar ao do conjunto de restrições (6) porém especificamente para o retorno do veículo ao armazém dentro da janela de tempo deste.

As restrições (9) definem a variável  $D^v$ , a distância total percorrida por cada veículo  $v$ . As restrições (10) determinam que um veículo  $v$  deve ser de um único tipo  $k$  e a distância percorrida deve estar em uma única faixa  $f$  de cobrança. Isto é determinado pela variável  $z_{kf}^v$ , ela assume valor 1 quando o veículo  $v$  é do tipo  $k$  e cuja faixa de cobrança é  $f$ . O tipo de veículo  $k$  é determinado a partir das restrições (5), explicada anteriormente. A faixa de cobrança  $f$  é determinada nas restrições (11) e (12), as quais funcionam conjuntamente para determinar em qual faixa de cobrança a distância percorrida pelo veículo  $v$  está. As restrições (11) restringem a faixa mínima na qual a distância percorrida pelo veículo deve estar. Como o modelo é de minimizar custos, ele sempre buscará que  $z_{kf}^v$  tenha valor 1 para a alocação que gere o menor custo. Portanto, somente é necessário restringir a faixa mínima, deixando livre a escolha de faixas maiores. A única exceção é a última faixa, cuja forma de custeio é diferente de todas as outras. Assim, a restrição (12) determina se a distância percorrida está ou não na última faixa de distância. É relevante ressaltar que para veículos em que  $D^v = 0$ , estes devem estar na faixa  $f = 0$  e receber o custo  $C_{k0} = 0$ . É possível notar que a faixa  $f = 0$  não está presente no conjunto das restrições (11) e (12), mas está na restrição (10). Desta forma, para  $D^v = 0$ , as restrições (11) não estarão ativadas para nenhuma faixa  $y$ . Porém, devido a  $C_{k0} = 0 \forall k$  e a função objetivo ser de minimizar o custo dos veículos, o modelo escolherá  $z_{k0}^v = 1$ .

As restrições (13) e (14) em conjunto determinam o valor mínimo para o custo  $P^v$  de cada veículo  $v$ . Como a função objetivo é para minimizar este valor, determinar o valor mínimo já significa calcular o próprio valor de  $P^v$ . As restrições (13) se referem às faixas de custo com valores fixos e as (14) à faixa  $F$ , cujo custo é variável a partir do valor da faixa  $F - 1$ . Estas restrições são viáveis devido à determinação derivada da variável  $z_{kf}^v$  nas restrições (5), (10), (11) e (12).

### 3. Heurísticas Construtivas

Nessa seção são apresentadas heurísticas de inserção sequencial que serão, a partir de agora, referidas como SCIH (*Step Cost Insertion Heuristic*). O método foi proposto originalmente por Solomon (1987) para o VRPTW e depois adaptado com sucesso para o FSMVRPW por Dullaert *et al.* (2002). O método da inserção sequencial foi adaptado para explorar as características do FSMVRPTWSC.

A heurística de inserção sequencial se inicia pela criação de uma rota exclusiva para atender o cliente mais distante da rota. Após o início de uma rota, cada cliente não roteado é avaliado para a inserção nessa mesma rota. A avaliação passa por calcular o impacto negativo da inserção – como aumento de custos da rota, distância percorrida, etc. – e esse é comparado com os impactos negativos de gerar uma rota exclusiva para o cliente sendo avaliado. Caso o resultado se mostre favorável e todas as restrições sejam respeitadas, a inserção é feita. O processo se repete até que não haja mais clientes não roteados cuja inserção seja benéfica com os critérios citados. Quando não existem mais inserções benéficas, uma nova rota é criada ou, se não houver mais clientes não roteados, o procedimento é encerrado. O cálculo do impacto negativo da inserção do cliente na rota é denominado critério C1 e abrange fatores como a diferença de distância percorrida, o tempo de serviço na rota, custo de frete e ocupação do veículo. O cálculo do benefício de não ter de criar uma rota exclusiva para o cliente sendo avaliado é denominado C2 e carrega as mesmas características de C1. Diferentes definições de C1 e C2 são propostas nas próximas subseções. A seguir apresenta-se a estrutura geral das heurísticas propostas.

#### Algoritmo SCIH:

- Passo 1.** Inicie uma nova rota: Selecione o cliente não roteado que fica mais distante do depósito e crie uma rota exclusiva para ele. Se todos os cliente já foram roteados, encerre o procedimento.
- Passo 2.** Faça uma lista de clientes candidatos para adição a rota. É candidato um cliente não roteado cuja demanda  $q_u$ , quando adicionada à demanda total da rota, gere um total inferior à capacidade  $a_K$  do maior veículo disponível. Se a lista possuir ao menos um cliente candidato, siga para o Passo 3. Caso contrário, retorne ao Passo 1.
- Passo 3.** Para cada cliente da lista de candidatos, calcule C1 e a correspondente melhor posição para inserção na rota. Caso a inserção seja impossível devido a restrições de janelas de tempo, exclua o cliente da lista de candidatos. Caso existam clientes na lista de candidatos, siga para o Passo 4, caso contrário, volte ao Passo 1.
- Passo 4.** Calcule C2 para cada cliente da lista de candidatos. Selecione o cliente com o maior valor de C2. Caso este valor seja positivo, adicione o cliente à rota na posição determinada no Passo 3, marque este cliente como roteado e volte ao Passo 2. Caso não existam clientes com C2 positivo retorne ao Passo 1.

### 3.1 Heurística SCIH1

A primeira heurística proposta neste trabalho é uma adaptação da *Adapted Combined Savings* (ACS), de Dullaert *et al.* (2002), para o FSMVRPTWSC. Este método será denominado SCIH1 e seus critérios C1 e C2 serão, respectivamente, referidos por  $C1^{S1}$  e  $C2^{S1}$ . O critério  $C1^{S1}$  é composto por três elementos: o aumento na distância total da rota em decorrência da adição do novo cliente  $u$  ( $C1_1^{S1}$ ), o atraso no início do serviço no cliente que estava na posição  $h$  ( $i_h$ ) na qual o cliente  $u$  será inserido ( $C1_2^{S1}$ ), e o aumento do custo da rota ( $C1_3^{S1}$ ). Enquanto na heurística ACS este último termo considera somente o custo fixo da troca de veículo (quando necessário), na SCIH1,  $C1_3^{S1}$  terá o valor da mudança de custo na tabela de frete, seja esta causada por uma troca de veículo para um maior ou uma mudança na faixa de distância. Os três elementos serão ponderados pelos fatores  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$ ,  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1$ .  $C1^{S1}$  é definido a seguir:

$$C1^{S1}(u) = \text{Min}_{\{h=1, \dots, m\}} \{ \alpha_1 C1_1^{S1}(u, h) + \alpha_2 C1_2^{S1}(u, h) + \alpha_3 C1_3^{S1}(u, h) \}$$

$$C1_1^{S1}(u, h) = d_{i_{h-1}, u} + d_{u, i_h} - d_{i_{h-1}, i_h}$$

$$C1_2^{S1}(u, h) = b^{new}_{i_h} - b_{i_h}$$

$$C1_3^{S1}(u, h) = P^{new} - P$$

Onde  $b^{new}_{i_h}$  é o início do serviço no cliente  $i_h$  calculado após a possível inserção do cliente  $u$ ,  $P^{new}$  é o novo custo total da rota após essa inserção e  $P$  é o custo original da rota.

O benefício de evitar uma rota exclusiva para o cliente  $u$ ,  $C2^{S1}$ , é avaliado de forma análoga a  $C1^{S1}$ . Portanto, sua formulação possui os mesmos três elementos adaptados a uma



viagem de um ponto apenas. Similarmente, os elementos são balanceados pelos fatores  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0$ :

$$C2^{S1}(u) = \beta_1 C2^{S1}_1(u) + \beta_2 C2^{S1}_2(u) + \beta_3 C2^{S1}_3(u) - C1^{S1}(u)$$

$$C2^{S1}_1(u) = d_{0,u}$$

$$C2^{S1}_2(u) = t_{0,u} + s_u$$

$$C2^{S1}_3(u) = P(0, u)$$

Observe que a distância considerada para  $C2^{S1}_1$  é apenas a distância de ida do depósito para cliente  $u$ , assim como  $C2^{S1}_2$  somente calcula o tempo de ida somado ao de atendimento. No cálculo de  $C2^{S1}_3$ ,  $P(0, u)$  é o custo, de acordo com a tabela de frete dessa viagem exclusiva. Somente o trajeto de ida para o cliente  $u$  é considerado pois provavelmente esta rota será ampliada, portanto, ao avaliar  $C2^{S1}$ , o retorno ao depósito não foi adicionado como parte do impacto.

### 3.2 Heurística SCIH2

A heurística SCIH2 tem como objetivo explorar mais diretamente as características do problema abordado. No caso do FSMVRPTWSC, a distância não afeta diretamente a função objetivo, mas indiretamente por poder causar uma mudança na faixa de distância e, conseqüentemente, um aumento de custo. Desta forma, o procedimento para solucionar o problema pode ser mais eficiente se, ao invés de calcular a variação de distância diretamente, avaliar seu impacto no uso da faixa de distância.

Com essa percepção, a heurística SCIH2 é proposta, com similaridades com SCIH1, porém com uma definição diferente para  $C1_1$ , que passa a considerar a distância remanescente na faixa de distância adotada após a inserção do novo cliente na rota. Quanto maior essa disponibilidade na faixa, maior a probabilidade de inserção de clientes na mesma faixa de distância sem aumento de custos. Como  $C1$  é um critério de impacto negativo na inserção do cliente na rota e quanto menor  $C1$ , mais favorável é a inserção do cliente, na heurística SCIH2,  $C1_1$  receberá sinal negativo.  $C1$  e  $C2$  para o SCIH2 são mencionados por  $C1^{S2}$  e  $C2^{S2}$  e também terão fatores  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ .

$$C1^{S2}(u) = \text{Min}_{\{h=0, \dots, m\}} \{-\alpha_1 C1^{S2}_1(u, h) + \alpha_2 C1^{S2}_2(u, h) + \alpha_3 C1^{S2}_3(u, h)\}$$

$$C1^{S2}_1(u, h) = \begin{cases} W_{f+1} - D^{new} & \text{se } f < F, \\ 0 & \text{se } f = F, \end{cases}$$

$$C1^{S2}_2(u, h) = b^{new}_{i_h} - b_{i_h}$$

$$C1^{S2}_3(u, h) = P^{new} - P$$

Note que o termo  $C1^{S2}_1$  é calculado pela diferença entre a distância total da rota após a possível adição do cliente  $u$  ( $D^{new}$ ) e o início da faixa de distância seguinte a esta distância,  $W_{f+1}$ . Se  $D^{new}$  estiver já na última faixa,  $C1^{S2}_1$  assume valor zero, pois não existe a possibilidade de inserção de clientes sem aumento de custos.  $C1^{S2}_2$  e  $C1^{S2}_3$  têm formulação similar a de SCIH1.

$C2^{S2}$  contém os mesmos três elementos de  $C1^{S2}$ , todos adaptados para a rota exclusiva para o atendimento do candidato  $u$ . Além disso, todos os elementos de  $C2^{S2}$  são balanceados pelos fatores  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0$ , ou seja:

$$C2^{S2}(u) = -\beta_1 C2^{S2}_1(u) + \beta_2 C2^{S2}_2(u) + \beta_3 C2^{S2}_3(u) - C1^{S2}(u).$$

$$C2^{S2}_1(u) = \begin{cases} W_{f(0,u)+1} - d_{0,u} & \text{se } f(0, u) < F, \\ 0 & \text{se } f(0, u) = F, \end{cases}$$

$$C2^{S2}_2(u) = t_{0,u} + s_u$$

$$C2^{S2}_3(u) = P(0, u)$$

## 4. Experimentos Numéricos

### 4.1 Geração de instâncias

Para poder avaliar a qualidade das heurísticas propostas, instâncias da literatura foram adaptadas para o FSMVRPTWSC. Solomon (1987) gerou 56 instâncias com 100 clientes para o VRPTW, enquanto Liu e Shen (1999) adicionaram a essas instâncias três grupos de custos fixos e capacidades para adaptá-las para o FSMVRPTW, formando um total de 168 instâncias. Nas instâncias para o FSMVRPTWSC são mantidas todas as características destas instâncias com a adaptação sendo feita somente na estrutura de custo. Para manter os custos fixos gerados por Liu e Shen (1999), esses valores serão usados para o custo da primeira faixa de distância de cada veículo ( $C_{k1}$ ), a partir daí foram definidas as faixas de distância e seus respectivos custos ( $C_{kf}$ ,  $1 < f < F$ ). O número de faixas de distância ( $F$ ) para cada tipo de problema foi definido de acordo com o tempo total de planejamento. Para as instâncias com o horizonte menor (R1, C1 e RC1), foram definidas 4 faixas de distância, enquanto para instâncias com horizonte maior (R2, C2 e RC2), 5 faixas. Além disso, baseado na prática de mercado, conforme a distância aumenta, o tamanho de cada faixa de distância também aumenta, ou seja, para um dado  $f$ ,  $1 < f < F - 1$ ,  $W_{f-1} < W_{f+1} - W_f$ .

### 4.2 Resultados Computacionais

As heurísticas foram implementadas na linguagem C e os testes conduzidos em um computador com processador Intel Core i7-3612QM, 2.1 GHz e 8GB de RAM. A heurística ACS, proposta por Dullaert *et al.* (2002) para o FSMVRPTW, também foi avaliada com os parâmetros indicados pelos autores.

Testes preliminares foram conduzidos em um conjunto reduzido de instâncias para selecionar a melhor combinação de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ . Este conjunto foi formado com três instâncias de cada grupo (C1a, C1b, C1c, C2a, C2b, C2c, R1a, R1b, R1c,...), selecionadas de forma aleatória, totalizando 54 instâncias. Foram avaliados valores decimais entre 0 e 1, ou seja  $\{0; 0,1; 0,2; \dots 1,0\}$ . As combinações dos índices foram avaliadas e as que obtiveram os melhores valores médios de custo total, para cada um dos métodos propostos, são apresentadas na Tabela 1. Vale observar que o fator  $\alpha_2$  assumiu valor nulo nas duas heurísticas analisadas. Possivelmente tal fato ocorreu pois, no caso do FSMVRPTWSC, o tempo adicional dispendido com a inserção de um novo cliente pode dificultar o atendimento das janelas de tempo, mas não obrigatoriamente afeta o valor da função objetivo.

**Tabela 1. Valores dos índices  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$  para cada heurística**

Heurística	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
SCIH1	0,9	0,0	0,3	0,2	0,0	1,0
SCIH2	0,2	0,0	0,8	0,0	0,1	0,2

A Tabela 2 apresenta a porcentagem de melhores resultados obtida por cada método em cada grupo de instâncias (*Grupo*). Os valores em negrito são os melhores obtidos para cada grupo. Observe que podem ocorrer empates e, portanto, a soma por linha nem sempre será igual a 100%. A Tabela 3 apresenta o valor médio da função objetivo obtido por cada método para cada grupo de instância.



Tabela 2. Porcentagem de melhores soluções obtidas pelas heurísticas para cada grupo de instâncias

<i>Grupo</i>	<i>#instâncias</i>	<i>SCIH1</i>	<i>SCIH2</i>	<i>ACS</i>
C1	27	0,0	<b>100,0</b>	0,0
C1a	9	0,0	<b>100,0</b>	0,0
C1b	9	0,0	<b>100,0</b>	0,0
C1c	9	0,0	<b>100,0</b>	0,0
C2	24	33,3	<b>66,7</b>	0,0
C2a	8	12,5	<b>87,5</b>	0,0
C2b	8	0,0	<b>100,0</b>	0,0
C2c	8	<b>87,5</b>	12,5	0,0
R1	36	22,2	<b>80,6</b>	0,0
R1a	12	0,0	<b>100,0</b>	0,0
R1b	12	33,3	<b>66,7</b>	0,0
R1c	12	33,3	<b>75,0</b>	0,0
R2	33	0,0	<b>100,0</b>	0,0
R2a	11	0,0	<b>100,0</b>	0,0
R2b	11	0,0	<b>100,0</b>	0,0
R2c	11	0,0	<b>100,0</b>	0,0
RC1	24	12,5	<b>87,5</b>	0,0
RC1a	8	0,0	<b>100,0</b>	0,0
RC1b	8	37,5	<b>62,5</b>	0,0
RC1c	8	0,0	<b>100,0</b>	0,0
RC2	24	12,5	<b>87,5</b>	0,0
RC2a	8	12,5	<b>87,5</b>	0,0
RC2b	8	25,0	<b>75,0</b>	0,0
RC2c	8	0,0	<b>100,0</b>	0,0
Total	168	13,1	<b>87,5</b>	0,0

Tabela 3. Custo médio obtido por cada método para cada grupo de instâncias

<i>Grupo</i>	<i>SCIH1</i>	<i>SCIH2</i>	<i>ACS</i>
C1	4.402,4	<b>2.966,0</b>	4.805,6
C1a	9.869,0	<b>6.197,0</b>	10.096,4
C1b	2.165,9	<b>1.637,0</b>	2.672,0
C1c	1.172,2	<b>1.063,9</b>	1.648,4
C2	3.011,4	<b>2.507,7</b>	3.946,2
C2a	6.666,5	<b>5.323,9</b>	8.394,4
C2b	1.507,4	<b>1.327,2</b>	2.091,4
C2c	<b>860,3</b>	872,1	1.352,9
R1	1.714,7	<b>1.521,3</b>	2.094,0
R1a	3.676,9	<b>3.131,4</b>	4.359,9
R1b	873,4	<b>850,1</b>	1.154,2
R1c	593,9	<b>582,5</b>	767,9
R2	2.360,1	<b>1.544,1</b>	2.864,0
R2a	5.043,6	<b>2.955,2</b>	5.425,9
R2b	1.254,1	<b>979,5</b>	1.819,0

R2c	782,7	<b>697,6</b>	1.347,2
RC1	2.098,0	<b>1.770,0</b>	2.365,1
RC1a	4.333,8	<b>3.409,4</b>	4.778,8
RC1b	1.179,4	<b>1.153,4</b>	1.383,9
RC1c	780,7	<b>747,0</b>	932,6
RC2	1.652,7	<b>1.565,0</b>	3.337,0
RC2a	3.316,5	<b>3.223,8</b>	6.340,7
RC2b	977,6	<b>916,5</b>	2.144,2
RC2c	664,0	<b>554,8</b>	1.526,1
<b>Total</b>	<b>2.504,6</b>	<b>1.940,6</b>	<b>3.161,9</b>

A partir da análise das Tabelas 2 e 3 pode se notar que existe um claro domínio da heurística SCHI2 sobre as demais. Com exceção do grupo de instâncias C2c, este é o método que obtém o menor valor médio por grupo de instâncias e encontra a absoluta maioria dos melhores resultados. O método ACS, apresenta um desempenho muito abaixo das demais heurísticas, pois não encontra nenhum dos melhores resultados obtidos para as 168 instâncias e seu custo médio total é 60% maior que o método SCHI2. O método SCHI1, que é uma adaptação da ACS para os custos escalonados tem um desempenho superior ao ACS, porém ainda assim é consideravelmente inferior ao da heurística SCHI2 que foi formulada buscando explorar diretamente as características do FSMVRPTWSC. Este resultado confirma o que motivou a execução desse trabalho, a percepção que é possível obter reduções relevantes de custo com o desenvolvimento de uma metodologia que aborde as características específicas do FSMVRPTWSC.

Para aprimorar a avaliação da heurística SCHI2, instâncias com um número reduzido de clientes foram geradas e resolvidas de forma exata através do modelo matemático apresentado na Seção 2. Foram fixados 3 diferentes tamanhos de problemas, 10, 20 e 25 clientes. Para cada um dos 18 tipos de instâncias (R1, R2, C1, C2, RC1 e RC2 e 3 tipos de veículo) foi criada uma instância com 10, outra com 20 e outra com 25 clientes, totalizando 54 instâncias.

O modelo foi resolvido utilizando o *software* CPLEX 12.5 com a configuração padrão e limite máximo de tempo de processamento de 1 hora. Foram obtidos 34 resultados ótimos. Na Figura 2 é apresentado um gráfico com o desempenho da heurística SCHI2 para cada uma das 34 instâncias e a diferença relativa (*Dif%*) em relação ao valor ótimo. As instâncias estão ordenadas de acordo com a diferença percentual apresentada.

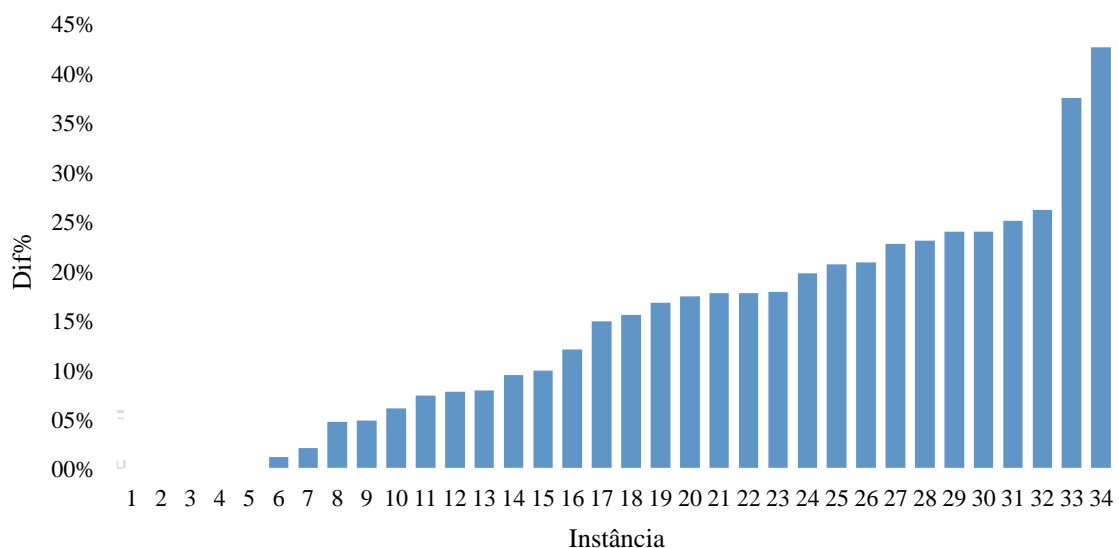


Figura 2. Desvio do resultado da heurística SCHI2 em relação ao valor ótimo para cada instância.

Na Figura 2 é possível observar que dos 34 valores ótimos conhecidos a heurística encontrou 5 resultados ótimos, e que em 50% das instâncias, seu desempenho ficou no máximo 15% acima do valor ótimo. Somente em duas instâncias pertencentes ao grupo R2c (distribuição aleatória de clientes e amplas janelas de tempo) o resultado da heurística foi superior a 26% do valor ótimo. É relevante notar que o tempo computacional médio por instância da heurística foi de menos de 0,17 milissegundos, enquanto o modelo matemático demorou em média 177 segundos.

## 5. Conclusões

Neste trabalho, o problema de roteamento de veículos com frota mista, janelas de tempo e custos escalonados (FSMVRPTWSC) foi estudado. Apesar da existência de diversos trabalhos na literatura considerando o problema de roteamento de veículos, nenhum deles aborda diretamente o FSMVRPTW com custos escalonados de acordo com a distância percorrida por cada tipo de veículo.

Um modelo de programação linear inteira mista e duas heurísticas foram apresentadas. Os métodos propostos neste trabalho foram avaliados em instâncias adaptadas para o FSMVRPTWSC. Ambos os métodos propostos SCHI1 e SCHI2 apresentaram desempenho superior ao método ACS, com desempenho dominante do SCHI2. Esse resultado confirma a relevância em se propor métodos de solução que exploram diretamente as características do problema estudado.

Os resultados aceitáveis, aliados à rápida execução dos procedimentos, levam a crer que existem oportunidades de aplicação prática dos métodos se associados com *softwares* de auxílio a decisão. Além disso, tais soluções podem servir de ponto de partida para métodos de melhoria mais sofisticados como as meta-heurísticas.

## Referências

- Clarke G.; Wright J. (1964). Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations Research*, 12: 568–581.
- Dantzig G.B.; Ramser J.H. (1959), The truck dispatching problem. *Management Science*, 6: 80-91.
- Dell’Amico, M.; Monaci, M.; Pagani, C.; Vigo, D. (2007). Heuristic approaches for the fleet size and mix vehicle routing problem with time windows. *Transportation Science*, 41: 516 – 526.
- Dullaert, W.; Janssens, G.K.; Sörensen, K.; Vernimmen, B. (2002). New heuristics for the fleet size and mix vehicle routing problem with time windows. *Journal of the Operational Research Society*, 53: 1232 – 1238.
- Ghiani, G.; Laporte, G.; Musmanno, R. (2004). *Introduction to logistic systems planning and control*. Ed. Wiley, Inglaterra,.
- Golden, B.L.; Assad, A.; Levy, L.; Gheysens, F. (1984). The fleet size and mix vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 11: 49-66.
- Hoff, A.; Andersson H.; Christiansen, M.; Hasle, G.; Lokketagen, A. (2010). Industrial aspects and literature survey: fleet composition and routing. *Computers and Operations Research*, 37: 2041-2061.
- Laporte, G. (2009). Fifty years of vehicle routing. *Transportation Science*, 43: 408-416.
- Lieb, R.; Bentz, B. (2004), The use of third party logistics services by large American manufacturers, The 2004 Survey. *Transportation Journal*, 44: 5-15.
- Liu, F.H.; Shen, S.Y. (1999). The fleet size and mix vehicle routing problem with time windows. *Journal of Operational Research Society*, 50: 721–732.
- Solomon, M.M. (1987). Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time windows constraints. *Operations Research*, 35: 254-265.