

Problema do caminho mais curto estocástico aplicado ao traçado ótimo de linhas de transmissão

Lucas S. M. Guedes, Adriano C. Lisboa

ENACOM - Handcrafted Technologies

Rua Professor José Vieira de Mendonça 770, 31310-260, Belo Horizonte, MG, Brasil

lucas.guedes@enacom.com.br, adriano.lisboa@enacom.com.br

Grazielle F. Silva

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

graziellefelix@ufmg.br

Douglas A. G. Vieira

ENACOM - Handcrafted Technologies

Rua Professor José Vieira de Mendonça 770, 31310-260, Belo Horizonte, MG, Brasil

douglas.vieira@enacom.com.br

Petr Ya. Ekel

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Rua Dom José Gaspar 500, 30535-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

ekel@pucminas.br

RESUMO

Neste trabalho, o problema de traçado ótimo de linhas de transmissão é formulado como o problema de caminho mais curto. Os custos envolvidos na instalação de uma linha de transmissão são diversos e com incertezas. Essa característica pode ser modelada através de redes estocásticas, onde o custo de cada aresta segue uma distribuição de probabilidade. Este artigo apresenta uma abordagem para o tratamento dos custos normalmente distribuídos que possibilitou a formulação de um problema de otimização linear, multiobjetivo, com o intuito de minimizar o custo final esperado e minimizar os riscos (variância do custo final) do traçado das linhas de transmissão.

PALAVRAS CHAVE. Caminho mais curto estocástico; Linhas de transmissão; Distribuição normal.

Planejamento de linhas de transmissão; Otimização estocástica; Programação linear inteira; Teoria dos grafos; Estatística e Probabilidade

ABSTRACT

In this work, the electrical transmission line routing problem is formulated as the shortest path problem. The transmission line costs are diverse and uncertain. These uncertainties can be modeled in stochastic networks, in which the cost of each region follows a probability distribution. This paper proposes an approach to deal with normally distributed costs in order to formulate the problem as a multi-objective linear optimization problem. The objective is the minimization of the expected cost and risk (variance of the final cost).

KEYWORDS. Stochastic shortest path problem; Transmission line; Normal distribution.

Transmission line planning; Stochastic optimization; Integer linear programming; Graph theory; Statistics and probability

1. Introdução

O problema de traçado ótimo de linhas de transmissão é um problema clássico de sistemas de energia elétrica. Em resumo deve-se traçar o caminho de menor custo entre dois pontos. A seleção da rota das novas linhas de transmissão de energia é uma tarefa complexa que deve satisfazer objetivos muitas vezes conflitantes, decorrente da análise técnica e econômica.

As técnicas para o traçado de linhas de transmissão têm evoluído ao longo dos anos, e hoje Sistemas de Informação Geográfica (GIS, *Geographic Information Systems*), têm auxiliado na identificação de traçados mais adequados.

Monteiro et al. [2005] utilizaram o GIS como base para seleção de rotas mais econômicas através de programação dinâmica. Os custos das novas linhas foram decompostos em custos de acessibilidade, custos de características da área geográfica (como tipo de solo, uso da terra, cobertura vegetal, áreas urbanas, áreas corrosivas perto das margens e áreas de alto impacto ambiental), custos da complexidade terreno (como declive e complexidade orográficas), custos da velocidade do vento, custos devido a altitude e custos devido a obstáculos (como estradas, ferrovias, rios, telecomunicações, e outras linhas de energia).

Já Pytlak e Musilek [2010] propuseram um sistema para avaliar quais áreas são mais adequadas para a construção da linha de transmissão através de medidas estatísticas da capacidade de corrente, temperatura, e valores de resistência para cada ponto de região de interesse. Estas medidas são incorporados na estrutura de grafo, que representa a totalidade dos possíveis pontos de passagem que podem ser usados para formar um percurso de linha de transmissão, com objetivo de calcular uma rota otimizada para satisfazer os critérios desejados, tais como minimizar temperatura da linha e maximizar a capacidade de transmissão.

Bagli et al. [2011] propuseram uma metodologia para minimizar impactos sobre a saúde humana, a paisagem, e ecossistemas, através da análise do caminho de menor custo, baseado na técnica de raster GIS. Para isso foram utilizados critérios como custo, a visibilidade, a densidade populacional, e ecossistema. Nesse trabalho também foi utilizada a análise multi-critério (MCE, *multi-criteria analysis*) para comparar as alternativas, e classificá-las de acordo com sua adequação geral.

Estruturas raster GIS também foi utilizada por Eroglu e Aydin [2013] e Demircan et al. [2011]. Entretanto, nesses trabalhos não foi aplicado o algoritmo clássico de caminho mais curto. Eroglu e Aydin [2013] aplicaram o algoritmo genético e Demircan et al. [2011] aplicaram o algoritmo de inteligência artificial Q-Learning.

Os custos normalmente acarretam incertezas devido a diversos fatores, como variações das propriedades do solo, variações do clima da região, da área urbana, alterações em estradas, entre outros. Por isso, muitas vezes é necessário se tratar o problema como um problema de caminho mais curto com custos estocásticos, onde se conhece a função de densidade de probabilidade do custo em cada aresta [Frieze e Grimmett, 1985].

Vários autores têm discutido o cálculo do caminho mais curto em redes com comprimentos de arcos definidos como variáveis aleatórias. Quando os comprimentos de arco entre os nós são variáveis distribuídas aleatoriamente em uma rede incompleta, a rede resultante é conhecida como uma rede estocástica incompleta. Peer e Sharma [2007] formulam com programação linear o problema com custo de deslocamento exponencialmente distribuídos, onde os nós são modelados como estações capazes de receber e transmitir mensagens, e os arcos são links de comunicação, em um único sentido, que ligam pares de nós. Olya et al. [2013] propuseram um algoritmo de programação dinâmica para encontrar o caminho mais curto em uma rede estocástica com comprimentos de arco representados por distribuições de probabilidade normais. Neste trabalho foi utilizada convolução para encontrar a distribuição da soma de duas variáveis aleatórias em cada etapa. A comparação entre os caminhos é realizada pela probabilidade de que uma variável aleatória normalmente distribuída seja menor que outra variável aleatória normalmente distribuída. Estas abordagens diferem da otimização robusta aplicada a grafos com custos intervalares [Coco et al., 2014].

Neste trabalho, o traçado ótimo de linhas de transmissão é formulado como um problema de caminho mais curto estocástico e multiobjetivo (minimização do custo esperado e do risco). Os custos ambientais e de instalação, obtidos através de mapas relacionados a diversos aspectos (e.g. declividade, área de proteção ambiental, vegetação), são associados a cada aresta e considerados normalmente distribuídos.

2. Formulação do problema

O objetivo é traçar a rota ótima entre dois pontos geográficos considerando que o detalhamento técnico da linha de transmissão (e.g. tipo de torre, número de condutores) é previamente fornecido. Os custos de instalação das linhas em cada região é obtido por mapas relacionados a diversos aspectos (e.g. declividade, área de proteção ambiental).

2.1. Grafo

Um grafo é fundamentalmente um conjunto de pontos (vértices) com conexões entre eles. No modelo computacional para traçado de rotas de linhas de transmissão definido neste trabalho, ele é usado para discretizar o espaço e assim permitir escrever problemas de otimização sobre ele com garantias teóricas de otimalidade.

Matematicamente, as possibilidades de ligação (rotas) entre os dois extremos da linha de transmissão podem ser modeladas com grafos $\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{A})$, onde $\mathbb{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_v}\}$ é o conjunto de vértices e $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_a}\}$ é o conjunto de arestas.

Os extremos da linha de transmissão são representadas por 2 vértices nesse grafo, chamados aqui de v_s (vértice fonte) e v_t (vértice alvo). Cada rota então pode ser definida por uma sequência de vértices iniciando em v_s e terminando em v_t passando pelas arestas do grafo. Diversos custos podem ser associados a cada arestas, cada um representando um características diferentes (e.g. custo sócio-ambiental e custo de instalação). O custo de uma rota é dado pela soma dos custos de cada trecho.

As rotas de linhas de transmissão podem ser definidas por traços contínuos ligando seus dois extremos, não estando na realidade limitadas a um conjunto finito de possibilidades. Neste trabalho, um grafo base na forma de grade é utilizado como aproximação, tal que o traço da rota será tão preciso quanto for o tamanho das arestas que discretizam a região de interesse: quanto menor o tamanho da aresta, mais preciso é o traço, conforme ilustrado na Figura 1.

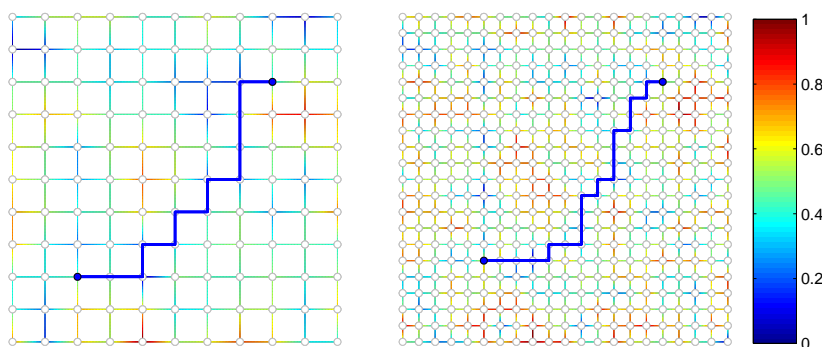


Figura 1: Grafo base para traçado de rotas de linhas de transmissão: quanto menor o tamanho da aresta, mais preciso é o traço.

2.2. Modelagem do custo do traçado

2.2.1. Definição de custos para arestas a partir de mapas temáticos poligonais

A obtenção de cada tipo de custos para formação dos custos finais no traçado de rotas é feita por meio de mapas temáticos poligonais. Cada mapa possui um custo por unidade de comprimento de linha de transmissão que passa por ele. A ideia fundamental é identificar os mapas a que cada vértice pertence e então compor o custo do vértice. Uma vez feito isso, o custo da aresta é

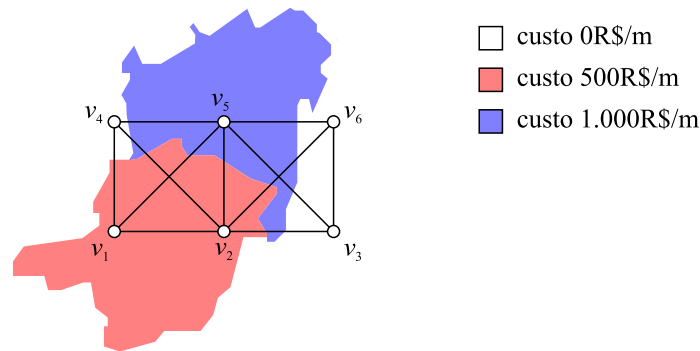


Figura 2: Extração dos custos relacionados a cada aresta a partir de mapas temáticos. A aresta (v_1, v_2) possui os dois vértices contidos na região de custo 500R\$/m de forma que, considerando o comprimento da aresta $\|v_1 - v_2\| = 1\text{m}$, seu custo associado é de R\$500. Já a aresta (v_5, v_6) possui um vértice na região de custo 1.000R\$/m e outro na região de custo 0R\$/m, de forma que seu custo associado é dado pela média $R\$(0 + 1.000)/2 = 500$.

dados pela média dos 2 vértices que a compõem multiplicado pelo comprimento da aresta do grafo base, conforme mostrado na Figura 2.

A identificação do polígono no qual cada vértice pertence pode ser feita com algoritmos padrões de interseção entre segmentos de reta [De Berg et al., 2008], conforme mostrado na Figura 3. Nesse caso, todas as interseções entre as retas horizontais (ou verticais) do grafo e o polígono são encontrados a partir do algoritmo de interseção entre segmentos de reta.

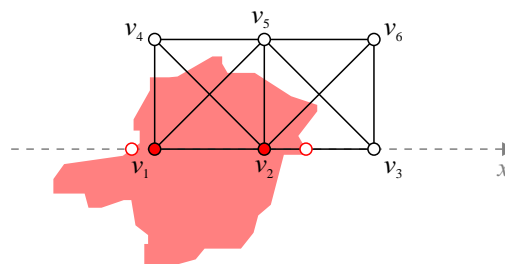


Figura 3: Inserção entre polígono e uma reta horizontal que define a grade: os pontos de intersecção (círculos vermelhos) definem os intervalos de vértices do grafo base (discos vermelhos) que estão dentro do polígono (i.e. v_1 e v_2) e fora (i.e. v_3).

Composição do custo de vértices: Quando um vértice pertence a apenas um mapa temático, seu custo é trivialmente bem definido como o custo daquele mapa. Quando um vértice pertence a mais de um mapa, os custos envolvidos devem ser compostos para formar o respectivo custo final de instalação. Considerando que o custo associado a cada mapa é independente de outros mapas temáticos, podemos simplesmente somar os custos de cada mapa temático. Nesse sentido, o mapa de declividade inclui os custos básicos de instalar uma linha de transmissão considerando os comprimentos adicionais relativos às distâncias verticais percorridas, enquanto que o custo relativo a um mapa de áreas de proteção ambiental, por exemplo, está associado a custos adicionais para uso do terreno e cujo acesso é através de matas fechadas.

2.2.2. Tratamento de regiões sem mapas

Mapas que cobrem toda a região de interesse (e.g. mapa de declividade) podem servir de limites para a área máxima para o grafo base de forma a evitar arestas de custo zero ou passar por áreas não previstas. Contudo, arestas de custo nulo podem aparecer também em composições de

objetivos que não incluam tais mapas. Nesse sentido, a distância pode ser sempre considerada o critério de desempate de forma a evitar arestas de custo nulo. Para tanto, após definir os custos das arestas, o custo pode ser ajustado para

$$c'_i = c_i + \epsilon \ell_i \frac{\min_{i: c_i > 0} c_i}{\max_i \ell_i}, \quad i = 1, \dots, n_e \quad (1)$$

onde ℓ_i é o comprimento da aresta i e $\epsilon > 0$ é um valor bem pequeno (e.g. $\epsilon = 10^{-16}$).

2.2.3. Definição de custos para arestas a partir de mapas temáticos unifilares

Os mapas temáticos unifilares representam estruturas com área desprezível, como rios e rodovias. Nesse sentido, o respectivo custo específico pode ser adicionado a todas arestas que o atravessem. Por exemplo, o custo de atravessar um rio poderia estar relacionado à elevação das torres nas duas margens e à dificuldade de se fazer manutenções. A detecção de cruzamento entre arestas do grafo base e mapas unifilares pode ser feita com algoritmos padrões de interseção entre segmentos de reta [De Berg et al., 2008].

2.2.4. Definição da região de interesse

A região de interesse deve ser definida de forma a englobar todas as soluções ótimas, mas não deve ser muito grande para não aumentar demais a cardinalidade do grafo base e, assim, o tempo computacional. Uma forma eficiente de tratar essa região de interesse é iniciar com uma caixa envolvendo v_s e v_t e estender localmente toda vez que um vértice da fronteira for visitado.

2.3. Objetivo

Dado o custo final associado a cada aresta, o objetivo é determinar o traçado de menor custo para a linha de transmissão. Neste trabalho, assume-se que os custos são variáveis aleatórias que seguem uma distribuição normal com média e variância conhecidas. Desta forma, além de minimizar o custo esperado da instalação da linha, busca-se também minimizar o risco associado à variabilidade desse custo.

2.3.1. Tratamento de incertezas

Os parâmetros de entrada para o problema foram definidos como média e a variância da função de distribuição normal do custo em cada aresta do grafo. Sendo assim, o custo total do traçado é o somatório de variáveis aleatórias normalmente distribuídas.

Se X e Y são variáveis aleatórias independentes distribuídas por uma normal, então, sua soma é também é uma distribuição normal. Isso pode ser observado pela convolução de duas normais, que pode ser estendida para um conjunto de normais, onde a função distribuição normal é definida por

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2)$$

A soma de duas variáveis aleatórias normais leva, por convolução, à função densidade de probabilidade

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-(\mu_1+\mu_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t - \frac{\sigma_2^2(x-\mu_1) + \sigma_1^2\mu_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})^2}{2\left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)^2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-(\mu_1+\mu_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t - \frac{\sigma_2^2(x-\mu_1) + \sigma_1^2\mu_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})^2}{2\left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)^2}} dt \end{aligned} \quad (3)$$

A integral de uma função densidade de probabilidade entre menos infinito a mais infinito é 1 por definição. Portanto a convolução de duas normais $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ é uma normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - (\mu_1 + \mu_2))^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \quad (4)$$

com média $\mu_1 + \mu_2$ e variância $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Assim, se X_1, X_2, \dots, X_p são variáveis aleatórias normalmente distribuídas e independentes com média μ_i e variância σ_i^2 para $i = 1, 2, \dots, p$, então

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_p X_p \quad (5)$$

é uma variável normal [Montgomery e Runger, 2003], com média

$$\mu_y = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + \dots + c_p \mu_p \quad (6)$$

e variância

$$\sigma_y^2 = c_1^2 \sigma_1^2 + c_2^2 \sigma_2^2 + \dots + c_p^2 \sigma_p^2 \quad (7)$$

Desta forma, o custo total de cada caminho é uma variável aleatória normalmente distribuída, cuja a média e a variância é o somatório das médias e das variâncias dos custos das arestas selecionadas.

2.3.2. Caminho ótimo

O caminho de menor custo é aquele no qual a função de densidade de probabilidade do custo gera os menores valores.

Dadas duas variáveis aleatórias normalmente distribuídas X_1 e X_2 , a probabilidade de que a primeira variável aleatória seja menor do que a segunda é

$$P(X_1 < X_2) = P(X_1 - X_2 < 0) = P\left(Z < \frac{0 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) = \phi\left(\frac{(\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) \quad (8)$$

onde ϕ é a função de distribuição acumulada (CDF) da normal padronizada, representada pelo gráfico na Figura 4.

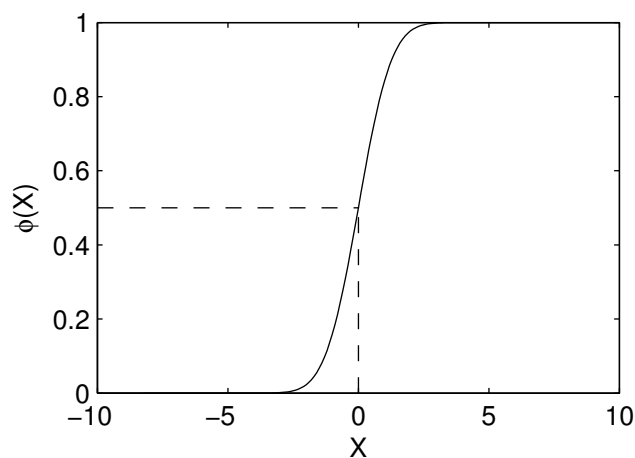


Figura 4: Função de Distribuição de Probabilidade Cumulativa (CDF) da normal padronizada

Analisando graficamente a função $\phi(x)$, é possível observar que se $x \geq 0$, então $\phi(x) \geq 0,5$. Assim, se $\mu_1 < \mu_2$, a probabilidade da variável aleatória X_1 seja menor que a variável aleatória

X_2 é maior que 50%. Desta forma, o objetivo de minimizar o custo esperado (i.e. probabilidade de ser o menor custo) se resume a encontrar o caminho onde a distribuição do custo possui menor média.

Outro fator a ser considerado para o traçado ótimo é o risco do custo. A Figura 5 apresenta duas funções de densidade de probabilidade da distribuição normal, vermelha com média 0,45 e variância 0,2 e azul com média 0,5 e variância 0,02. A vermelha apresenta menor média, ou seja, há uma maior probabilidade de se obter uma variável aleatória de menor custo a partir da distribuição vermelha que a partir da azul. Entretanto, a distribuição vermelha apresenta a variância 10 vezes maior que a variância da distribuição azul, o que faz com que ela apresente também uma maior probabilidade de obter um valor muito mais distante de sua média. A variância de uma variável aleatória é a medida de dispersão em relação ao valor médio.

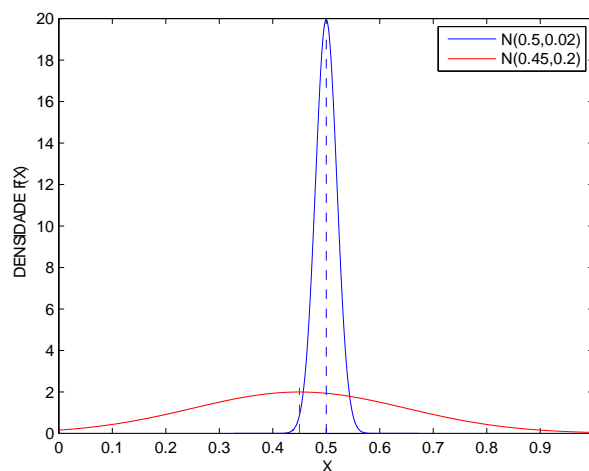


Figura 5: Função densidade de probabilidade da distribuição normal para $N(0.5, 0.02)$ e $N(0.45, 0.2)$

Neste caso, o segundo objetivo a ser considerado é a minimização do risco, onde a variância do custo do caminho será a métrica utilizada. No caso de uma variável normalmente distribuída, a variância do custo final do caminho indica, no pior caso, o qual maior o custo pode se tornar em relação ao valor esperado. Esta imprevisibilidade no custo deve ser minimizada.

Assim, a formulação geral do problema consiste em encontrar o caminho que minimiza a média μ e a variância σ^2 do custo final do sistema. Como a variância do custo final é a soma da variância do custo de cada aresta do caminho e a média do custo final é a soma da média do custo de cada aresta do caminho, esse problema é formado por dois objetivos lineares determinísticos.

2.4. Programação linear inteira

O traçado ótimo pode ser definido por meio de variáveis binárias $x \in \{0, 1\}^n$ que indicam se cada aresta pertence ou não à rota ótima. A restrição do traçado ser um caminho entre o vértice origem v_s e vértice destino v_t pode ser estabelecida assegurando que o número de arcos que entram em um vértice é igual ao número de arcos que saem, exceto no vértice v_s , de onde sai apenas um arco, e do vértice v_t , onde entra apenas um arco. Deve-se também adicionar restrições de eliminação de sub-rotas. Considerando $\mathbb{I}^+(v)$ o conjunto de arcos que entram em v e $\mathbb{I}^-(v)$ o conjunto de arcos que saem de v , o problema pode ser colocado na forma linear com variáveis binárias como

$$\text{minimize } Cx \quad (9)$$

$$\text{subject to } \sum_{i: a_i \in \mathbb{I}^+(v)} x_i - \sum_{i: e_i \in \mathbb{I}^-(v)} x_i = 0, \quad \forall v \in \mathbb{V} \setminus \{v_s, v_t\} \quad (10)$$

$$\sum_{i: a_i \in \mathbb{I}^+(v_t)} x_i - \sum_{i: e_i \in \mathbb{I}^-(v_t)} x_i = 1 \quad (11)$$

$$\sum_{i: a_i \in \mathbb{I}^+(v_s)} x_i - \sum_{i: e_i \in \mathbb{I}^-(v_s)} x_i = -1 \quad (12)$$

$$x \in \{0, 1\}^n \quad (13)$$

onde $C \in \mathbb{R}^{o \times n}$ é a matriz com os coeficientes dos objetivos, a média e variância da distribuição normal do custo de cada aresta. Essa formulação possui garantia de otimalidade global para qualquer vetor de custos e grafo.

3. Metodologia

A formulação desenvolvida neste projeto é multicritério, o que permite determinar soluções de compromisso entre os objetivos especificados, as soluções Pareto. Nestas soluções ao melhorar um objetivo, obrigatoriamente, o outro objetivo é piorado. Contudo, qualquer traçado com todos os valores dos objetivos piores que outro não faz parte do conjunto Pareto ótimo.

Para obter cada solução de compromisso ótimo entre os objetivos, é resolvido um problema mono-objetivo definido pela soma ponderada dos objetivos originais com pesos não negativos. Essa metodologia possui garantias para quaisquer funções objetivo convexas [Caramia e Dell'Olmo, 2008], incluindo as lineares formuladas em (9)-(13). Então, a função objetivo (9) pode ser escalarizada como

$$cx = w^T Cx \quad (14)$$

onde $c = w^T C \in \mathbb{R}^n$ é o novo vetor objetivo para o respectivo vetor de pesos $w \in \mathbb{R}^o$, considerando $C \in \mathbb{R}^{o \times n}$ a matriz com os coeficientes dos objetivos. É suficiente que $w \geq 0$ e $w \neq 0$ para que a estratégia funcione, mas adota-se aqui uma combinação convexa de pesos, i.e. $w \in [0, 1]^o$ e $\sum_{i=1}^o w_i = 1$, de forma a evitar redundâncias de pesos equivalentes.

Tipicamente, a versão mono-objetiva é resolvida de forma geral com o algoritmo *branch and bound* com ordem de complexidade não polinomial. Contudo existem algoritmos especializados para resolver este problema na otimalidade em tempo polinomial, como o algoritmo de Dijkstra [1959], que acha a distância mínima entre um vértice e todos os outros com custos positivos nas arestas em tempo $O(n_e \log n_v + n_v \log n_v)$, o algoritmo de Bellman-Ford [Bellman, 1958; Ford, 1956], que suporta custos negativos nas arestas, o algoritmo de Floyd-Warshall [Floyd, 1962] e Johnson [Johnson, 1977], que calculam a distância entre todos os pares de vértices em tempo $O(n_v^3)$. Neste trabalho, o algoritmo de Dijkstra é aplicado nos problemas mono-objetivo associados a cada vetor de pesos w para mapear o conjunto Pareto ótimo.

O algoritmo de Dijkstra é especializado para o problema de caminhos de custo mínimo com garantia de otimalidade global, uma vez que se trata fundamentalmente de uma busca exaustiva eficiente. A ideia fundamental é partir do vértice alvo v_t e manter uma árvore $t \in \{1, \dots, n_v\}^{n_v}$ de custos mínimos para ir de cada vértice até v_t . Toda vez que a distância d_i de um vértice v_i vizinho do nó ativo da vez v_k for maior que d_k mais o custo da aresta $e_j = (v_k, v_i)$ que os conecta, a árvore t é atualizada com $t_i = k$ e o vértice v_i se torna ativo caso ainda não tenha sido visitado. O vértice v_t é o primeiro vértice ativo e o vértice ativo da vez v_k é o vértice ativo com menor distância associada. Uma vez ativo, o respectivo vértice deixa de ser ativo e não voltará a ser. A árvore t contém os vértices pais de cada vértice, onde os vértices raízes são pais de si mesmos (i.e. $t_i = i$ se v_i é um vértice raiz). No início todos os vértices são raízes e no final apenas v_t possui a garantia de

continuar raiz. Como a árvore t contém o caminho de menor custo de qualquer vértice até v_t , ela contém também o caminho de menor custo entre v_s e v_t .

4. Exemplo numérico

A metodologia proposta foi aplicada ao grafo incompleto da Figura 6, onde o custo de cada arestas segue uma distribuição normal com diferentes médias e variâncias. O objetivo é encontrar o conjunto de caminhos Pareto ótimo entre o nó 1 e o nó 16 em relação ao custo médio e variância.

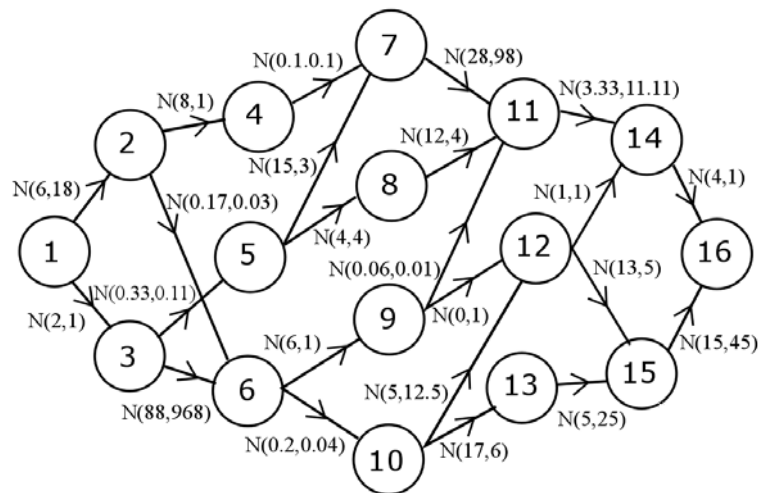


Figura 6: Grafo estocástico direcionado com 16 nós. Os custos dos arcos seguem a distribuição normal com média μ e variância σ^2 , $N(\mu, \sigma^2)$.

A Figura 7 apresenta os caminhos Pareto mapeadas. Considerando apenas a minimização do custo médio, o caminho (vermelho) passa pelos nós 1-2-6-10-12-14-16 com custo final médio 16,37 e com variância 32,56. Caso o objetivo é apenas minimizar a variância, o caminho escolhido é 1-3-5-8-11-14-16 (azul) com custo final médio de 25,67, porém a variância da distribuição do custo final é 21,22. Uma terceira solução, o caminho verde 1-2-6-9-12-14-16, foi mapeada através da alteração dos pesos da soma ponderada dos objetivos. O custo final médio aumenta menos que uma unidade em relação a solução de menor custo médio, para 17,17, porém a variância reduz fortemente para 22,03, próxima da melhor variância.

As funções de densidade de probabilidade do custo final dos caminhos Pareto ótimo mapeados estão na Figura 8. Nesta figura pode-se observar um limitante do uso da variância como medida de risco. Por este critério, o caminho representado pela função de densidade verde $N(25, 67; 21, 23)$ é Pareto ótimo, apesar de seu custo no pior caso ser visivelmente maior que o custo no pior caso do caminho de compromisso representado pela função de densidade azul $N(17, 17; 22, 03)$ e do caminho de melhor custo médio representado pela função de densidade vermelha $N(16, 37; 32, 56)$. Isto significa que o caminho verde possui um risco e custo médio mais elevados que o caminho azul e vermelho. Entretanto, o caminho de compromisso possui risco menor que o caminho de menor custo, sendo os dois Pareto ótimo na prática. Do ponto de vista de modelagem, uma métrica mais sofisticada de risco seria baseada no desvio padrão e na função de distribuição acumulada. Porém, isto implicaria em não linearidades, visto que o desvio padrão é a raiz quadrada da variância e que o desvio padrão do custo final não é a soma dos desvios padrões do custo de cada trecho.

5. Conclusão

No problema de traçado ótimo de linha de transmissão os custos de instalação possuem incertezas. Uma abordagem muito utilizada para tratar incertezas é considerar cenários, que seriam amostras das funções de distribuição de probabilidades envolvidas. Considerar as funções de

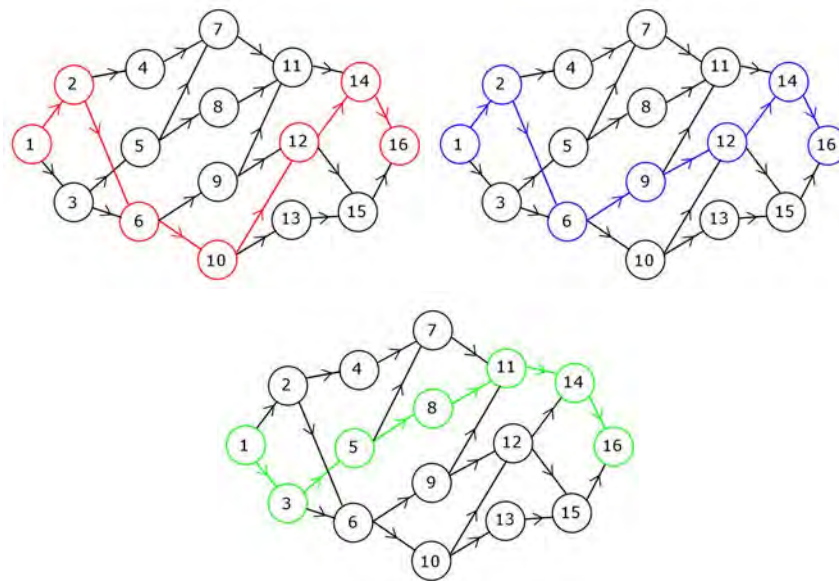


Figura 7: Caminhos Pareto ótimo mapeados. Caminho vermelho é o de menor custo médio, o azul é o caminho de compromisso, e o verde é o caminho de menor variância.

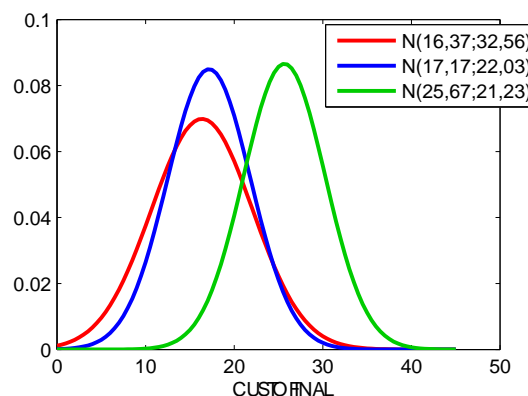


Figura 8: Função de densidade de probabilidade do custo final dos caminhos Pareto ótimo.

distribuição de probabilidades diretamente não só é mais preciso, como também tende a diminuir a complexidade do problema de otimização (e.g. ao invés de trabalhar com variáveis por cenário, trabalha-se com parâmetros das funções de distribuição de probabilidades). Nesse sentido, uma excelente alternativa para o tratamento de incertezas. Contudo, como discuto no exemplo numérico, trabalhos futuros podem desenvolver métricas de risco mais sofisticadas que preservam a linearidade da formulação. A variância pode levar a soluções não desejadas (e.g. uma linha de transmissão com custo de 1 trilhão de reais e variância nula seria ótima, mas não adequada).

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio financeiro da CAPES, CNPq e FAPEMIG.

Referências

Bagli, S., Geneletti, D., e Orsi, F. (2011). Routing of power lines through least-cost path analysis and multicriteria evaluation to minimise environmental impacts. *Environmental Impact Assessment Review*, 31(3):234–239.

Bellman, R. (1958). On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 16:87–90.

- Caramia, M. e Dell’Olmo, P. (2008). *Multi-objective Management in Freight Logistics: Increasing Capacity, Service Level and Safety with Optimization Algorithms*. Springer London.
- Coco, A. A., Júnior, J. C. A., Noronha, T. F., e Santos, A. C. (2014). An integer linear programming formulation and heuristics for the minmax relative regret robust shortest path problem. *Journal of Global Optimization*, 60(2):265–287.
- De Berg, M., Cheong, O., Van Kreveld, M., e Overmars, M. (2008). *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, 3rd rev edition.
- Demircan, S., Aydin, M., e Durduran, S. S. (2011). Finding optimum route of electrical energy transmission line using multi-criteria with Q -learning. *Expert Systems With Applications*, 38(4): 3477–3482.
- Dijkstra, E. W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1):269–271.
- Eroglu, H. e Aydin, M. (2013). Genetic algorithm in electrical transmission lines path finding problems. In *Electrical and Electronics Engineering (ELECO), 2013 8th International Conference on*, p. 112–116.
- Floyd, R. W. (1962). Algorithm 97: Shortest path. *Communications of the ACM*, 5(6):345.
- Ford, L. R. (1956). Network Flow Theory. *Paper-923, The RAND Corporation, Santa Monica, CA*.
- Frieze, A. M. e Grimmett, G. R. (1985). The shortest-path problem for graphs with random arc-lengths. *Discrete Applied Mathematics*, 10(1):57 – 77.
- Johnson, D. B. (1977). Efficient algorithms for shortest paths in sparse networks. *Journal of the ACM*, 24(1):1–13.
- Monteiro, C., Ramírez-rosado, I. J., Miranda, V., Member, S., Zorzano-santamaría, P. J., García-garrido, E., e Fernández-jiménez, L. A. (2005). GIS Spatial Analysis Applied to Electric Line Routing Optimization. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 20(2):934–942.
- Montgomery, D. C. e Runger, G. C. (2003). *Applied statistics and probability for engineers*. John Wiley & Sons.
- Olya, M. H., Shirazi, B., e Fazlollahtabar, H. (2013). Adapted Dynamic Program to Find Shortest Path in a Network having Normal Probability Distribution Arc Length. *Advances in Industrial Engineering and Management*, 2(1):5–10.
- Peer, S. e Sharma, D. K. (2007). Finding the shortest path in stochastic networks. *Computers & Mathematics with Applications*, 53(5):729 – 740.
- Pytlak, P. e Musilek, P. (2010). An intelligent weather-based system to support optimal routing of power transmission lines. In *Electric Power and Energy Conference (EPEC), 2010 IEEE*, p. 1–6.