

DIFERENTES ABORDAGENS PARA UM PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO-ALOCAÇÃO DE ARMAZÉNS ATRAVÉS DE TÉCNICAS DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA-MISTA

Renato Pescarini Valério

Programa de Engenharia de Produção, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós Graduação e Pesquisa em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia, Bloco F, Sala 103, Ilha do Fundão - Rio de Janeiro RJ 21941-972, Brasil
renato_pv@yahoo.com.br

Laura Bahiense

Programa de Engenharia de Produção, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós Graduação e Pesquisa em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia, Bloco F, Sala 103, Ilha do Fundão - Rio de Janeiro RJ 21941-972, Brasil
laura@po.coppe.ufrj.br

Virgílio José Martins Ferreira Filho

Programa de Engenharia de Produção, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós Graduação e Pesquisa em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia, Bloco F, Sala 103, Ilha do Fundão - Rio de Janeiro RJ 21941-972, Brasil
virgilio@pep.ufrj.br

RESUMO

Este artigo propõe o estudo de um problema de Localização-Alocação de Armazéns através de técnicas de Programação Inteira-Mista, integrando decisões estratégicas de localização de facilidades com decisões táticas de gestão de estoques. O problema consiste no projeto de um sistema de produção, estocagem e distribuição multi-produtos no qual os estoques de ciclo e de segurança são consolidados em armazéns. Os dois diferentes modelos estudados são originalmente formulados como modelos de programação inteira mista não-linear, devido a não-linearidade da expressão utilizada para o cálculo do estoque de segurança de cada cliente. Para linearização de ambos os modelos é utilizado um método de Linearização por Partes e dois métodos de realização do cálculo dos parâmetros utilizados nas restrições de linearização são comparados em relação ao erro de linearização. Por fim, uma abordagem de Decomposição Lagrangeana que explora a estrutura do problema em dois elos é utilizada e os resultados são apresentados.

PALAVRAS CHAVE. Problema de Localização-Alocação de Armazéns, Programação Inteira-Mista, Decomposição Lagrangeana.

Tópicos: L&T - Logística e Transportes, PM - Programação Matemática.

ABSTRACT

This paper proposes the study of an Inventory Location-Allocation Problem using Mixed-Integer Programming Techniques, integrating strategic decisions concerning facilities location with tactical decisions concerning inventory management. The problem consists on the design of a multi-product production, stocking and distribution system in which the safety stock inventory and the cycle stock inventory are consolidated in distribution centers. The two different models studied are originally formulated as nonlinear mixed-integer programming models because of the nonlinearity in the expression used for calculating the safety stock level for each client. In order to turn both of them into linear models, a Piecewise Linearization method is used and two methods of calculating the linearization constraints parameters are compared regarding

the linearization error. Finally, a Lagrangean Decomposition approach which explores the problem's two-echelon structure is used and the results found are presented.

KEYWORDS. Inventory Location-Allocation Problem. Mixed-Integer Programming. Lagrangean Decomposition.

Paper topics: L & T - Logistics and Transport. PM - Mathematical Programming.

1. Introdução

Projetar um sistema de produção, estocagem e distribuição pode ser um dos problemas mais críticos dentro da gestão de uma cadeia de suprimentos, englobando inúmeras decisões dentro dos níveis estratégico, tático e operacional. Dentro das decisões estratégicas, a localização de facilidades possui papel de destaque, tendo sido criada até mesmo uma classe de modelos matemáticos específicos para o auxílio à tal decisão: os problemas de localização de facilidades.

Embora, conforme Gebennini, Gamberini, e Manzini [2009], uma completa otimização da rede de suprimentos só possa ser alcançada através da integração das decisões nos níveis estratégico, tático e operacional, a maioria dos estudos existentes na literatura tende a considerar tais decisões separadamente. Em relação aos estudos de localização de facilidades encontrados na literatura, de acordo com Shen, Coullard e Daskin [2003], a grande maioria ignora as decisões táticas relacionadas aos estoques, sendo a recíproca verdadeira.

Integrando as decisões estratégicas de localização de facilidades com as decisões táticas de gestão de estoques, este artigo propõe o estudo do Problema de Localização-Alocação de Armazéns com Consideração dos Efeitos de Consolidação de Estoques. Este problema consiste em um projeto de produção, estocagem e distribuição de um ou mais produtos, que são enviados dos fornecedores até os armazéns, onde ficarão estocados, e de onde serão enviados para os clientes alocados a tais armazéns. Além dos estoques de ciclo, nas modelagens propostas neste trabalho também são considerados estoques de segurança como forma de proteção contra a falta de estoques, sendo ambos consolidados nos armazéns. O objetivo do estudo é a minimização dos custos fixos de localização e abertura das facilidades, dos custos de armazenagem e dos custos de transporte, de forma a criar um projeto de rede de suprimentos otimizado.

2. Revisão Bibliográfica

De acordo com Owen e Daskin [1998], o estudo da teoria de localização iniciou-se, formalmente, com o trabalho de Weber [1929], no qual o autor apresenta uma maneira de se posicionar um único armazém baseando-se no conceito de minimização da distância total entre o armazém e os diversos clientes. A partir da ideia apresentada por Weber [1929], outros estudos envolvendo localização de facilidades foram sendo desenvolvidos com aplicações em diversas áreas.

Mais abrangentes que os modelos de localização de facilidades básicos que consideram apenas as distâncias entre as facilidades instaladas e os pontos de demanda e, em poucos casos, os custos de instalação das facilidades, surgiram os estudos que consideram custos relacionados aos estoques de ciclo. Em Jayaraman [1998] é proposta uma análise do relacionamento existente entre a gestão de estoques, a localização de facilidades e a determinação da política de transportes em um projeto de uma rede de distribuição. Jayaraman e Pirkul [2001] propõem uma extensão do modelo proposto por Jayaraman [1998] incluindo mais um agente no modelo: os fornecedores de matéria-prima para as fábricas. Ambrosino e Scutellà [2005] também propõem um modelo de localização de facilidades levando em consideração os custos relacionados aos estoques de ciclos, formulando modelos para cenários estáticos e dinâmicos.

Integrando ainda mais as decisões de localização de facilidades e as decisões de gestão de estoques, surgiram os estudos de localização de facilidades que consideram os efeitos de centralização de estoques de segurança em suas modelagens. A grande diferença da modelagem desses problemas é que, devido à consideração dos efeitos de centralização de estoques de segurança, os modelos criados passam a ser não lineares. Daskin, Coullard e Shen [2002] trabalham com um problema de localização de armazéns que incorpora os custos de estoque de ciclo e de estoque de segurança ao centro de distribuição, além dos custos de transporte desde os fornecedores até os armazéns. Shen, Coullard e Daskin [2003] apresentam uma reestruturação do modelo proposto por Daskin, Coullard e Shen [2002] como um modelo de programação inteira de cobertura de conjuntos e resolvendo-o através do método de geração de colunas. Miranda e Garrido [2004] propõem uma abordagem de incorporação de decisões de controle de estoques,

como as decisões de lote econômico de compra e de estoque de segurança, em modelos típicos de localização de facilidades, a qual é utilizada para solução de um problema de projeto de uma rede de distribuição através de um modelo de programação não linear inteira-mista. O trabalho proposto por Vidyarthi et al. [2007] consiste na modelagem de um sistema de produção, estocagem e distribuição em dois elos que considera os efeitos de consolidação dos estoques de segurança dos clientes nos armazéns. You e Grossman [2008] lidam com um problema que considera simultaneamente a otimização de estoques e o projeto de uma rede de suprimentos dentro de um ambiente com demanda estocástica. O modelo é formulado com base naquele proposto por Shen, Coullard e Daskin [2003] como um problema de programação não linear inteira e é reformulado como um problema de programação não linear inteira mista. You e Grossman [2010] modelam um sistema sob demanda incerta desenvolvendo um modelo de otimização que determina de forma simultânea a estrutura de transporte, a estocagem e a distribuição de uma rede de suprimentos com vários elos. No trabalho de Gebennini, Gamberini, e Manzini [2009] é proposto um modelo de programação não linear inteira mista para o problema dinâmico de localização e alocação com controle do nível de serviço oferecido ao cliente e com otimização do estoque de segurança. Através do desenvolvimento de um modelo de localização de instalações e alocação de estoques formulado através do uso da programação matemática não linear, Montebeller Junior [2009] formulam um modelo que trata simultaneamente os estoques de ciclo e de segurança através da incorporação dos efeitos de consolidação de estoques.

Silva [2012] formula um modelo de localização de instalações e alocação de estoques, o qual é utilizado para analisar diversos cenários com objetivo de se definir as políticas de estocagem mais adequadas a cada cenário. Ferreira e Tarsitano [2015] utilizam o modelo proposto por Silva [2012] a fim de estudar melhorias na indústria de petróleo e gás, especificamente no que diz respeito ao apoio offshore, propondo três abordagens diferentes de linearização do modelo. Ferreira Filho e Gendron [2012] apresentam duas formulações diferentes para um problema de localização-alocação de armazéns englobando um único produto através da utilização de programação inteira mista. Por fim, Bittencourt [2014] e Bittencourt [2015] comparam as duas formulações matemáticas propostas por Ferreira Filho e Gendron [2012] para o Problema de Localização de Armazéns considerando apenas um produto a ser distribuído.

3. Descrição do Problema

O problema estudado neste artigo pode ser retratado como um problema de localização e alocação de facilidades de um sistema de produção, estocagem e distribuição multi-produtos dividido em dois elos. O primeiro elo formado pelos fornecedores e armazéns e o segundo, pelos armazéns e clientes. Os armazéns representam o laço de união entre os dois elos e têm como função consolidar os estoques de ciclo e os estoques de segurança dos clientes. A presença da consolidação de estoques na configuração do sistema de estocagem e distribuição tende a diminuir o nível total de estoques do sistema, devido ao compartilhamento de unidades de armazenagem.

O problema abordado é baseado no problema de localização de armazéns estudado por Bittencourt [2014] e Bittencourt [2015], que realizam uma análise comparativa do desempenho de duas diferentes formulações propostas por Ferreira Filho e Gendron [2012].

4. Metodologia

Cada um dos dois modelos de programação matemática apresentados neste artigo é baseado em uma das duas perspectivas através das quais se podem encarar os problemas de localização-alocação de armazéns, conforme Ferreira Filho e Gendron [2012], Bittencourt [2014] e Bittencourt [2015]. A seguir são apresentadas as formulações matemáticas dos modelos utilizados e a maneira como o problema é abordado neste trabalho.

4.1. Nomenclatura

Índices e Conjuntos

$i \in I$	Índice de produtos
$j \in J$	Índice de potenciais fornecedores a serem utilizados
$k \in K$	Índice de potenciais armazéns a serem abertos
$l \in L$	Índice de clientes
$r \in R$	Índice de segmentos na aproximação por linearização por partes

Parâmetros

f_j	Custo fixo operacional anual do fornecedor j
P_j	Capacidade anual de produção do fornecedor j
c_{ijk}	Custo unitário de produção e envio do produto i a partir do fornecedor j até o armazém k
g_k	Custo anual de abertura do armazém k
h_{ik}	Custo anual unitário de manutenção de estoques do produto i no armazém k
V_k	Capacidade total de armazenagem no armazém k
Γ	Horizonte de planejamento: número de dias de operação em um ano
t_{ikl}	Custo unitário de transporte do produto i a partir do armazém k até o cliente l
φ_{kl}	Lead time médio de transporte a partir do armazém k até o cliente l
ξ_{kl}	Cobertura de clientes: 1 se o cliente l puder ser abastecido pelo armazém k ; 0 caso contrário
μ_{il}	Média da demanda diária do produto i por parte do cliente l
σ_{il}^2	Variância da demanda diária do produto i por parte do cliente l
α	Nível de serviço desejado para os clientes
Z_α	Fator de segurança correspondente ao nível de serviço alfa desejado pelos clientes
F_{ik}^r	Coefficiente linear do segmento r na aproximação por linearização por partes da função do estoque

de segurança

C_{ik}^r	Coefficiente angular do segmento r na aproximação por linearização por partes da função do estoque de segurança
L_{ik}^r	Limitante superior da abscissa do segmento r na aproximação por linearização por partes da função do estoque de segurança

Variáveis

SS_{ik}	Estoque de segurança do produto i consolidado no armazém k
w_j	Escolha de fornecedores: 1 se o fornecedor j for utilizado; 0 caso contrário
x_{ijk}	Número de unidades do produto i produzidas pelo fornecedor j e enviadas ao armazém k (Modelo 1)
x_{ijkl}	Número de unidades do produto i produzidas pelo fornecedor j e enviadas ao armazém k a fim de atender a demanda do cliente l (Modelo 2)
xs_{ijk}	Número de unidades do produto i produzidas pelo fornecedor j e enviadas ao armazém k a fim de suprir seu estoque de segurança (Modelo 2)
z_k	Abertura de armazéns: 1 se o armazém k for aberto; 0 caso contrário
y_{ikl}	Alocação de clientes: 1 se o cliente l recebe o produto i através do armazém k ; 0 caso contrário
u_{ik}^r	Variável auxiliar binária da linearização por partes da função do estoque de segurança: 1 se o segmento r está ativo na aproximação do estoque de segurança produto i no armazém k
v_{ikl}^r	Variável auxiliar contínua da linearização por partes da função do estoque de segurança

4.2. Modelo 1

A primeira perspectiva, sob a qual o modelo denominado neste trabalho de “Modelo 1” é construído, explora a divisão em dois elos do problema. No primeiro elo, formado pelos fornecedores e pelos armazéns, o fluxo (x_{ijk}) de cada produto i entre uma determinada combinação de fornecedor j e armazém k é determinado a fim de se suprir os estoques de ciclo. Esses estoques são representados pelo somatório das médias das demandas deste mesmo produto i por parte de cada cliente l alocado ao armazém k ($\sum_{l \in L} \mu_{il} y_{ikl}$), e os estoques de segurança (SS_{ik}) centralizados no armazém k . No segundo elo, formado pelos armazéns e pelos clientes, é feita a alocação dos clientes aos depósitos para cada um dos produtos i através da variável binária y_{ikl} , sendo os fluxos entre os elos equilibrados através de restrições de conservação de fluxo. A seguir é apresentada a formulação do Modelo 1.

[Modelo 1

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in J} f_j w_j \\ & + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} (c_{ijk} \\ & + h_{ik}) x_{ijk} + \sum_{k \in K} g_k z_k \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & + \Gamma \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} t_{ikl} \mu_{il} y_{ikl} \\ & SS_{ik} = Z_\alpha \sqrt{\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl}} \quad \forall i \in I, \forall k \in K \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in J} x_{ijk} = \Gamma \sum_{l \in L} \mu_{il} y_{ikl} \quad \forall i \in I, \forall k \in K \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & + SS_{ik} \\ & \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijk} \leq P_j w_j \quad \forall j \in J \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} & \Gamma \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} y_{ikl} + \sum_{i \in I} SS_{ik} \leq V_k z_k \quad \forall k \in K \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\sum_{k \in K} y_{ikl} = 1 \quad \forall i \in I, \forall l \in L \quad (4.6)$$

$$y_{ikl} \leq \xi_{kl} z_k \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.7)$$

$$x_{ijk}, SS_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & w_j, z_k, y_{ikl} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \forall l \in L \end{aligned} \quad (4.9)$$

A função objetivo (4.1), a ser minimizada, representa a soma dos seguintes custos: custos fixos operacionais anuais dos fornecedores a serem utilizados, custos de produção e envio dos produtos desde os fornecedores até os armazéns, custos de manutenção de estoques de ciclo e de segurança nos armazéns, custos anuais de abertura dos armazéns e custos de transporte dos produtos desde os armazéns até os clientes. A restrição (4.2) apresenta o cálculo do estoque de segurança de cada um dos produtos considerados para cada armazém aberto, o qual é realizado considerando-se a distribuição da demanda ao longo do *lead time*, conforme Daskin, Coullard e Shen [2002]. A restrição (4.3) determina a conservação de fluxo de cada um dos produtos considerados em cada armazém aberto, assegurando que a quantidade de um determinado produto, recebida por um armazém proveniente dos fornecedores, seja igual à quantidade necessária para atender à demanda dos clientes alocados àquele armazém, somada à quantidade referente ao estoque de segurança dos mesmos. As restrições (4.4) e (4.5) limitam a capacidade de fornecedores e armazéns, respectivamente, além de determinar os fornecedores utilizados pelo sistema e os armazéns a serem abertos. A restrição (4.6) determina a alocação de clientes aos armazéns para cada um dos produtos considerados, impedindo o cross-filling para cada possibilidade de cliente-produto, ou seja, determinando que para cada produto, um determinado

cliente deve ser abastecido integralmente por um mesmo armazém. A restrição (4.7) limita a cobertura de clientes, impedindo a alocação de clientes a armazéns que, por algum motivo, não possam atendê-los. Por fim, o conjunto de restrições (4.8) e (4.9) satisfazem aos requisitos de integralidade e não-negatividade das variáveis.

4.3. Modelo 1 linearizado por partes

Devido à natureza da fórmula utilizada para o cálculo do estoque de segurança na restrição (4.2), o modelo apresentado é um modelo não linear. Por isso, a fim de torná-lo um modelo linear foi utilizado um procedimento de linearização por partes utilizada por Croxton, Gendron e Magnanti [2003], Croxton, Gendron e Magnanti [2007], Vidyarthi et al. [2007] e Frangioni e Gendron [2009], além de ter sido utilizado também nos modelos estudados por Ferreira Filho e Gendron [2012], Bittencourt [2014] e Bittencourt [2015].

Aplicando-se o método para linearização da restrição (4.2), a raiz da função do lado direito da equação $SS_{ik} = Z_\alpha \sqrt{\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl}}$ deve ser substituída por $\sum_{r \in R} (F_{ik}^r u_{ik}^r + C_{ik}^r \sum_{l \in L} v_{ikl}^r)$, fazendo com que a nova restrição fique representada pela equação (4.2a). Além disso, para que a aproximação ocorra corretamente, é necessária a inclusão das restrições (4.10), (4.11) e (4.12). Mais detalhes sobre o método de linearização utilizado podem ser encontrados em Valério [2016].

$$SS_{ik} = Z_\alpha \sum_{r \in R} \left(F_{ik}^r u_{ik}^r + C_{ik}^r \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \right) \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.2a)$$

$$\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl} = \sum_{l \in L} \sum_{r \in R} v_{ikl}^r \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.10)$$

$$F_{ik}^{r-1} u_{ik}^r \leq \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \leq F_{ik}^r u_{ik}^r \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (4.11)$$

$$\sum_{r \in R} u_{ik}^r \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall k \in K \quad (4.12)$$

4.4. Modelo 2 linearizado por partes

Já a segunda perspectiva, sob a qual o modelo denominado neste trabalho de “Modelo 2” é construído, separa o fluxo de produtos que partem do fornecedor em duas parcelas de acordo com o seu objetivo. Considera-se, portanto, uma parcela do fluxo que tem como objetivo atender ao estoque de ciclo de cada cliente l referente a cada produto i (x_{ijkl}), o qual é visto como um fluxo total ao longo da cadeia, partindo de determinado fornecedor j e sendo estocado em um determinado armazém k , e outra parcela referente ao estoque de segurança dos clientes alocados a cada armazém k (x_{sjk}).

A grande diferença entre as duas modelagens apresentadas é a escolha das variáveis para representar o fluxo de produtos no sistema. No Modelo 1 existe somente uma variável (x_{ijk}) para determinar o fluxo de cada produto i entre uma determinada combinação de fornecedor j e armazém k . Já no Modelo 2, separa-se o fluxo de produtos que partem do fornecedor em duas parcelas de acordo com o objetivo do mesmo. Considera-se, portanto, uma parcela do fluxo que tem como objetivo atender ao estoque de ciclo de cada cliente l referente a cada produto i (x_{ijkl}), o qual é enxergado como um fluxo total ao longo da cadeia, e outra parcela referente ao estoque de segurança dos clientes alocados a cada armazém k (x_{sjk}). A função objetivo e as restrições utilizadas nesta modelagem são análogas às da modelagem anterior. O Modelo 2 Linearizado por Partes completo, o qual foi linearizado utilizando a mesma técnica de linearização por partes explicada na seção anterior, pode ser visto a seguir.

[Modelo 2 – Linearização por Partes]

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in J} f_j w_j \\ & + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} (c_{ijk} \\ & + t_{ikl}) x_{ijkl} + \sum_{k \in K} g_k z_k \\ \text{Minimizar} & + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} x_{sijk} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} h_{ik} \left(\sum_{j \in J} \sum_{l \in L} x_{ijkl} \right. \\ & \left. + \sum_{j \in J} x_{sijk} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & SS_{ik} \\ & = Z_\alpha \sum_{r \in R} \left(F_{ik}^r u_{ik}^r \right. \quad \forall i \\ & \quad \left. + C_{ik}^r \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \right) \quad \begin{matrix} \in I, \forall k \\ \in K \end{matrix} \end{aligned} \quad (4.2a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl} \quad \forall i \\ & = \sum_{l \in L} \sum_{r \in R} v_{ikl}^r \quad \begin{matrix} \in I, \forall k \\ \in K \end{matrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & F_{ik}^{r-1} u_{ik}^r \leq \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \quad \forall i \\ & \leq F_{ik}^r u_{ik}^r \quad \begin{matrix} \in I, \forall k \\ \in K, \forall r \\ \in R \end{matrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{r \in R} u_{ik}^r \leq 1 \quad \forall i \\ & \quad \in I, \forall k \quad \in K \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in J} x_{ijkl} = \Gamma \mu_{il} y_{ikl} \quad \forall i \\ & \quad \in I, \forall k \quad \in K, \forall l \\ & \quad \in L \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} x_{ijkl} \\ & + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{sijk} \quad \forall j \in J \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} x_{ijkl} \\ & + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{sijk} \quad \forall k \in K \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} & \leq V_k z_k \\ & \sum_{j \in J} x_{sijk} = SS_{ik} \quad \forall i \\ & \quad \in I, \forall k \quad \in K \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} & \Gamma \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} y_{ikl} \\ & + \sum_{i \in I} SS_{ik} \leq V_k z_k \quad \forall k \in K \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in K} y_{ikl} = 1 \quad \forall i \\ & \quad \in I, \forall l \quad \in L \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & y_{ikl} \leq \xi_{kl} z_k \quad \forall i \\ & \quad \in I, \forall k \quad \in K, \forall l \\ & \quad \in L \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & v_{ikl}^r \leq \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 u_{ik}^r \quad \forall i \\ & \quad \in I, \forall k \quad \in K, \forall l \\ & \quad \in L, \forall r \quad \in R \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} & x_{ijkl}, x_{sijk}, SS_{ik}, v_{ikl}^r \\ & \geq 0 \quad \begin{matrix} \forall i \\ \in I, \forall j \\ \in J, \forall k \\ \in K, \forall l \\ \in L, \forall r \\ \in R \end{matrix} \end{aligned} \quad (4.8d)$$

$$\begin{aligned} & w_j, z_k, y_{ikl}, u_{ik}^r \\ & \in \{0,1\} \quad \begin{matrix} \forall i \\ \in I, \forall j \\ \in J, \forall k \\ \in K, \forall l \\ \in L, \forall r \\ \in R \end{matrix} \end{aligned} \quad (4.9a)$$

4.5. Segmentação na Linearização por Partes

O primeiro passo do procedimento de linearização por partes de uma função é a segmentação do eixo das abscissas de tal função, ou seja, a determinação dos valores de L^r para

todo $r = 1, 2, \dots, |R|$. Neste trabalho foram utilizadas as duas formas de segmentação também utilizadas em Bittencourt [2014] e Bittencourt [2015].

A primeira forma de segmentação utilizada é chamada de Segmentação das Abscissas Uniformes (SAU), visto que o eixo das abscissas é dividido em intervalos igualmente espaçados. Esta é uma configuração bastante intuitiva e amplamente utilizada na literatura, tendo sido encontrada em Croxton, Grendron e Magnanti [2007] e em Frangioni e Gendron [2009]. Dessa forma, para o cálculo dos limitantes superiores L^r para todo $r = 1, 2, \dots, |R|$ deve-se considerá-los diretamente proporcionais ao índice do segmento r correspondente, conforme demonstrado pela fórmula (4.18). Já a segunda forma de segmentação utilizada é a chamada Segmentação das Ordenadas Uniformes (SOU), pois, neste caso, o eixo das ordenadas é dividido em intervalos igualmente espaçados. Para o cálculo dos limitantes superiores L^r para todo $r = 1, 2, \dots, |R|$ de acordo com a SOU, os mesmos são considerados proporcionais ao quadrado do índice do segmento r correspondente, conforme demonstrado pela fórmula (4.19).

$$L^r = \frac{r}{|R|} \text{Max}(x) \quad \forall r \in R \quad (4.18)$$

$$L^r = \frac{r^2}{|R|^2} \text{Max}(x) \quad \forall r \in R \quad (4.19)$$

Além do tipo de segmentação, há diferentes maneiras de realizar o cálculo dos parâmetros de linearização. Em um determinado problema com $|I|$ produtos e $|K|$ armazéns, haverá $|I| \times |K|$ funções de estoque de segurança a serem linearizadas. Portanto, para cada uma dessas funções deve-se realizar o cálculo dos parâmetros de linearização, a começar pela definição do limite máximo do eixo das abscissas, limite esse que é utilizado no cálculo dos limitantes superiores L_{ik}^r de acordo com as fórmulas (4.18) ou (4.19), até chegar ao cálculo dos coeficientes lineares e angulares das retas geradoras da função linear por partes utilizada para linearização.

Nos trabalhos de Ferreira Filho e Gendron [2012], de Bittencourt [2014] e de Bittencourt [2015], todas as funções a serem linearizadas possuem os mesmos valores para os parâmetros de linearização correspondentes, o qual é definido através da alocação de cada cliente ao armazém com maior *lead time* de entrega em relação àquele cliente, utilizando tal definição para o cálculo dos limitantes superiores de todo armazém k . Devido a tal simplificação que foi feita para o cálculo dos parâmetros de linearização, referir-se-á à linearização do trabalho dos autores citados, como Linearização por Partes Simplificada. As fórmulas utilizadas para o cálculo dos limitantes superiores para a SAU e para a SOU de uma Linearização por Partes Simplificada da restrição (4.2) são apresentadas pelas expressões (4.20) e (4.21), respectivamente.

$$L_{ik}^r = \frac{r}{|R|} \sum_{l \in L} \left[(\max_k \varphi_{kl}) \sigma_{il}^2 \right] \quad \begin{matrix} \forall i \in I, \forall k \\ \in K, \forall r \in R \end{matrix} \quad (4.20)$$

$$L_{ik}^r = \frac{r^2}{|R|^2} \sum_{l \in L} \left[(\max_k \varphi_{kl}) \sigma_{il}^2 \right] \quad \begin{matrix} \forall i \in I, \forall k \\ \in K, \forall r \in R \end{matrix} \quad (4.21)$$

Neste trabalho é utilizada uma forma diferente de se realizar o cálculo desses parâmetros com o intuito de se diminuir o erro de linearização. Essa redução se daria caso o cálculo fosse feito alocando-se todos os clientes l a cada um dos armazéns k e calculando-se o valor máximo do eixo das abscissas para cada combinação de produtos e armazéns utilizando-se a expressão $\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2$. Com isso, ter-se-ia um encurtamento no prolongamento do eixo das abscissas e uma linearização potencialmente mais precisa. Referir-se-á à linearização utilizada neste trabalho como Linearização por Partes Completa. As fórmulas utilizadas para o cálculo dos limitantes superiores para a SAU e para a SOU de uma Linearização por Partes Completa da restrição (4.2) são apresentadas pelas expressões (4.22) e (4.23), respectivamente.

$$L_{ik}^r = \frac{r}{|R|} \sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (4.22)$$

$$L_{ik}^r = \frac{r^2}{|R|^2} \sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (4.23)$$

4.6. Decomposição Lagrangeana

Foi apresentada por Ferreira Filho e Gendron [2012] uma abordagem que faz uso da técnica de decomposição lagrangeana aliada a técnicas de geração de linhas e colunas para solucionar um dos modelos por eles formulados. Esse modelo é análogo ao Modelo 1 apresentado neste trabalho e formulado sob a perspectiva que explora a divisão do problema em dois elos, os quais são ligados através de restrições de conservação de fluxo, que acabam dificultando muito a solução convencional do problema. Esse é um dos exemplos típicos de um contexto onde a abordagem por decomposição lagrangeana costuma proporcionar uma resolução mais eficiente. Nesta abordagem, as restrições de conservação de fluxo são relaxadas, e o problema original é decomposto em dois subproblemas lagrangeanos: um envolvendo o elo fornecedores-armazéns e o outro envolvendo o elo armazéns-clientes.

O modelo apresentado no trabalho de Ferreira Filho e Gendron [2012] possui restrições adicionais, se comparado com o modelo análogo introduzido neste trabalho. Isso se deve ao fato de eles utilizarem a geração de linhas e colunas em sua modelagem. Neste trabalho, a técnica de decomposição lagrangeana foi aplicada diretamente ao Modelo 1, no intuito de se produzir subproblemas lagrangeanos mais fáceis de serem resolvidos. Por se tratar de uma formulação mais simples, a decomposição lagrangeana gerada nesse trabalho foi resolvida através de um algoritmo do tipo Subgradiente, um algoritmo básico bastante difundido e cuja fundamentação teórica pode ser encontrada em Fisher [2012] e em Wolsey [1998].

Para a aplicação da decomposição lagrangeana ao Modelo 1 linearizado por partes, deve-se relaxar as restrições (4.3), que representam a conservação de fluxo entre os dois elos do problema. Isso é feito através da associação de multiplicadores de lagrange λ_{ik} às restrições (4.3), dividindo-se o modelo em dois subproblemas lagrangeanos, que são apresentados a seguir como Subproblema 1 e Subproblema 2.

[Subproblema 1]

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{j \in J} f_j w_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} (c_{ijk} + h_{ik} - \lambda_{ik}) x_{ijk} \quad (4.24)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijk} \leq P_j w_j \quad \forall j \in J \quad (4.4)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} \geq \Gamma \sum_{l \in L} \mu_{il} \quad \forall i \in I \quad (4.25)$$

$$+ \sum_{k \in K} SS_{ik} \quad (4.26)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} \leq V_k z_k \quad \forall k \in K$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K \quad (4.8e)$$

$$w_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J \quad (4.9b)$$

O Subproblema 1 representa o primeiro elo do problema original (fornecedores-armazéns), determinando a utilização de fornecedores (w_j) e o fluxo de produtos a partir dos fornecedores até os armazéns (x_{ijk}). Já o Subproblema 2, a seguir, representa o segundo elo do problema original (armazéns-clientes), determinando a localização dos armazéns (z_k), a alocação

clientes-armazéns (y_{ikl}) e o estoque de segurança nos armazéns (SS_{ik}), além de contar ainda com as variáveis utilizadas para a linearização por partes (v_{ikl}^r, u_{ik}^r).

[Subproblema 2]

$$\text{Minimizar } \sum_{k \in K} g_k z_k + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \lambda_{ik} SS_{ik} + \Gamma \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} (t_{ikl} + \lambda_{ik}) \mu_{il} y_{ikl} \quad (4.2)$$

$$\text{Sujeito a } = Z_\alpha \sum_{r \in R} \left(F_{ik}^r u_{ik}^r + C_{ik}^r \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \right) \quad (4.2a)$$

$$\sum_{l \in L} \varphi_{kl} \sigma_{il}^2 y_{ikl} = \sum_{l \in L} \sum_{r \in R} v_{ikl}^r \quad (4.1)$$

$$F_{ik}^{r-1} u_{ik}^r \leq \sum_{l \in L} v_{ikl}^r \leq F_{ik}^r u_{ik}^r \quad (4.1)$$

$$\sum_{r \in R} u_{ik}^r \leq 1 \quad (4.1)$$

$$\Gamma \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \mu_{il} y_{ikl} + \sum_{i \in I} SS_{ik} \leq V_k z_k \quad \forall k \in K \quad (4.5)$$

$$\sum_{k \in K} y_{ikl} = 1 \quad \forall i \in I, \forall l \in L \quad (4.6)$$

$$y_{ikl} \leq \xi_{kl} z_k \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (4.7)$$

$$SS_{ik}, v_{ikl}^r \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall l \in L, \forall r \in R \quad (4.8f)$$

$$z_k, u_{ik}^r, y_{ikl} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (4.9c)$$

Pode-se perceber que todas as restrições presentes nos Subproblemas 1 e 2 são restrições presentes também no Modelo 1, exceto as restrições (4.25) e (4.26), ambas pertencentes ao Subproblema 1. O intuito em adicionar tais restrições foi o de fortalecer o modelo. A restrição (4.25) foi adicionada para garantir que houvesse fluxo de produtos entre fornecedores e armazéns, ou seja, para garantir que as variáveis x_{ijk} e w_j não assumissem o valor trivial nulo quando da resolução da decomposição. Já a restrição (4.26) garante que um armazém só receba uma quantidade total de produtos inferior à sua respectiva capacidade, além de garantir também que um armazém só receba produto caso o mesmo esteja aberto. Essas restrições são necessárias, pois se perde essa estrutura de conservação de fluxo ao se dualizar, ou seja, ao se relaxar as restrições (4.3).

Em Valério [2016] é apresentado algoritmo do tipo subgradiente utilizado para a resolução da decomposição lagrangeana explicada anteriormente, baseado em Wolsey [1998].

5. Experimentação e Análise

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com os experimentos computacionais realizados. Todos os experimentos foram realizados em um *notebook* pessoal com 4,00 GB de memória RAM, processador *Intel® Core™ i3* de 2.27 GHz e sistema operacional *Windows 7*. O problema foi modelado através do *software* AIMMS (*Paragon Decision Technology B.V.*) em sua versão 3.13, e o resolvidor utilizado foi o CPLEX 12.6.

Os dados utilizados na realização dos experimentos computacionais foram gerados a partir de um sistema programado em linguagem VBA (*Visual Basic for Applications*) no Microsoft® Excel 2007. O método de construção dessas instâncias foi baseado no método utilizado por Ferreira Filho e Gendron [2012], por Bittencourt [2014] e por Bittencourt [2015], o qual, por sua vez, se baseia na proposta de Vidyarthi et al. [2007]. Detalhes sobre o processo de geração de instâncias pode ser encontrado em Valério [2016].

5.1. Comparações entre modelos, linearizações e segmentações

Esses primeiros experimentos foram realizados com o objetivo principal de comparar a Linearização por Partes Completa e a Linearização por Partes Simplificada em relação ao tempo de processamento e ao erro médio de linearização, além de comparar o modelo (Modelo 1 e Modelo 2) e tipo de Segmentação (SAU e SOU) em relação a esses mesmos quesitos e de verificar a influência do número de segmentos utilizados para as linearizações. Para a realização destes experimentos foram geradas 60 instâncias de tamanho médio, totalizando 480 experimentos realizados com tempo máximo limitado em 1 hora para cada um.

Analisando-se os resultados relativos ao tempo médio de processamento dos modelos, pode-se chegar a algumas conclusões significativas. O Modelo 1 – SAU – Lin. Simplificada foi o que apresentou o menor tempo médio de processamento (13,3s), seguido do Modelo 1 – SAU – Lin. Completa (16,0s), conforme apresentado pela Tabela 1. Nesta mesma tabela, comparando-se os o Modelo 1 com o Modelo 2, percebe-se que o primeiro modelo apresenta sempre menores valores de tempo médio de processamento dentro de uma mesma categoria de segmentação e linearização. Em relação à forma de segmentação, os modelos que utilizaram a SOU apresentaram maiores valores de tempo médio de processamento em relação àqueles que utilizaram a SAU, realizando a comparação para uma mesma categoria de modelo e de linearização. Além disso, dentro de uma mesma categoria de modelo e de segmentação, ou seja, de uma mesma coluna da Tabela 1, os experimentos que utilizaram a Linearização por Partes Simplificada apresentaram menor tempo médio de processamento que aqueles que utilizaram a Linearização por Partes Completa. Por fim, vale ressaltar que análises feitas por número de segmentos permitiram chegar a conclusão de que, conforme esperado, existe uma tendência de aumento do tempo de processamento conforme se aumenta o número de segmentos.

Além das análises relacionadas ao tempo médio de processamento dos experimentos, foram também feitas análises relacionadas ao erro médio de linearização desses mesmos experimentos. O erro médio de linearização consiste em uma diferença percentual entre o valor do Estoque de Segurança Total Real, calculado através do somatório dos termos da restrição (4.2), e o valor do Estoque de Segurança Total Linearizado, calculado através do somatório dos termos da restrição (4.2a).

Linearização	Modelo 1		Modelo 2	
	SAU	SOU	SAU	SOU
Completa	16,0 s	31,8 s	177,8 s	290,2 s
Simplificada	13,3 s	26,2 s	184,0 s	239,9 s

Tabela 1 – Tempo médio de processamento

Linearização	Modelo 1		Modelo 2	
	SAU	SOU	SAU	SOU
Completa	34,3 %	8,3%	34,3 %	8,3%
Simplificada	44,5 %	12,2 %	44,5 %	12,2 %

Tabela 2 – Erro médio de linearização

Analisando-se a Tabela 2, percebe-se que os valores de erro médio de linearização para grupos de experimentos análogos do Modelo 1 e do Modelo 2, ou seja, com mesma forma de segmentação (Abscissas Uniformes ou Ordenadas Uniformes) e mesmo tipo de linearização (Completa ou Simplificada), são idênticos quando arredondados em 1 casa decimal. Quando se analisa esses mesmos valores por números de segmentos, percebe-se que o erro médio de linearização por número de segmentos se mantém idêntico quando arredondado em 1 casa

decimal para esses mesmos grupos de experimentos análogos do Modelo 1 e do Modelo 2, havendo algumas poucas e insignificativas diferenças entre o erro médio do Modelo 1 e o erro médio do Modelo 2. Portanto, apesar de os experimentos realizados através do Modelo 2 apresentarem maior tempo médio de processamento quando comparados com aqueles realizados através do Modelo 1, conforme mostrado anteriormente, os resultados de ambos possuem erro médio de linearização similares. A análise a partir de agora é feita, então, sem se considerar o modelo utilizado (Modelo 1 ou Modelo 2), já que tal consideração não gera mudanças significativas no erro médio de linearização.

Comparando-se os experimentos quanto ao tipo de linearização utilizada, é visível que aqueles com Linearização Completa possuem sempre valores de erro médio de linearização inferiores aos valores correspondentes dos experimentos com Linearização Simplificada, o que era exatamente o intuito de se propor o uso da Linearização Completa. Além disso, é visível também que quanto maior o número de segmentos, menor o erro médio de linearização, seja qual for o tipo de linearização utilizado, o que é algo que já se esperava.

Analisando-se a o gráfico da Figura 1, pode-se perceber que, para cada série de dados que representa uma das duas possíveis linearizações (Completa e Simplificada), os resultados provenientes de experimentos realizados com SOU são sempre menores que aqueles realizados com SAU. Inclusive, ao se percorrer a curva da Linearização Completa nesse gráfico, por exemplo, percebe-se que o valor do erro médio de linearização dos experimentos que utilizaram a SAU com o maior número possível de segmentos (24,6%), ou seja, 20 segmentos é superior ao valor desse mesmo erro referente aos experimentos que utilizaram a SOU com o menor número possível de segmentos (22,2%), ou seja, 5 segmentos. Essa mesma análise é válida também para a curva da Linearização Simplificada. Portanto, a Segmentação das Ordenadas Uniformes é sempre mais efetiva no que diz respeito à obtenção de menores erros médios de linearização.

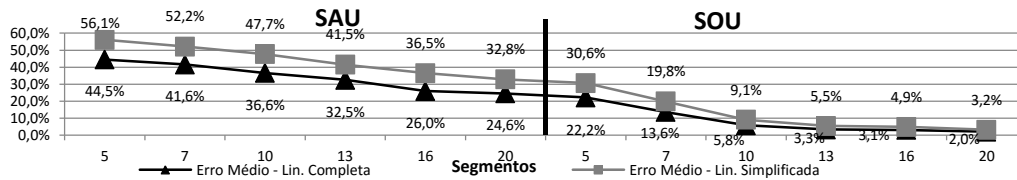


Figura 1 - Erro Médio por Nº de Segmentos (Modelo 1)

Fonte: O Autor

Além disso, ainda observando-se essa mesma figura, é possível perceber que, para os experimentos com SAU há uma grande diferença, com média de 10,2%, entre os valores do erro médio de linearização da Linearização Completa e da Linearização Simplificada para todos os números de segmentos. Já quando se chega aos experimentos com SOU, há uma redução visível no valor dessa mesma diferença, conforme se aumenta o número de segmentos. Para os experimentos que utilizaram tal tipo de segmentação com 5 segmentos, a diferença é de 8,4%, diferença essa que chega a 1,2% quando se altera o número de segmentos para 20. Portanto, diferentemente do que se observa na SAU, a SOU gera uma redução na diferença dos erros médios de linearização entre a Linearização Completa e a Simplificada que diminui com o aumento do número de segmentos.

5.2. Desempenho da Abordagem por Decomposição Lagrangeana

Nesta última seção de experimentos o objetivo principal foi o de se analisar o desempenho da abordagem por Decomposição Lagrangeana aplicada ao Modelo 1 através da dualização das restrições de conservação de fluxo, conforme apresentado na seção 4.6. Para a realização dos experimentos foram geradas 24 instâncias, cada uma possuindo os parâmetros referentes à SAU e à SOU, o que leva a um total de 48 experimentos. Todos os experimentos foram feitos considerando o cálculo dos parâmetros de linearização de acordo com a Linearização

por Partes Completa, já que a mesma produz menores erros de linearização quando comparada com a Simplificada.

O Algoritmo do Subgradiente foi implementado no software AIMMS (*Paragon Decision Technology B.V.*) em sua versão 3.13. O valor utilizado como o parâmetro *primal* na relaxação foi, para cada instância, estabelecido como a melhor solução viável conhecida para a mesma. Foram estabelecidos como critérios de parada: limite máximo de passos igual a 200; limite mínimo do tamanho do passo igual a 0,0001; e limite máximo do somatório dos tempos de solução dos Subproblemas 1 e 2 em todos os passos igual 1 hora.

Iniciando-se a análise pelos resultados dos 17 experimentos cujo *primal* utilizado é uma solução ótima, pôde-se perceber que os *gaps* de otimalidade atingiram valores bem pequenos, sobretudo para as instâncias com 1 produto, as quais são de mais fácil resolução. Em média, o *gap* de otimalidade atingido pelo algoritmo para as 17 instâncias consideradas nesta análise foi de 4,089%, o que é um valor relativamente baixo. Por fim, é importante observar que somente 2 das 17 instâncias consideradas apresentaram valor de *gap* de otimalidade acima de 10%. Em relação ao motivo de parada dos experimentos com as 17 instâncias que tiveram como *primal* uma solução ótima, na grande maioria desses experimentos o motivo de parada foi a chegada ao limite máximo de 200 passos. Todas as 12 instâncias com 1 produto aqui consideradas tiveram esse mesmo motivo de parada, exceto uma, para a qual o valor ótimo foi encontrado. Já os outros 5 experimentos, 3 com instâncias de 3 produtos e 2 com instâncias de 5 produtos, todos pararam por terem atingido o limite mínimo do tamanho do passo.

Já em relação aos 31 experimentos para os quais não se conhecia uma solução ótima a ser utilizada como *primal*, não foi possível aplicar o Algoritmo do Subgradiente em cinco instâncias, visto que quatro delas são instâncias inviáveis para o Modelo 1 e uma delas não encontrou solução viável no limite de 3600 segundos quando da aplicação deste modelo. Portanto, nesta segunda parte da análise tivemos somente 26 experimentos realizados. Entretanto, um deles não conseguiu encontrar uma solução para os subproblemas no primeiro passo e, por esse motivo, considerar-se-á 25 experimentos a serem analisados.

A partir dos resultados desses 25 experimentos não é possível mais o cálculo de um *gap* de otimalidade, já que não estamos com um *primal* ótimo, mas sim com uma aproximação primal. Por isso, temos agora o que convencionou-se chamar de Diferença Percentual Primal x Dual. Nesses 25 experimentos pôde-se perceber que os valores encontrados para tal indicador foram, no geral, bem baixos. O valor médio da Diferença Percentual Primal x Dual foi de 4,478%, tendo sido o mínimo igual a 0,240% e o máximo igual a 10,311%. Vale ressaltar que todos esses valores se referem a experimentos com instâncias maiores, de 3 e 5 produtos, sendo que somente para uma dessas instâncias foi obtido uma Diferença Percentual Primal x Dual superior a 10%. Analisando-se o motivo de parada de cada um desses 25 experimentos, é importante notar que não houve nenhum deles com parada causada pelo limite máximo de 200 passos. Foram obtidos 13 experimentos com o fim do algoritmo tendo sido causado pelo limite mínimo de tamanho do passo e outros 12 experimentos com atingindo o limite máximo de tempo de 1 hora, o que é um resultado bastante equilibrado.

Se analisarmos os experimentos de forma conjunta, alguns pontos importantes comuns a todos eles podem ser verificados, devendo, portanto, ser ressaltados. O primeiro deles é no que diz respeito à diferença percentual entre o primal e o dual. Para cada um desses experimentos foram registrados os valores da diferença percentual entre o primal e o dual no primeiro passo e no último passo do Algoritmo, a fim de se comparar a diferença entre os mesmos, encontrando-se um valor médio de 0,02%, o qual é bastante pequeno. O valor máximo encontrado para tal diferença foi de 2,89%. Portanto, essa comparação demonstra que a utilização do Algoritmo do Subgradiente não foi tão eficiente na resolução da Decomposição Lagrangeana proposta, visto que, mesmo nos casos em que se registrou grande número de passos, o algoritmo caminhou muito lentamente.

Outro ponto interessante é relativo ao tempo de processamento do algoritmo. Analisando-se os resultados obtidos, percebe-se claramente como é grande a percentagem de tempo que o algoritmo teve que se dedicar à solução dos Subproblemas, sobretudo à solução do

Subproblema 2, que em alguns casos chegou a representar mais de 90% do tempo total do algoritmo. Portanto, os resultados demonstram que um dos grandes pontos fracos da Decomposição Lagrangeana utilizada é o formato do Subproblema 2.

Analisando-se os três gráficos das Figuras 2, 3 e 4, percebe-se que existe certo padrão de comportamento para alguns deles. No gráfico da Figura 2, todos os experimentos chegaram ao limite máximo de 200 passos e, com isso, é de se esperar que se tenha uma boa parte do tempo de processamento dedicada às outras instruções do Algoritmo do Subgradiente, o que foi comprovado pelos resultados obtidos, para os quais sempre mais de 50% do tempo de processamento total foi dedicado a outras instruções que não às soluções dos Subproblemas 1 e 2. Já para os experimentos em que o tempo máximo de 1 hora de processamento foi atingido, representados pela Figura 3, observou-se sempre mais de 70% do tempo dedicado à solução dos Subproblemas 2 ao longo dos passos do algoritmo, o que demonstra que foi a busca por uma solução para os Subproblemas 2 o que levou o algoritmo a atingir o limite máximo de tempo. Por fim, para os experimentos que atingiram o limite mínimo de tamanho de passo, contidos na Figura 4, houve um comportamento menos equilibrado, com a percentagem do tempo de processamento dedicada à solução dos Subproblemas 2 variando entre 23% e 83%.

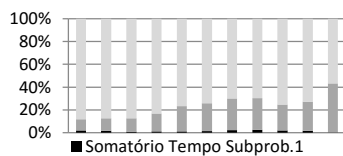


Figura 2 – Limite Máximo de Passos
Fonte: O Autor

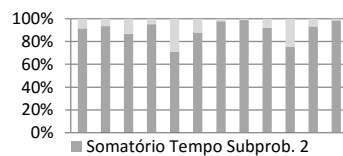


Figura 3 - Limite Máximo de Tempo
Fonte: O Autor

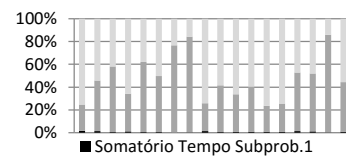


Figura 4 - Tamanho de Passo
Fonte: O Autor

6. Conclusões

O presente trabalho analisou diferentes abordagens de um problema de localização-alocação de armazéns. Foram estudados, inicialmente, dois modelos de programação inteira mista baseados em modelos apresentados nos trabalhos de Ferreira Filho e Gendron [2012], Bittencourt [2014] e Bittencourt [2015]. Com os resultados obtidos pôde-se afirmar fazer importantes comparações quanto aos modelos apresentados (Modelos 1 e 2), quanto às técnicas segmentações (SAU e SOU) e quanto a maneira como se realizou o cálculo dos parâmetros de linearização (Simplificada e Completa). Vale ressaltar aqui que os resultados obtidos com as comparações de tempo médio de processamento demonstraram que os modelos que utilizaram a SAU foram resolvidos em tempo médio menor que aqueles que utilizaram a SOU, assim como aqueles que utilizaram a Linearização Simplificada, que apresentaram menor tempo médio de processamento que aqueles com Linearização Completa. Entretanto, essa constatação não era esperada antes das análises dos resultados, já que todas as técnicas comparadas influenciam nos parâmetros da linearização, e não no aumento da complexidade computacional do modelo, sendo, portanto importante que se investigue esse fato através de mais comparações futuras entre as técnicas utilizadas. Ainda considerando-se as modelagens utilizadas neste trabalho, é evidente a necessidade da busca por técnicas que diminuam o erro médio de linearização, sejam elas novas formas de linearização diferentes daquelas utilizadas, ou ainda, novos métodos de segmentação do eixo das abscissas da função a ser linearizada por partes.

Posteriormente foi aplicada a técnica de Decomposição Lagrangeana ao Modelo 1, dualizando suas restrições de conservação de fluxo, e decompondo-o em dois subproblemas, de forma a explorar a sua divisão em dois elos. Com a aplicação do Algoritmo do Subgradiente para a resolução desta decomposição lagrangeana, foram obtidos resultados satisfatórios no que diz respeito à diferença percentual entre o limitante primal e o limitante dual da relaxação, com valores percentuais médios abaixo de 5%. Entretanto, há dois pontos a se destacar quanto à eficiência do algoritmo. O primeiro é relativo à redução da diferença percentual entre o limitante primal e o limitante dual da relaxação ao longo dos passos deste algoritmo, a qual ocorreu de

forma muito modesta, demonstrando uma fraqueza na utilização deste algoritmo. É importante ressaltar que o algoritmo do tipo subgradiente não é o algoritmo mais eficiente encontrado na literatura para se resolver decomposições lagrangeanas, e foi aplicado aqui motivado por sua simplicidade de implementação. Nesse sentido, estudos mais complexos devem buscar o desenvolvimento de técnicas mais avançadas de resolução, como, por exemplo, o Algoritmo do Volume em sua forma original, conforme proposto por Barahona e Anbil [2000] ou o Algoritmo do Volume em sua forma revisada, conforme proposto por Bahiense [2000]. As duas grandes vantagens da utilização do Algoritmo do Volume residem na utilização de uma medida precisa de melhoria para dar passos “sérios” do tipo Subgradiente, ou seja, passos que garantem a melhoria do algoritmo, e na geração automática de uma aproximação primal de ótima qualidade, baseada em combinações lineares de subgradientes, para o problema original.

O segundo ponto diz respeito ao tempo de resolução dos Subproblemas 2 que demonstrou ser um dos fatores críticos do algoritmo aplicado para resolução do problema. Objetivando-se a redução deste tempo deve-se buscar novas restrições a serem adicionadas a esse subproblema, de forma a fortalecê-lo matematicamente. Entretanto, deve-se tomar cuidado com a inclusão de restrições adicionais, pois elas podem acabar levando ao aumento de tempo de processamento se não forem cuidadosamente escolhidas.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio através dos Processos 308978/2013-7 e 312725/2013-2; à Agência Nacional do Petróleo (ANP) pelo apoio através do Programa de Recursos Humanos PRH-21; e à Petrobrás pela concessão da Bolsa de Mestrado.

Referências

- AMBROSINO, D.; SCUTELLÀ, M. G. Distribution network design: New problems and related models. *European Journal of Operational Research*, v. 165, n. 3, p. 610–624, 2005.
- BAHIENSE, L. O Algoritmo do Volume: Convergência e Resolução do Problema de Steiner em Grafos. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2000.
- BARAHONA, F.; ANBIL, R. The Volume Algorithm: Producing Primal Solutions with a Subgradient Method. *Mathematical Programming*, v. 87, p. 389–399, 2000.
- BISSCHOP, J. AIMMS Optimization Modeling’s Guide. (s.l.) Paragon Decision Technology, 2012.
- BITTENCOURT, G. C. DE. Localização De Armazéns com Efeito de Consolidação De Estoques: Uma Análise Comparativa do Desempenho de Diferentes Formulações. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2014.
- BITTENCOURT, G. C. DE; FERREIRA FILHO, V. J. M.; LEITE, L. S. B. DA S. Inventory Location Problem with Risk Pooling Effect: A Performance Analysis Between Different Formulations. *Transportation Research Procedia*. Anais...Delft, The Netherlands: 18th Euro Working Group on Transportation, 2015
- CROXTON, K. L.; GENDRON, B.; MAGNANTI, T. L. A Comparison of Mixed - Integer Programming Models for Nonconvex Piecewise Linear Cost Minimization Problems. *Management Science*, v. 49, n. 9, p. 1268–1273, 2003.
- CROXTON, K. L.; GENDRON, B.; MAGNANTI, T. L. Variable Disaggregation in Network Flow Problems with Piecewise Linear Costs. *Operations Research*, v. 55, n. 1, p. 146–157, 2007.
- DASKIN, M. S.; COULLARD, C. R.; SHEN, Z.-J. M. An Inventory-Location Model: Formulation, Solution Algorithm and Computational Results. *Annals of Operations Research*, v. 110, p. 83–106, 2002.
- FERREIRA FILHO, V. J. M.; GENDRON, B. A Piecewise Linearization with Column-and-Row Generation Approach for a Two-Echelon Inventory Location Problem with Risk Pooling. *Book of Abstracts - Optimization Days*, 2012.

- FERREIRA, G. P. M.; TARSITANO, R. C. Avaliação de um Modelo Dinâmico de Localização de Armazéns e Alocação de Estoques Aplicado ao Abastecimento Offshore. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015.
- FISHER, M. L. The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems. *Management Science*, v. 27, n. 1, p. 1–18, 1981.
- FRANGIONI, A.; GENDRON, B. 0-1 Reformulations of the Multicommodity Capacitated Network Design Problem. *Discrete Applied Mathematics*, v. 157, n. 6, p. 1229–1241, 2009.
- GEBENNINI, E.; GAMBERINI, R.; MANZINI, R. An integrated production–distribution model for the dynamic location and allocation problem with safety stock optimization. *International Journal of Production Economics*, v. 122, n. 1, p. 286–304, nov. 2009.
- JAYARAMAN, V. Transportation, facility location and inventory issues in distribution network design: An investigation. *International Journal of Operations Research & Production Management*, v. 18, n. 5, p. 471–494, 1998.
- JAYARAMAN, V.; PIRKUL, H. Planning and coordination of production and distribution facilities for multiple commodities. *European Journal of Operational Research*, v. 133, n. 2, p. 394–408, 2001.
- MIRANDA, P. A.; GARRIDO, R. A. Incorporating inventory control decisions into a strategic distribution network design model with stochastic demand. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, v. 40, n. 3, p. 183–207, 2004.
- MONTEBELLER JUNIOR, E. J. Incorporando o Efeito de Consolidação dos Estoques no Planejamento de Redes Logísticas. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.
- OWEN, S. H.; DASKIN, M. S. Strategic facility location: A review. *European Journal of Operational Research*, v. 111, n. 3, p. 423–447, 1998.
- POZO, H. Administração de Recursos Materiais e Patrimoniais: uma abordagem logística. 6^a. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- SHEN, Z. M.; COULLARD, C.; DASKIN, M. S. A Joint Location-Inventory Model. *Transportation Science*, v. 37, n. 1, p. 40–55, 2003.
- SILVA, T. C. M. Gerenciamento Dinâmico da Localização de Armazéns e Alocação de Estoques Aplicado ao Abastecimento de Unidades de Produção Offshore. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.
- VALERIO, R. P. Análises de Diferentes Abordagens para um Problema de Localização-Alocação de Armazéns utilizando técnicas de Programação Inteira-Mista. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2016.
- VIDYARTHI, N. et al. Integrated Production-Inventory-Distribution System Design with Risk Pooling: Model Formulation and Heuristic Solution. *Transportation Science*, v. 41, n. 3, p. 392–408, 2007.
- WEBER, A. *Über den Standort der Industrien (Alfred Weber's Theory of the Location of Industries)*. (s.l.) University of Chicago, 1929.
- WOLSEY, L. A. *Integer Programming*. 1. ed. New York: Wiley-Interscience, 1998.
- YOU, F.; GROSSMANN, I. E. Mixed-Integer Nonlinear Programming Models and Algorithms for Large-Scale Supply Chain Design with Stochastic Inventory Management. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 47, n. 20, p. 7802–7817, 2008.
- YOU, F.; GROSSMANN, I. E. Integrated Multi-Echelon Supply Chain Design with Inventories Under Uncertainty: MINLP Models, Computational Strategies. *American Institute of Chemical Engineers*, v. 56, n. 2, p. 419–440, 2010.