Uma Regularização do Tipo Tikhonov para Problemas de Equilíbrio em Espaços de Banach Reflexivo

Leonardo Araújo de Sousa
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro - RJ
leonardo@cos.ufrj.br

Susana Scheimberg de Makler
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro - RJ
susana@cos.ufrj.br

Paulo Sérgio Marques dos Santos
Universidade Federal do Piauí
Parnaíba - PI
psergio@ufpi.edu.br

RESUMO

Neste trabalho analisamos uma regularizacão do tipo Tikhonov para o Problema de Equilíbrio (EP) em espaços de Banach reflexivos. Consideramos o caso da bifunção ser monótona e o caso de ser pseudomonótona. Estendemos, para espaços de Banach reflexivo, os resultados obtidos em espaços de Hilbert em [Oliveira et al., 2013]. O mais relevante desses resultados corresponde à equivalência da limitação da sequência gerada pelo problema regularizado e a existência de solucão do problema original. Por outro lado, nós provamos que essa sequência converge fracamente a uma solução do problema. Finalmente, apresentamos um exemplo de uma função regularizada que satisfaz as hipóteses em um espaço de Banach reflexivo próprio.

PALAVRAS CHAVE. Regularização do tipo Tikhonov, problema de equilíbrio, resultados de existência, bifunção convexa, espaços de Banach reflexivo

Tópico: Programação Matemática

ABSTRACT

In this work we analyse a Tikhonov-type regularization for the Equilibrium Problem (EP) in reflexive Banach spaces. We consider the case where the bifunction is monotone and the case where it is pseudomonotone. We extend, for reflexive Banach spaces, the results obtained in Hilbert spaces in [Oliveira et al., 2013]. The most relevant of these results is related to the equivalence between the boundedness of the sequence generated by the regularized problem and the existence of solution of the original problem. On the other hand, we proof that the sequence converges weakly to a solution of the problem. Finally, we present an example of a regularized function which satisfies the assumptions in a proper reflexive Banach space.

KEYWORDS. Tikhonov-type regularization, equilibrium problem, existence results, convex bifunction, reflexive Banach spaces.

Paper topic: Mathematical Programming

1. Introducão

Seja X um espaço de Banach reflexivo e X^* seu dual topológico. Se $x^* \in X^*$ e $x \in X$, o produto de dualidade e norma são denotados respectivamente por $\langle x^*, x\rangle$ e $\|\cdot\|$. Seja K um subconjunto fechado e convexo de X e seja $f : K \times K \to \mathbb{R}$ uma bifunção de equilíbrio, isto é, $f(x, x) = 0$, $\forall x \in K$. O problema de equilíbrio (EP), consiste em

$$EP(f,K)\begin{cases} \text{encontrar } \bar{x} \in K, \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) \geq 0, \forall y \in K. \end{cases} \tag{1.1}$$

Denotamos o conjunto solução do problema de equilíbrio $EP(f, K)$ por $S(f, K)$.

O problema de equilíbrio contém, como casos particulares, problemas de otimização convexa, de complementaridade, de desigualdades variacionais, de equilíbrio de Nash, de ponto fixo, etc., veja, e. g., [Alleche et al., 2015], [Bigi et al., 2012], [Blum e Oettli, 1994], [Fan, 1972], [Iusem et al., 2009], [Iusem e Sosa, 2003] e suas referências.

No presente trabalho, um esquema do tipo Tykhonov é proposto para resolver problemas de equilíbrio. O seguinte problema regularizado é considerado:

Encontrar $\bar{x} \in K$ tal que

$$f_\gamma(\bar{x}, y) := f(\bar{x}, y) + \gamma g(\bar{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in K, \tag{1.2}$$

onde $\gamma > 0$, g é uma bifunção de equilíbrio fortemente monótona em K, e satisfaz a condição

$$\limsup_{\|y\|\to+\infty} \frac{|g(x,y)|}{\|y - x\|} < +\infty \quad \forall x \in K. \tag{1.3}$$

Neste trabalho, estendemos os resultados dados em espaços de Hilbert e de dimensão finita de [Hung e Muu, 2011] e [Oliveira et al., 2013] para espaços de Banach reflexivos. Sob hipóteses usuais, mostramos a existência de solução de (1.2), quando f é monótona. Para o caso pseudomonótono, assumimos hipóteses consideradas na literatura para provar a existência de solução e a relação entre a limitação da sequência e o conjunto solução. Além disso, provamos que toda a sequência converge fracamente para a solução do problema de equilíbrio. Um exemplo no espaço de Banach reflexivo que não é Hilbert é fornecido.

Na primeira seção, apresentamos algumas definições, notações e resultados que serão usados no trabalho. Em seguida, definimos a regularização do tipo Tikhonov para problemas de equilíbrio, estabelecemos a existência de solução de (1.2) para o caso monótono, e, mostramos a relação entre a existência de solução e a limitação da sequência gerada. Na última seção, consideramos, sob hipóteses razoáveis, o caso não monótono. Mostramos que, se o conjunto solução for não vazio, toda a sequência converge fracamente para a solução do problema de equilíbrio, além disso, exibimos um exemplo no espaço de Banach reflexivo.

2. Preliminares

Nesta seção apresentamos conceitos e propriedades em espaços de Banach. Também adaptamos algumas propriedades da literatura que vamos usar ao longo deste trabalho.

Definição 1 *Uma bifunção $\psi : K \times K \to \mathbb{R}$ é chamada de:*

(i) Fortemente monótona em K com módulo $\beta > 0$, se,
$\psi(x, y) + \psi(y, x) \leq -\beta \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in K.$

(ii) Monótona em K, se,
$\psi(x, y) + \psi(y, x) \leq 0, \quad \forall x, y \in K.$

(iii) Pseudomonótona em K, se,
$\forall x, y \in K, \quad \psi(x, y) \geq 0 \Rightarrow \psi(y, x) \leq 0.$

Note que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Notação 1 *Denotamos por* $x^k \rightharpoonup x$*, a convergência fraca de* $\{x^k\}$ *para* x*, ou seja, para cada* $x^* \in X^*$*,* $\langle x^*, x^k \rangle \to \langle x^*, x \rangle$*, quando* $k \to +\infty$*.*

Definição 2 *Uma função* $\varphi : K \to \mathbb{R}$ *é fracamente semicontínua superior em* $x \in K$*, se, para toda sequência* $\{x^k\} \subset K$ *tal que* $x^k \rightharpoonup x$ $(k \to +\infty)$*, tivermos*

$$\limsup_{k \to +\infty} \varphi(x^k) \leq \varphi(x).$$

A função é chamada de fracamente semicontínua superior, se ela é fracamente semicontínua superior em cada ponto $x \in K$*.*

Definição 3 *Uma função* $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ *é fracamente semicontínua inferior em* $x \in K$*, se, para toda sequência*$\{x^k\} \subset K$ *tal que* $x^k \rightharpoonup x$ $(k \to +\infty)$*, tivermos*

$$\liminf_{k \to +\infty} \varphi(x^k) \geq \varphi(x).$$

A função é chamada de fracamente semicontínua inferior, se ela é fracamente semicontínua inferior em cada ponto $x \in K$*.*

O seguinte lema, será útil para provar a existência de solução do problema regularizado, quando f é pseudomonótona.

Lema 1 (Lema FKKM, [Fan, 1972]) *Sejam* E *um espaço vetorial real topológico de Haussdorff,* A *um subconjunto não vazio de* E *e* $T : A \rightrightarrows E$ *um operador ponto conjunto que satisfaz:*

(i) $T(a)$ *é fechado,* $\forall a \in A$*;*

(ii) $\exists a \in A$ *tal que,* $T(a)$ *é compacto;*

(iii) Para todo subconjunto finito $\{a_1, \cdots, a_p\} \subset A$*, temos, conv*$\{a_1, \cdots, a_p\} \subset \bigcup_{i=1}^{p} T(a_i)$*.*

Então $\bigcap_{a \in A} T(a) \neq \emptyset$*.*

A seguinte propriedade foi estabelecida em [Iusem, 2011], quando a bifunção é definida em todo o espaço X.

Lema 2 *Sejam* B *e* K *subconjuntos fechados e convexos de* X*. Considere as funções* $f(x, \cdot) : K \to \mathbb{R}$ *convexa, para todo* $x \in K$*, satisfazendo* $f(x, x) = 0$*,* $\forall x \in K$*, e,* $h : K \to \mathbb{R}$ *convexa.*

(i) Se $\bar{x}$ *minimiza* h *em* $K \cap B$ *e* $\bar{x}$ *pertence ao interior de* B*, então* $\bar{x}$ *minimiza* h *em* K*.*

(ii) Se $\bar{x}$ *resolve o problema* $EP(f, K \cap B)$ *e* $\bar{x}$ *pertence ao interior de* B*, então* $\bar{x}$ *resolve o problema* $EP(f, K)$*.*

Demonstração: **(i)** Se $\bar{x}$ minimiza h em $K \cap B$, então $h(\bar{x}) \leq h(z), \forall z \in K \cap B$. Queremos mostrar que $h(\bar{x}) \leq h(y)$, $\forall y \in K$. Suponha, por absurdo que, existe um $y \in K$ tal que $h(y) < h(\bar{x})$. Isso implica $y \neq \bar{x}$.

K é um conjunto convexo e h é uma função convexa, logo $ty + (1-t)\bar{x} \in K$, $\forall t \in (0,1)$ e, já que $\bar{x}$ pertence ao interior de B, existe um $\epsilon > 0$ tal que, $\forall t \in (0, \epsilon / \|y - \bar{x}\|)$, temos $ty + (1-t)\bar{x} \in B$ e

$$h(ty + (1-t)\bar{x}) \leq th(y) + (1-t)h(\bar{x}) < th(\bar{x}) + (1-t)h(\bar{x})$$

Isso contradiz o fato que $\bar{x}$ minimiza h em $K \cap B$. Portanto $h(\bar{x}) \leq h(y)$, $\forall y \in K$.

(ii) Se $\bar{x}$ resolve o problema $EP(f, K \cap B)$, então

$$f(\bar{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in K \cap B.$$

Defina $h : K \to \mathbb{R}$ por $h(y) = f(\bar{x}, y)$ $(y \in K)$. Note que

$$h(y) = f(\bar{x}, y) \geq 0 = f(\bar{x}, \bar{x}) = h(\bar{x}), \quad \forall y \in K \cap B.$$

Isto é, $\bar{x}$ minimiza h em $K \cap B$. Como, por hipótese h é uma função convexa e $\bar{x}$ pertence ao interior de B. Podemos aplicar o item (i) para obter que $\bar{x}$ minimiza h em K. Logo

$$h(y) \geq h(\bar{x}), \quad \forall y \in K,$$

isto é,

$$f(\bar{x}, y) = h(y) \geq h(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{x}) = 0, \quad \forall y \in K.$$

Portanto, podemos concluir que $\bar{x}$ resolve o problema $EP(f, K)$. $\square$

Proposição 1 ([Brézis, 2011], pg. 69) *Suponha que X é um espaço de Banach reflexivo e seja $\{x^k\}$ uma sequência limitada em X. Então existe uma subsequência $\{x^{k_j}\}$ de $\{x^k\}$ que converge na topologia fraca.*

Proposição 2 ([Brézis, 2011], pg. 71) *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Seja $C \subset X$ um subconjunto fechado, limitado e convexo de X. Então C é fracamente compacto.*

Proposição 3 ([Pascalli e Sburlan, 1979], pg. 5) *Seja X um espaço de Banach e $H : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria, convexa e semicontínua inferior. Se $x_0 \in$ int(dom(H)), então $\partial H(x_0) \neq \emptyset$.*

Corolário 1 *Seja X um espaço de Banach reflexivo, $K \subset X$ um conjunto convexo fechado tal que int(K) $\neq \emptyset$ e $h : K \to \mathbb{R}$ uma função convexa, fracamente semicontínua inferior. Então $\partial h(x_0) \neq \emptyset$, para todo $x_0 \in$ int(K).*

Demonstração: Defina $H : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por $H(x) = h(x)$, se $x \in K$ e $H(x) = +\infty$, se $x \in X \backslash K$. Então H é própria, pois dom(H) $= K \supset$ int(K) $\neq \emptyset$. H é convexa e semicontínua inferior, pois h é convexa, fracamente semicontínua inferior e K é convexo fechado. Se $x_0 \in$ int(K), então $x_0 \in$ int(dom(H)). Pela proposição 3 e pela definição de H, $\partial h(x_0) = \partial H(x_0) \neq \emptyset$. $\square$

3. Uma Regularização do Tipo Tikhonov para o Problema de Equilíbrio

Para o problema $EP(f, K)$, consideramos a seguinte bifunção regularizada $f_\gamma : K \times K \to \mathbb{R}$:

$$f_\gamma(x, y) = f(x, y) + \gamma g(x, y), \tag{3.1}$$

onde $\gamma > 0$ e $g : K \times K \to \mathbb{R}$ é uma bifunção de equilíbrio fortemente monótona de módulo $\beta > 0$. Veja que $f_\gamma(x, x) = 0$ $\forall x \in K$.
Algumas das seguintes hipóteses serão consideradas para f ou g. Seja $\psi : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ uma bifunção de equilíbrio.

(B0) int(K) $\neq \emptyset$.
(B1) $\psi(\cdot, y) : K \longrightarrow \mathbb{R}$ é fracamente semicontínua superior para todo $y \in K$.
(B2) $\psi(x, \cdot) : K \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa e fracamente semicontínua inferior para todo $x \in K$.
(B3) ψ é fortemente monótona de módulo $\beta > 0$.
(B4) $\limsup\limits_{\|y\| \to +\infty} \dfrac{|\psi(x, y)|}{\|y - x\|} < +\infty \quad \forall x \in K$.
(B5) Para toda sequência $\{x^n\} \subset K$ com $\lim_{n \to +\infty} \|x^n\| = +\infty$, existem $u \in K$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $\psi(x^n, u) \leq 0$, $\forall n \geq n_0$.

Lema 3 *Sejam f e g bifunções de equilíbrio satisfazendo B1 e B2. Então $\forall \gamma > 0$, a bifunção f_γ satisfaz B1 e B2.*

Demonstração: Dado $\gamma > 0$ e $x, y \in K$.

i) É consequência imediata da propriedade de limite superior da soma de funções.

ii) Resulta das propriedades de soma de funções convexas e limite inferior da soma de funções. □

Teorema 1 ([Iusem et al., 2009], Teorema 4.3) *Seja $\psi : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ uma bifunção de equilíbrio. Suponha que ψ é pseudomonótona, satisfazendo B1, B2 e B5, então $S(\psi, K) \neq \emptyset$.*

Lema 4 *Suponha que f é uma bifunção de equilíbrio monótona e g é uma bifunção de equilíbrio fortemente monótona de módulos $\beta > 0$. Então f_γ é fortemente monótona de módulo $\gamma\beta > 0$.*

Demonstração: Sejam $x, y \in K$ e $\gamma > 0$.

$$\begin{aligned} f_\gamma(x,y) + f_\gamma(y,x) &= f(x,y) + \gamma g(x,y) + f(y,x) + \gamma g(y,x) = \\ &= f(x,y) + f(y,x) + \gamma\big(g(x,y) + g(y,x)\big) = \\ &\leq 0 - \gamma\beta \left\| x - y \right\|^2. \end{aligned}$$

Assim, f_γ é fortemente monótona de módulo $\gamma\beta$, em particular, monótona. □

Lema 5 *Supondo B0 e assumindo que f é monótona satisfazendo B1-B2 e g satisfazendo B1, B2 e B3. Então f_γ satisfaz B5.*

Demonstração: Seja $\{x^n\} \subset K$ uma sequência tal que $\|x^n\| \to +\infty$. Queremos mostrar que $\exists u \in K$ and $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_\gamma(x^n, u) \leq 0$, $\forall n \geq n_0$. Por hipótese, int$(K) \neq \emptyset$. Seja $u \in$ int(K). Pelo lema 4, temos que f_γ é fortemente monótona de módulo $\gamma\beta$, isto é,

$$f_\gamma(x^n, u) + f_\gamma(u, x^n) \leq -\gamma\beta \left\| x^n - u \right\|^2.$$

Logo

$$f_\gamma(x^n, u) \leq -f_\gamma(u, x^n) - \gamma\beta \left\| x^n - u \right\|^2.$$

A partir de agora, defina $h : K \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(y) = f_\gamma(u, y)$. Então

$$f_\gamma(x^n, u) \leq -h(x^n) - \gamma\beta \left\| x^n - u \right\|^2. \tag{3.2}$$

Como $u \in$ int(K) e por B2, pelo corolário 1, obtemos que $\partial h(u) \neq \emptyset$. Portanto, existe $z^* \in \partial h(u)$. Assim, $\langle z^*, x^n - u\rangle \leq h(x^n) - h(u)$.

$$-h(x^n) \leq \langle z^*, u - x^n\rangle - h(u) \leq \|z^*\| \, \|u - x^n\| - h(u) \tag{3.3}$$

Usando o fato que $h(u) = f_\gamma(u, u) = 0$, as desigualdades (3.2) e (3.3), temos

$$\begin{aligned} f_\gamma(x^n, u) &\leq -h(x^n) - \gamma\beta \left\| x^n - u \right\|^2 \\ &\leq \|z^*\| \, \|u - x^n\| - \gamma\beta \left\| x^n - u \right\|^2 \\ &= \|x^n - u\| \left(\|z^*\| - \gamma\beta \left\| x^n - u \right\| \right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Passando ao limite quando $\|x^n\| \to +\infty$, concluímos que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_\gamma(x^n, u) = -\infty$.

Portanto, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $f_\gamma(x^n, u) \leq 0$, para todo n suficientemente grande. Assim, podemos concluir que a hipótese B5 é satisfeita. □

Teorema 2 *Supondo B0, assumindo que f satisfaz B1, B2 e monotonicidade, e g satisfaz B1, B2 e B3. Então, para qualquer $\gamma > 0$, $EP(f_\gamma, K)$ possui solução única, denotada por $x(\gamma)$.*

Demonstração: Pelo lema 3, f_γ satisfaz B1 e B2, o lema 4 garante que f_γ é monótona e pelo lema 5, temos que f_γ satisfaz B5. Aplicando o teorema 1 para f_γ, concluímos que $S(f_\gamma, K) \neq \emptyset$.

Para mostrar que a solução é única, suponha que $\tilde{x}$ e $\hat{x}$ são soluções de $EP(f_\gamma, K)$. Segue que:

$$0 \leq f_\gamma(\tilde{x}, \hat{x}) + \gamma g(\tilde{x}, \hat{x}) \tag{3.5}$$

$$0 \leq f_\gamma(\hat{x}, \tilde{x}) + \gamma g(\hat{x}, \tilde{x}) \tag{3.6}$$

Somando (3.5) e (3.6), obtemos

$$0 \leq f_\gamma(\hat{x}, \tilde{x}) + f_\gamma(\tilde{x}, \hat{x}) + \gamma(g(\hat{x}, \tilde{x}) + g(\tilde{x}, \hat{x})) \leq 0 - \gamma\beta \left\|\hat{x} - \tilde{x}\right\|^2 \leq 0. \tag{3.7}$$

Portanto, $\hat{x} = \tilde{x}$. □

Consideramos uma sequência de parâmetros de regularização $\{\gamma_k\}$ e construímos uma sequência de soluções $\{x^k\} := \{x(\gamma_k)\} \subset K$, do problema

$$EP(f_{\gamma_k}, K) \begin{cases} \text{encontrar } x(\gamma_k) \in K, \text{ tal que} \\ f_{\gamma_k}(x(\gamma_k), y) = f(x(\gamma_k), y) + \gamma_k g(x(\gamma_k), y) \geq 0, \forall y \in K, \end{cases} \tag{3.8}$$

Abaixo, mostraremos o principal resultado para o caso monótono.

Teorema 3 *Suponha que f é monótona satisfazendo as condições B1-B2 e g satisfazendo B1-B4. Se $\{x^k\}$ é uma sequência de soluções dos problemas $EP(f_{\gamma_k}, K)$ e $\gamma_k \to 0$, então as seguintes sentenças são equivalentes:*

(i) A sequência $\{x^k\}$ é limitada.

(ii) O conjunto solução $S(f, K)$ é não vazio.

Demonstração: A sequência está bem definida pelo teorema 2. Suponha que a sequência $\{x^k\} \subset K$ é limitada. Dado que X é um espaço de Banach reflexivo, pela proposição 1, temos que existe $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ tal que $x^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$ $(j \to +\infty)$. O conjunto K é fechado e convexo, logo fracamente fechado, logo $\bar{x} \in K$. Temos que

$$f_{\gamma_{k_j}}(x^{k_j}, y) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Assim, $0 \leq f_{\gamma_{k_j}}(x^{k_j}, y) = f(x^{k_j}, y) + \gamma_{k_j} g(x^{k_j}, y)$. Passando ao limite, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{j \to +\infty} [f(x^{k_j}, y) + \gamma_{k_j} g(x^{k_j}, y)] \\ &\leq \limsup_{j \to +\infty} f(x^{k_j}, y) + \limsup_{j \to +\infty} \gamma_{k_j} g(x^{k_j}, y). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como $\gamma_{k_j} \to 0$, f e g satisfazem B1, segue que $f(\bar{x}, y) \geq 0$, $\forall y \in K$. Portanto $S(f, K)$ é não vazio.

Reciprocamente, suponha que $S(f, K) \neq \emptyset$. Seja $\{x^k\}$ uma sequência de soluções de $EP(f\gamma_k, K)$ e $\bar{x} \in S(f, K)$, então

$$\begin{aligned} &0 \leq f_{\gamma_k}(x^k, \bar{x}) = f(x^k, \bar{x}) + \gamma_k g(x^k, \bar{x}) \quad \text{e} \\ &0 \leq f(\bar{x}, x^k). \end{aligned}$$

Somando ambas as desigualdades e usando a monotonicidade de f, temos

$$0 \leq f(x^k, \bar{x}) + f(\bar{x}, x^k) + \gamma_k g(x^k, \bar{x}) \leq \gamma_k g(x^k, \bar{x})$$

Logo $g(x^k, \bar{x}) \geq 0$, portanto

$$g(\bar{x}, x^k) \leq g(\bar{x}, x^k) + g(x^k, \bar{x}) \leq -\beta \left\| x^k - \bar{x} \right\|^2,$$

então,

$$\frac{g(\bar{x}, x^k)}{\|x^k - \bar{x}\|} \leq -\beta \left\| x^k - \bar{x} \right\|,$$

isto é,

$$-\frac{g(\bar{x}, x^k)}{\|x^k - \bar{x}\|} \geq \beta \left\| x^k - \bar{x} \right\|.$$

Como g é uma bifunção monótona e $g(x^k, \bar{x}) \geq 0$, segue que

$$\frac{|g(\bar{x}, x^k)|}{\|x^k - \bar{x}\|} = -\frac{g(\bar{x}, x^k)}{\|x^k - \bar{x}\|} \geq \beta \left\| x^k - \bar{x} \right\|.$$

Suponha que a sequência $\{x^k\}$ seja ilimitada. Neste caso, existe $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ tal que $\left\|x^{k_j}\right\| \longrightarrow +\infty$, logo

$$\limsup_{j \to +\infty} \frac{|g(\bar{x}, x^{k_j})|}{\left\|x^{k_j} - \bar{x}\right\|} \geq \limsup_{j \to +\infty} \beta \left\| x^{k_j} - \bar{x} \right\| = +\infty.$$

Uma contradição com B4. Portanto a sequência $\{x^k\}$ é limitada.

$\square$

4. Caso Não Monótono

No caso em que f é monótona, o problema perturbado $EP(f_{\gamma_k}, K)$ é fortemente monótono. Logo $EP(f_{\gamma_k}, K)$ possui solução única. Quando f é pseudomonótona, o problema regularizado pode não ser fortemente monótono, nem mesmo pseudomonótono. A partir de agora, K_n denotará a interseção de K com a bola $B(0, n)$ de raio n com centro na origem. Note que K_n é convexo, fracamente fechado e limitado, porque está contido em $B(0, n)$, portanto é fracamente compacto pela proposição 2.

O próximo lema estende o lema 3.1 de [Oliveira et al., 2013], de espaços de Hilbert para espaços de Banach reflexivos. Observe que, na hipótese do lema pedimos a convexidade, mas na prova precisamos apenas que conjunto $\{y \in K; f_\gamma(x, y) < 0\}$ seja convexo $\forall x \in K$, em vez da convexidade de $f_\gamma(x, \cdot)$. Este lema pode ser uma importante ferramenta para trabalhos futuros. Note também que não é usada a monotonicidade das bifunções, além disso, é possível usar o seguinte lema, para provar a existência de solução do problema regularizado quando K é limitado.

Lema 6 *Suponha que f e g satisfazem B1 e B2. Então, para cada $\gamma > 0$, existe $\bar{x} \in K_n$ tal que $f_\gamma(\bar{x}, y) \geq 0$, para todo $y \in K_n$.*

Demonstração: Pelo lema 3, f_γ satisfaz B1 e B2. Fixe $\gamma > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Defina $T_n : K_n \rightrightarrows X$ por

$$T_n(y) := \{x \in K_n : f_\gamma(x, y) \geq 0\}.$$

Mostraremos que T_n satisfaz as hipóteses do lema 1. Usaremos aqui o fato que X é um espaço de Banach reflexivo com a topologia fraca, que certamente o torna um espaço vetorial topológico de Haussdorff. Para isso, seja $y \in K_n$ e $\{x^k\} \subset T_n(y)$ uma sequência tal que $x^k \rightharpoonup \bar{x}$. Se $x^k \in T_n(y)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, temos $f_\gamma(x^k, y) \geq 0$. Usando B1, obtemos que $\bar{x} \in T_n(y)$, logo $T_n(y)$ é fracamente fechado e verifica (i) do lema 1. Agora, se $y_0 \in K_n$, $T_n(y_0) \subset K_n$. Como $T_n(y_0)$ é fracamente fechado e limitado, usando a proposição 2, temos que $T_n(y_0)$ é fracamente compacto. Assim, T_n satisfaz (ii). Para o item (iii), suponha por absurdo que, existe um subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_p\}$

de K_n e $y_0 \in \text{conv}\{y_1, \cdots, y_p\}$ tal que $y_0 \notin \bigcup_{i=1}^{p} T_n(y_i)$, logo, $y_0 \notin \{x \in K_n; f_\gamma(x, y_i) \geq 0\}$, $\forall i \in I_p$ $(I_p := \{1, \cdots, p\})$, $\Rightarrow f_\gamma(y_0, y_i) < 0$, $\forall i \in I_p \Rightarrow y_i \in \{y \in K_n; f_\gamma(y_0, y) < 0\}$. Como $f_\gamma(y_0, \cdot)$ é convexa, o conjunto $\{y \in K_n; f_\gamma(y_0, y) < 0\}$ é convexo, logo

$$\text{conv}\{y_1, \cdots, y_p\} \subset \{y \in K_n; f_\gamma(y_0, y) < 0\}.$$

Usando o fato que $y_0 \in \text{conv}\{y_1, \cdots, y_p\}$, segue que $f_\gamma(y_0, y_0) < 0$, absurdo. Portanto (iii) é satisfeita. Pelo lema 3,

$$\bigcap_{y \in K_n} T_n(y) \neq \emptyset.$$

Logo, existe $\bar{x} \in K_n$ tal que $f_\gamma(\bar{x}, y) \geq 0$, $\forall y \in K_n$. □

No seguinte teorema, mostraremos que $S(f_\gamma, K)$ é não vazio quando f é pseudomonótona.

Teorema 4 *Suponha que f satisfaz B1, B2 e B5, e g satisfaz B1-B4. Então, para todo $\gamma > 0$, $S(f_\gamma, K)$ é não vazio.*

Demonstração: Seja $\gamma > 0$. Pelo lema 3, f_γ satisfaz B1-B2. Vamos provar que f_γ satisfaz B5. De fato, seja $\{x^n\} \subset K$ uma sequência tal que $\lim_{n \to +\infty} \|x^n\| = +\infty$ e $u \in K$. Temos,

$$\begin{aligned}
f_\gamma(x^n, u) &= f(x^n, u) + \gamma g(x^n, u) \\
&\leq f(x^n, u) - \gamma g(u, x^n) - \gamma\beta \|x^n - u\|^2 \\
&= f(x^n, u) + \gamma \|x^n - u\| \left[\frac{-g(u, x^n)}{\|x^n - u\|} - \beta \|x^n - u\|\right] \\
&\leq f(x^n, u) + \gamma \ \|x^n - u\| \left[\frac{|g(u, x^n)|}{\|x^n - u\|} - \beta \|x^n - u\|\right].
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Passando ao limite em (4.1) com $n \to +\infty$ e usando B4, temos que $\limsup_{n \to +\infty} \dfrac{|g(u, x^n)|}{\|x^n - u\|} < +\infty$; usando B5, temos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x^n, u) \leq 0$. Logo $f_\gamma(x^n, u) \leq 0$, $\forall n \geq n_0$. Assim, para cada $\gamma > 0$, temos que f_γ satisfaz B5.

Pelo lema 6, existe $x^n \in K_n$ tal que $f_\gamma(x^n, u) \geq 0$ para todo $y \in K_n$, logo x^n resolve o problema $EP(f_\gamma, K_n)$. Agora, analisaremos dois casos:

(i) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^n\| < n$. Neste caso, $x^n \in \text{int}(B(0, n))$, e pelo lema 6, x^n resolve o problema $EP(f_\gamma, K_n) = EP(\gamma, K_n \cap B(0, n))$. Pelo item (ii) do lema 2, segue que x^n resolve o problema $EP(f_\gamma, K)$.

(ii) $\|x^n\| \to +\infty$. Neste caso, B5 garante a existência de um $u \in K$ and $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(x^n, u) \leq 0, \quad \forall n \geq n_0. \tag{4.2}$$

Tome $\bar{n} \geq n_0$ tal que $\|u\| < \bar{n}$. Então $u \in K \cap B(0, \bar{n}) = K_{\bar{n}}$ e, como $x^{\bar{n}}$ resolve o problema $EP(f_\gamma, K_{\bar{n}})$, segue que

$$f_\gamma(x^{\bar{n}}, u) \geq 0. \tag{4.3}$$

Comparando (4.2) e (4.3), obtemos

$$f_\gamma(x^{\bar{n}}, u) = 0. \tag{4.4}$$

De (4.4), temos

$$f_\gamma(x^{\bar{n}}, u) = 0 \leq f_\gamma(x^{\bar{n}}, y), \quad \forall y \in K_{\bar{n}} \tag{4.5}$$

Seja $h : K \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, definida como $h(y) = f_\gamma(x^{\bar{n}}, y)$. Já que $u \in K \cap B(0, \bar{n}) = K_{\bar{n}}$, por (4.5), u minimiza h em $K_{\bar{n}}$. Como $\|u\| < \bar{n}$, $u \in \text{int}B(0, \bar{n})$. Segue do item (i) do lema 2 que u minimiza h em K. Segue de (4.4) que:

$$0 = f_\gamma(x^{\bar{n}}, u) = h(u) \leq h(y) = f_\gamma(x^{\bar{n}}, y), \quad \forall y \in K. \tag{4.6}$$

Pela desigualdade (4.6), concluímos que $x^{\bar{n}}$ resolve o problema $EP(f_\gamma, K)$.

$\square$

No próximo teorema, estabelecemos nosso principal resultado para o caso pseudomonótono.

Teorema 5 *Suponha que f é pseudomonótona e satisfaz B1, B2 e B5, e g satisfaz B1 - B4. Se $\{x^k\}$ é uma sequência de soluções de (3.8) e $\gamma_k \to 0$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) A sequência $\{x^k\}$ é limitada.
(ii) O conjunto solução $S(f, K)$ é não vazio.

Demonstração: Aplicando o teorema 4 com $\gamma = \gamma_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, que a sequência $\{x^k\}$ está bem definida. Supondo (i) , a limitação da sequência $\{x^k\} \subset K \subset X$ e o fato que X é um espaço de Banach reflexivo, implicam que, deve existir uma subsequência $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ convergindo fracamente para $\bar{x} \in K$.

Como $f(\cdot, y)$ e $g(\cdot, y)$ satisfazem B1 e usando que $\gamma_k \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup_{j \to +\infty} f_{\gamma_{k_j}}(x^{k_j}, y) &= \limsup_{j \to +\infty} [f(x^{k_j}, y) + \gamma_{k_j} g(x^{k_j}, y)] \\ &\leq \limsup_{j \to +\infty} f(x^{k_j}, y) + \limsup_{j \to +\infty} \gamma_{k_j} g(x^{k_j}, y) \\ &\leq f(\bar{x}, y) \quad \forall y \in K. \end{aligned} \tag{4.7}$$

De (4.7), temos que $\bar{x}$ é solução de $EP(f, K)$, logo $S(f, K) \neq \emptyset$.

Agora, assumindo (ii). Tome $\bar{x} \in S(f, K)$. Mostraremos que a sequência $\{x^k\}$ é limitada. Já que $x^k \in S(f_{\gamma_k}, K)$, temos:

$$f(\bar{x}, x^k) \geq 0 \quad \text{e} \quad f_{\gamma_k}(x^k, \bar{x}) \geq 0. \tag{4.8}$$

De (4.8) temos que $f(x^k, \bar{x}) \leq 0$, pois f é pseudomonótona. Note que:

$$0 \leq f_{\gamma_k}(x^k, \bar{x}) = f(x^k, \bar{x}) + \gamma_k g(x^k, \bar{x}) \leq \gamma_k g(x^k, \bar{x}). \tag{4.9}$$

De (4.9) obtemos que $g(x^k, \bar{x}) \geq 0$. Usando B3, temos

$$g(x^k, \bar{x}) + g(\bar{x}, x^k) \leq -\beta \left\| x^k - \bar{x} \right\|^2. \tag{4.10}$$

Como $g(x^k, \bar{x}) \geq 0$, segue de (4.10) que $g(\bar{x}, x^k) \leq -\beta \left\| x^k - \bar{x} \right\|^2$.

A conclusão de que $\{x^k\}$ é limitada é obtida usando o mesmo argumento da prova da segunda parte do teorema 2.

$\square$

Teorema 6 *Sob as mesmas hipóteses do teorema 5, se $S(f, K) \neq \emptyset$ e $\gamma_k \to 0$, então a sequência $\{x^k\} \subset S(f_{\gamma_k}, K)$ é fracamente convergente para a solução do problema $EP(f, K)$, que por sua vez, é única solução do problema:*

$$\begin{cases} \textit{Encontrar} \quad \hat{x} \in S(f, K), \ \textit{tal que}, \\ \qquad\qquad\qquad g(\hat{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in S(f, K) \end{cases} \tag{4.11}$$

Demonstração: Se o conjunto solução $S(f, K)$ é não vazio, o teorema 5 garante que a sequência $\{x^k\}$ é limitada. Portanto existe pelo menos um valor de aderência fraco. Seja $\bar{x}$ um valor de aderência fraco de $\{x^k\}$, então existe $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ tal que $x^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$ ($j \to +\infty$). Pelo teorema 5, $\bar{x} \in S(f, K)$. Temos

$$f(x^{k_j}, z) + \gamma_{k_j} g(x^{k_j}, z) \geq 0, \quad \forall z \in K, \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

Seja $x \in S(f, K)$, então

$$f(x, x^{k_j}) \geq 0, \quad \text{pois} \quad x^{k_j} \in K.$$

Pela pseudomonotonicidade de f, obtemos

$$f(x^{k_j}, x) \leq 0, \tag{4.13}$$

mas $x \in K$, portanto, por (4.12):

$$f(x^{k_j}, x) + \gamma_{k_j} g(x^{k_j}, x) \geq 0.$$

Logo, pela equação (4.13), $\gamma_{k_j} g(x^{k_j}, x) \geq -f(x^{k_j}, x) \geq 0$. Assim,

$$g(x^{k_j}, x) \geq 0, \quad j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup_{j \to +\infty} g(x^{k_j}, x) \leq g(\bar{x}, x)$$
$$\Rightarrow \bar{x} \quad \text{resolve :}$$

$$\begin{cases} \text{Encontrar} \quad \hat{x} \in S(f, K), \text{ tal que,} \\ \qquad\qquad\quad g(\hat{x}, x) \geq 0, \quad \forall x \in S(f, K) \end{cases} \tag{4.14}$$

Para mostrar que a solução é única, suponha que $\tilde{x}$ e $\hat{x}$ são soluções do problema. Segue que:

$$g(\tilde{x}, \hat{x}) \geq 0 \tag{4.15}$$

$$g(\hat{x}, \tilde{x}) \geq 0 \tag{4.16}$$

Somando (4.15) e (4.16), obtemos

$$0 \leq g(\hat{x}, \tilde{x}) + g(\tilde{x}, \hat{x}) \leq -\beta \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2 \leq 0.$$

Portanto, $\hat{x} = \tilde{x}$, isto é, todo valor de aderência fraco de $\{x^k\}$ é solução de (4.14), assim, concluímos que toda a sequência é fracamente convergente para a solução do problema de equilíbrio $EP(f, K)$. $\square$

4.1. Exemplo

O próximo teorema pode ser encontrado em [Kien, 2002]. É importante para fornecer um exemplo no espaço $l^p(\mathbb{N})$. Ressaltamos que $L^p(\Omega, \mu) = l^p(\mathbb{N})$, se considerarmos $\Omega = \mathbb{N}$ e μ a medida de contagem em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Para cada $x \in X$, a *aplicação dualidade* é definida por:

$$J_p(x) = \{x^* \in X^*; \langle x^*, x\rangle = \|x\| \|x^*\|, \|x^*\| = \|x\|^{p-1}\}.$$

Teorema 7 *Suponha que $X = L^p(\Omega, \mu)$, $p \in (1, +\infty)$. Então valem as seguintes propriedades:*
(a) Se $1 < p \leq 2$, então $\langle J_p(x) - J_p(y), x - y\rangle \geq \frac{p-1}{64} \|x - y\|^2$, para todo $x, y \in X$.
(b) Se $p \geq 2$, então $\langle J_p(x) - J_p(y), x - y\rangle \geq \frac{1}{p^2 2^{p-1}} \|x - y\|^p$, para todo $x, y \in X$.

Exemplo 1 *Consideramos $p \in (1, +\infty)$, $X := l^p(\mathbb{N})$, $K := \{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N}); \xi_n \in [0, +\infty), \forall n \in \mathbb{N}\}$. Defina $f, g : K \times K \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle$ e $g(x, y) = \langle J_p(x), y - x\rangle$, onde $J_p : l^p(\mathbb{N}) \to l^q(\mathbb{N})$ é a aplicação dualidade, q satisfaz $1/p + 1/q = 1$ e $F : l^p(\mathbb{N}) \to l^q(\mathbb{N})$ é definida por $F(x) = e_1/(1 + \|x\|^p_{l^p})$. Veja que g satisfaz B4, pois,*

$$\frac{|g(x, y)|}{\|y - x\|} = \frac{|\langle J_p(x), y - x\rangle|}{\|y - x\|} \leq \frac{\|J_p(x)\| \|y - x\|}{\|y - x\|} \leq \|J_p(x)\|.$$

Logo

$$\limsup_{\|y\|\to+\infty} \frac{|g(x,y)|}{\|y-x\|} \leq \|J_p(x)\| < +\infty.$$

Para ver que f satisfaz B5, seja $\{x^n\} \subset K$ uma sequência tal que $\|x^n\| \to +\infty$ ($n \to +\infty$). Tome $u = (0, 1, 0, 0, \cdots) \in K$. Então

$$f(x^n, u) = -x_1^{(n)}/(1 + \|x^n\|_{l^p}^p) \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sabemos que $l^p(\mathbb{N})$ é um espaço uniformemente convexo, logo J é uniformemente contínua em cada subconjunto limitado de $l^p(\mathbb{N})$. Portanto g satisfaz B1. Para mostrar que g satisfaz B3, sejam $x, y \in K$. $g(x,y) + g(y,x) = \langle J_p(x) - J_p(y), y - x\rangle$, e, pelo teorema acima, temos $\langle J_p(x) - J_p(y), y - x\rangle \leq -\beta \|x - y\|^r$, onde $\beta = (p-1)/64$ e $r = 2$, se $p \in (1, 2]$, $\beta = 1/p^2 2^{p-1}$ e $r = p$, se $p \in [2, +\infty)$.

Referências

Alleche, B., Radulescu, V. D., e Sebaoui, M. (2015). The tikhonov regularization for equilibrium problems and applications to quasi-hemivariational inequalities. *Optimization Letters*, 9:483–503.

Bigi, G., Castellani, M., Pappalardo, M., e Passacantando, M. (2012). Existence and solution methods for equilibria. *European Journal of Operational Research*, 227:1–11.

Blum, E. e Oettli, W. (1994). From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *The Mathematics Student*, 62:127–169.

Brézis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, USA.

Fan, K. (1972). A minimax inequality and applications. In *O. Shisha (Ed.), Inequalities*. Academic Press.

Hung, P. G. e Muu, L. D. (2011). The tikhonov regularization extended to equilibrium problems involving pseudomonotone bifunctions. *Nonlinear Analysis*, 401:6121–6129.

Iusem, A. N. (2011). On the maximal monotonicity of diagonal subdifferential operators. *Journal of Convex Analysis*, 18:489–503.

Iusem, A. N., Kassay, G., e Sosa, W. (2009). On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems. *Mathematical Programming*, 116:259–273.

Iusem, A. N. e Sosa, W. (2003). New existence results for equilibrium problems. *Nonlinear Analysis*, 52:621–635.

Kien, B. T. (2002). The normalized duality mapping and two related characteristic properties of a uniformly convex banach space. *Acta Mathematica Vietnamita*, 27:53–67.

Oliveira, P., Santos, P. S. M., e Silva, A. N. (2013). A tikhonov-type regularization for equilibrium problems in hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 401:336–342.

Pascalli, D. e Sburlan, S. (1979). *Nonlinear Mappings of Monotone Type*. Springer, Netherlands.