

APLICAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INVERSOS EM PROCESSAMENTO DE SINAIS

Guilherme Dean Pelegrina

Faculdade de Ciências Aplicadas - Universidade Estadual de Campinas
Rua Pedro Zaccaria, 1300, Caixa Postal 1068, CEP 13484-350, Limeira, São Paulo
guipelegrina@gmail.com

Leonardo Tomazeli Duarte

Faculdade de Ciências Aplicadas - Universidade Estadual de Campinas
Rua Pedro Zaccaria, 1300, Caixa Postal 1068, CEP 13484-350, Limeira, São Paulo
leonardo.duarte@fca.unicamp.br

RESUMO

Diversos problemas práticos encontrados na engenharia podem ser formulados como problemas inversos. Basicamente, tais problemas consistem em estimar um conjunto de parâmetros que passaram por um processo de transformação. Com base nos dados observados, normalmente, tais problemas são resolvidos a partir da otimização de um critério, como o erro de representação. No entanto, esta abordagem pode resultar em um problema mal-posto, não apresentando soluções únicas. Assim, este trabalho propõe a aplicação da abordagem multiobjetivo, cuja resolução é obtida através da otimização simultânea de mais de um critério, em um problema inverso típico da área de processamento de sinais: a separação cega de fontes. Visto que em várias situações em separação de sinais há um conjunto de informações *a priori* acerca dos dados originais, estas podem ser utilizadas para formular um conjunto de critérios de otimização. Experimentos numéricos considerando sinais esparsos e algoritmos evolutivos evidenciam a aplicabilidade do método proposto.

PALAVRAS CHAVE. Problemas inversos, Processamento de sinais, Otimização multiobjetivo.

OA - Outras aplicações em PO

ABSTRACT

Several practical problems faced in engineering can be formulated as inverse problems. Basically, these problems aim at estimating a set of parameters that were submitted to a transformation process. Based on the observed data, very often these problems are solved from the optimization of a single criterion, such as the representation error. However, this approach can result in an ill-posed problem, without unique solutions. This work proposes the application of the multi-objective approach, whose resolution is achieved by the simultaneous optimization of more than one criterion, in a typical inverse problem of signal processing area: blind source separation. Since in many situations in signal processing we have a set of *a priori* information about the original data, this can be used to formulate a set of optimization criteria. Numerical experiments considering sparse signals and evolutionary algorithms show the applicability of the proposed method.

KEYWORDS. Inverse problems, Signal processing, Multiobjective optimization.

OA - Other applications in PO

1. Introdução

Na engenharia e ciências aplicadas, uma vasta gama de problemas podem ser formulados como problemas inversos [Aster et al., 2011; Tarantola, 2005]. Esses problemas consistem em estimar um conjunto de dados de entrada de um sistema a partir de um conjunto de dados observados de tal sistema [Aster et al., 2011]. Via de regra, a estimação é baseada na solução de um problema de otimização que leva em consideração um critério atrelado ao sistema e aos parâmetros, como uma medida de distância entre as saídas do modelo e os dados observados. No entanto, dependendo da característica do sistema, o problema resultante é mal-posto, impossibilitando encontrar uma única solução.

Dentro do contexto de processamento de sinais, um problema conhecido como separação cega de fontes pode ser formulado como um problema inverso [Comon e Jutten, 2010]. Esse problema consiste, basicamente, em estimar um conjunto de sinais fonte através da observação de um conjunto de misturas de tais fontes, desconhecendo tanto os sinais originais quanto o processo de mistura [Hérault et al., 1985]. Podemos citar como aplicações, por exemplo, processamento de dados químico [Duarte et al., 2009] e geofísicos [Takahata et al., 2012]. Sendo um problema cego, ou seja, sem o conhecimento do sistema misturador, é impossível resolvê-lo apenas considerando o erro de representação, pois há inúmeras combinações entre sinais e sistema que minimizam essa medida. No entanto, em várias situações, há a disponibilidade de mais informações acerca dos dados de entrada, como, por exemplo, a esparsidade [Elad, 2010]. Dessa forma, podemos usar esse conjunto de medidas para formular um conjunto de critérios de otimização.

O que normalmente se faz é atribuir pesos para cada critério e resolver o problema de maneira mono-objetivo obtendo, assim, uma solução para o problema. Diferente dessa abordagem, este trabalho propõe considerar a otimização simultânea dos critérios, sem atribuir pesos. Essa abordagem, conhecida como otimização multiobjetivo [Miettinen, 1999], além de considerar mais de um critério na otimização, fornece um conjunto de soluções (Pareto-ótimas) as quais podem servir como auxílio para o especialista em tomar a decisão no contexto em questão.

As próximas seções são divididas da seguinte forma. A Seção 2 apresenta os principais conceitos acerca do problema inverso e sua ligação com processamento de sinais. Na Seção 3, descrevemos a abordagem multiobjetivo e o algoritmo evolutivo usado nas análises. Em seguida, na Seção 4, mostramos os experimentos realizados e os resultados obtidos. Finalmente, na Seção 5 apresentamos as considerações finais deste trabalho.

2. Problemas inversos em processamento de sinais

Como mencionado, o problema inverso visa estimar um conjunto de parâmetros s de um sistema a partir da observação de um conjunto de dados x . Matematicamente, essa relação pode ser escrita como

$$x = G(s), \quad (1)$$

onde $G(\cdot)$ representa um operador do sistema que relaciona as entradas s às saídas x . Um exemplo seria o tratamento de sinais de tomografia sísmica, cujo objetivo é determinar os parâmetros s relacionados à velocidade de propagação das ondas sísmicas na superfície. Com base nos dados x coletados na superfície através de geofones ou hidrofones, os parâmetros s podem ser estimados a partir de um operador $G(\cdot)$ que modela a propagação do sinal, por exemplo, através da equação da onda [Aster et al., 2011].

Quando o operador $G(\cdot)$ é conhecido e é inversível, a estimação dos parâmetros é relativamente simples. No entanto, em situações práticas, muitas vezes o operador não é inversível ou não é conhecido. Dessa forma, torna-se necessário ajustar algum critério de otimização a fim de formular um problema cuja solução seja uma estimativa dos parâmetros originais s .

Em processamento de sinais, problemas de separação cega de fontes podem ser formulados como problemas inversos. Matematicamente, seja $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)]^T$ um conjunto de N sinais fonte e $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$ o conjunto de M misturas de tais fontes. Considerando um operador linear e instantâneo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$, similar à (1), a relação passa a ser

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}. \quad (2)$$

Nessa aplicação, ilustrada na Figura 1, tanto os parâmetros originais \mathbf{s} (sinais fonte) quanto o operador linear \mathbf{A} são desconhecidos, que nos conduz a um problema inverso não-linear. Sendo um problema mal-posto, como já mencionado, é preciso ajustar um modelo de otimização capaz de estimar os sinais originais \mathbf{s} .

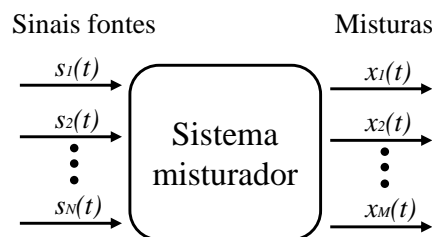


Figura 1: Sistema de mistura linear.

Um critério de otimização muito utilizado é o erro de representação do modelo. Considerando como métrica a norma ℓ_2^1 [Tarantola, 2005], o problema se torna

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{s}} J(\mathbf{A}, \mathbf{s}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2, \quad (3)$$

onde $J(\cdot)$ representa a função custo². No entanto, não basta apenas resolver (3) para obter uma boa estimativa dos sinais fonte, já que inúmeras combinações entre \mathbf{A} e \mathbf{s} minimizam o erro de representação. Assim, é comum se basear em alguma outra informação sobre as fontes a fim de criar termos de regularização. O problema de minimização com termos de regularização ficaria, então

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{s}} J(\mathbf{A}, \mathbf{s}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2 + \lambda R(\mathbf{s}), \quad (4)$$

onde $R(\mathbf{s})$ representa o termo de regularização ponderado pela constante λ . Por exemplo, quando se trata de sinais esparsos, uma métrica muito utilizada para calcular a esparsidade, e que pode ser usada como termo de regularização, é a norma ℓ_1 [Elad, 2010]. O problema (4), com essa regularização, seria formulado como

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{s}} J(\mathbf{A}, \mathbf{s}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2 + \lambda \|\mathbf{s}\|_1, \quad (5)$$

cuja resolução fornece uma solução diferente para cada valor atribuído à λ . Dessa forma, embora muito utilizada, essa abordagem apresenta dificuldades quanto à atribuição correta de λ . Assim, surge como uma alternativa interessante a otimização multiobjetivo, a qual será melhor detalhada na seção seguinte.

¹As normas ℓ_p são definidas por $\|\mathbf{v}\|_p = (\sum_i |v_i|^p)^{1/p}$, com $1 \leq p < \infty$. Assim, a norma ℓ_1 se resume à soma do módulo das entradas e a norma ℓ_2 corresponde à norma euclidiana.

²Vale ressaltar que, neste estudo, consideramos a minimização das funções. No caso em que o critério for de maximização, ele pode ser facilmente convertido para minimização através da transformação $\max J(\cdot) = \min -J(\cdot)$.

3. Otimização multiobjetivo

3.1. Definição e soluções Pareto-ótimas

Como já mencionado, consideramos neste estudo a otimização multiobjetivo para resolver o problema inverso dentro do contexto de processamento de sinais. Essa abordagem, diferente da abordagem mono-objetivo, procura otimizar simultaneamente dois ou mais critérios. Assim, ao invés de apenas uma função custo a ser otimizada, temos um conjunto $\mathbf{J}(\cdot) = [J_1(\cdot), J_2(\cdot), \dots, J_k(\cdot)]$ que leva em consideração k critérios ao mesmo tempo. Considerando os critérios do erro de representação e da norma ℓ_1 apresentados anteriormente, o modelo matemático, então, ficaria

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{s}} \mathbf{J}(\mathbf{A}, \mathbf{s}) = [J_1(\mathbf{A}, \mathbf{s}), J_2(\mathbf{A}, \mathbf{s})] = [\|\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2, \|\mathbf{s}\|_1]. \quad (6)$$

Normalmente, neste tipo de formulação, os critérios são conflitantes. Dessa forma, não é possível encontrar uma solução única que minimize todos os critérios ao mesmo tempo. Com isso, diferentemente da abordagem mono-objetivo, a resolução de (6) nos fornece um conjunto de soluções de compromisso entre os critérios, chamado de soluções Pareto-ótimas [Miettinen, 1999; Deb, 2001]. Além disso, como ilustrado na Figura 2, as soluções individuais obtidas a partir da otimização de cada critério também estão contidas no conjunto de soluções Pareto-ótimas.

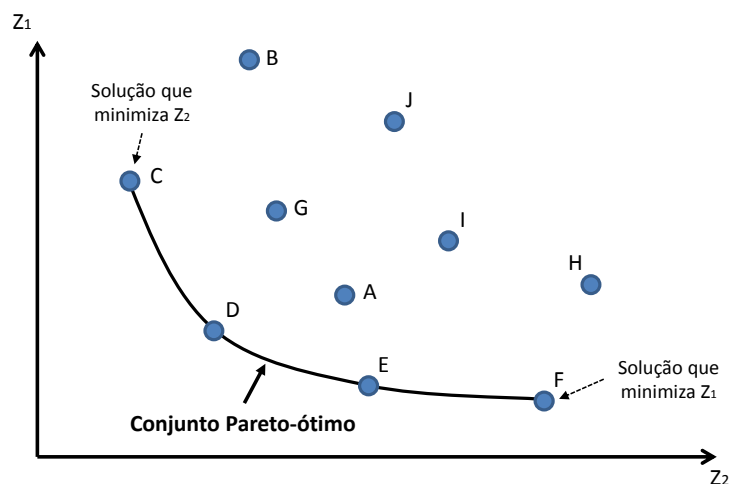


Figura 2: Conjunto Pareto-ótimo (soluções C, D, E e F) representado no espaço de objetivos.

Para determinar as soluções Pareto-ótimas, é necessário primeiramente entender o conceito de dominância. Uma solução \mathbf{p} domina outra solução \mathbf{q} se ambas as condições forem satisfeitas: i) \mathbf{p} não é pior que \mathbf{q} em todos os objetivos e ii) \mathbf{p} é estritamente melhor que \mathbf{q} em pelo menos um objetivo. O conjunto Pareto-ótimo, então, é composto pelas soluções que não são dominadas por nenhuma outra solução [Miettinen, 1999].

Assim, tomando como exemplo as soluções ilustradas na Figura 2, as soluções C, D, E e F são Pareto-ótimas. Além disso, como já mencionado, as soluções C e F são as mesmas encontradas através da otimização mono-objetivo dos critérios Z_2 e Z_1 , respectivamente. Portanto, ao resolver o problema de separação cega de fontes através da abordagem multiobjetivo, encontramos as soluções individuais ao resolver cada um dos critérios individualmente e, também, as soluções de compromisso entre tais critérios.

3.2. Técnicas para encontrar o conjunto Pareto-ótimo

Há diversas técnicas para determinar o conjunto Pareto-ótimo. Dentre elas, as mais tradicionais são os métodos da soma ponderada e do ϵ -restrito. O primeiro consiste, basicamente, em resolver o problema descrito em (4) várias vezes, variando o valor de λ . O inconveniente desta abordagem é que o conjunto Pareto-ótimo completo só seria obtido se o mesmo fosse convexo [Deb, 2001]. Já o método do ϵ -restrito mantém um critério para otimizar e converte os demais em restrições, incluindo um limitante ϵ para cada uma delas. Variando o valor de ϵ , e resolvendo o problema, as soluções Pareto-ótimas são encontradas. Nessa abordagem, a dificuldade está em escolher o intervalo de variação de ϵ , já que um valor equivocado do mesmo pode, por exemplo, tornar o problema infactível [Deb, 2001].

Além destas mencionadas, uma outra classe de técnicas existentes são as baseadas em algoritmos evolutivos [Deb, 2001]. Dentre esses métodos, um que apresenta resultados eficientes (e que será utilizado nos experimentos deste estudo) é o chamado *Strength Pareto Evolutionary Algorithm* (SPEA). O SPEA foi introduzido por Zitzler e Thiele [1998] e melhorado por Zitzler et al. [2001], originando o SPEA2.

Em linhas gerais, o SPEA2 busca a convergência até as soluções Pareto-ótimas através de um método iterativo composto por operadores evolutivos. Dessa forma, em cada iteração, boas soluções dão origem a novas boas soluções (melhores que as anteriores), até que ocorra a convergência para o conjunto Pareto-ótimo. Vale ressaltar que este método também preza pela diversidade do conjunto, ou seja, soluções de fronteira são preservadas e soluções que são muito próximas uma das outras são descartadas. Os passos apresentados a seguir resumem o funcionamento do algoritmo [Zitzler et al., 2001]:

1. **Inicialização:** Na primeira iteração ($g = 1$), geramos uma população inicial P_1 de tamanho L (pré-definido) e criamos um conjunto externo \bar{P}_1 vazio, o qual guardará as melhores soluções encontradas (este terá um tamanho \bar{L} fixo pré-definido).
2. **Cálculo do *fitness*:** Para cada indivíduo na população e no conjunto externo ($P_g \cup \bar{P}_g$), calculamos seu *fitness* com base nos critérios de dominância. Primeiramente, atribuímos uma medida de força $S(i)$ para cada indivíduo i correspondente ao número de indivíduos que i domina (tanto na população quanto no arquivo externo). Em seguida, encontramos uma medida bruta de *fitness* $R(i)$ para cada indivíduo i , dado pela soma das forças dos indivíduos j que dominam i . Com isso, uma solução não dominada terá uma medida bruta de *fitness* igual a zero. Com o intuito de diferenciar soluções com mesmo valor de *fitness*, uma outra medida, chamada de densidade, é calculada para cada indivíduo. Essa medida é dada por $D(i) = 1/(\sigma_i^h + 2)$, onde σ_i^h representa a distância (no espaço de objetivos) entre o indivíduo i e seu h -ésimo vizinho mais próximo, com $h = \sqrt{L + \bar{L}}$. Finalmente, o *fitness* $F(i)$ de cada indivíduo i é obtido somando seu valor bruto e sua densidade, ou seja, $F(i) = R(i) + D(i)$. Note que, como $D(i) < 1$, as soluções não-dominadas apresentam valor de *fitness* menor que 1.
3. **Seleção:** Nesta etapa, atualizamos o conjunto externo (conjunto com as melhores soluções encontradas até o momento). Com base nas soluções não-dominadas encontradas através do cálculo do *fitness*, podemos ter três casos diferentes: o número de soluções não-dominadas é igual, menor ou maior ao tamanho pré-definido do conjunto externo. Para o primeiro caso, o conjunto externo é atualizado (\bar{P}_{g+1}) simplesmente selecionando os indivíduos não-dominados de $P_g \cup \bar{P}_g$. Para o segundo caso, \bar{P}_{g+1} recebe as \bar{L} melhores soluções de $P_g \cup \bar{P}_g$ de acordo com seu valor de *fitness* (todas as soluções não-dominadas e as melhores soluções dominadas). Para o terceiro caso, atualizamos \bar{P}_{g+1} com todas as soluções não-dominadas e calculamos a distância (no espaço de objetivos) entre elas. De maneira iterativa até que

restam apenas \bar{L} soluções não-dominadas em \bar{P}_{g+1} , o indivíduo com menor distância até um outro é retirado do conjunto. Dessa forma, preservamos a diversidade das soluções, eliminando indivíduos que são muito próximos. Vale ressaltar que devemos tomar cuidado para não excluir soluções de fronteira nesse procedimento.

4. **Critério de parada:** Caso o número máximo de iterações seja atingido ou algum outro critério de parada é alcançado, o algoritmo termina. Caso contrário, seguimos para o próximo passo.
5. **Determinação de indivíduos para a etapa de variação:** Nesta etapa, por meio da seleção por torneio binário, escolhemos os indivíduos para compor o conjunto V_{g+1} , o qual sofrerá variações. Esta técnica consiste, primeiramente, em gerar dois inteiros aleatórios I_1 e I_2 entre 1 e \bar{L} . Feito isso, comparamos os valores de *fitness* dos indivíduos I_1 e I_2 do conjunto externo. Caso $F(I_1) \leq F(I_2)$, o indivíduo I_1 entra no conjunto V_{g+1} ; caso contrário, o indivíduo I_2 entra em V_{g+1} . Esse procedimento é repetido até preencher V_{g+1} com L indivíduos.
6. **Variação:** De posse do conjunto V_{g+1} , aplicamos operadores genéticos (recombinação e mutação, com taxas pré-definidas) a fim de gerar a nova população P_{g+1} (geração de novos indivíduos). Embora parecidos com os antigos, espera-se que estes novos indivíduos, ao longo das iterações, convirjam para as soluções Pareto-ótimas. Feita a variação, a iteração termina, voltando ao passo 2.

No decorrer da próxima seção, mostraremos algumas considerações adicionais no algoritmo SPEA2 a fim de melhor ajustá-lo ao problema inverso tratado no presente trabalho.

4. Experimentos numéricos

4.1. Geração dos dados e seleção dos critérios de otimização

Os experimentos realizados neste estudo, utilizando o software MATLAB, foram baseados em um conjunto de dados sintéticos. Foram gerados $N = 2$ sinais fonte esparsos, $s_1(t)$ e $s_2(t)$, cada um com $T = 100$ amostras. A partir da matriz de mistura

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

os dados observados foram obtidos através da operação linear apresentada em (2). Tanto as fontes quando as misturas podem ser vistas na Figura 3.

Supondo o conhecimento *a priori* da esparsidade dos sinais, selecionamos os critérios da norma ℓ_2 e da norma ℓ_1 para compor a otimização multiobjetivo. A fim de evitar problemas de escala, consideramos a norma ℓ_1 normalizada, ou seja, norma ℓ_1 /norma ℓ_2 . O modelo considerando esses dois critérios para resolver o problema inverso é dado, então, por

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{s}} \mathbf{J}(\mathbf{A}, \mathbf{s}) = \left[\|\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2, \sum_{i=1}^N \frac{\|s_i(t)\|_1}{\|s_i(t)\|_2} \right]. \quad (7)$$

4.2. Especificidades do SPEA2 para o problema inverso

Alguns aspectos do SPEA2 foram ajustados de maneira a enquadrar melhor o algoritmo ao problema inverso. Tais ajustes são apresentados a seguir:

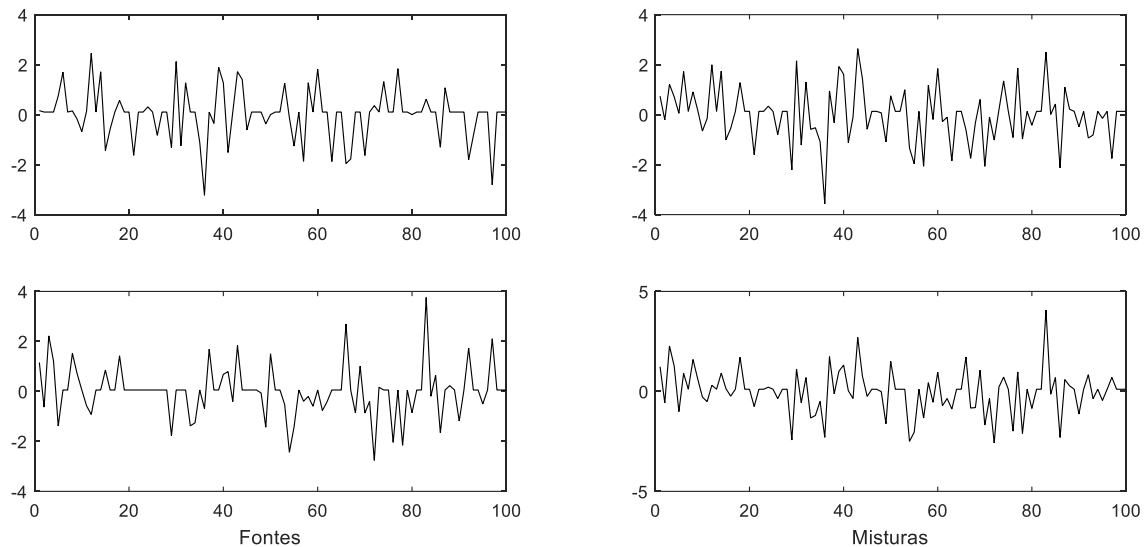


Figura 3: Sinais fonte e misturas.

- Cada indivíduo no SPEA2 é composto por um vetor com $N^2 + 2 * T$ elementos, onde N é o número de sinais fonte e T é o número de amostras. Neste experimento, então, o vetor de indivíduos contém $2^2 + 2 * 100 = 204$ elementos.
- Considerando o problema inverso com os parâmetros \mathbf{A} e \mathbf{s} desconhecidos, gerar indivíduos completamente aleatórios retardaria a convergência do algoritmo. Assim, geramos uma população inicial composta por soluções do problema (3). Como gostaríamos de minimizar o erro de representação, partindo destas soluções, a convergência se torna mais rápida.
- Como o segundo critério de otimização é independente da matriz \mathbf{A} e dos dados observados \mathbf{x} , a minimização da norma ℓ_1 normalizada levaria à solução trivial nula (todos os elementos iguais a zero). Para mitigar esse inconveniente, consideramos a informação *a priori* acerca do mínimo de esparsidade que os sinais fonte podem assumir. No caso, consideramos que $\sum_{i=1}^N \|s_i(t)\|_1 / \|s_i(t)\|_2 \geq 10$. A fim de garantir a factibilidade das soluções Pareto-ótimas, antes do cálculo do *fitness*, penalizamos os valores das funções custo dos indivíduos que violam a restrição do mínimo da norma ℓ_1 .
- Visto que a geração da população inicial com norma ℓ_2 mínima fornece soluções com erro de representação da ordem de 10^{-7} , podemos ter problemas numéricos no momento da análise de dominância. Assim, para contornar essa questão, consideramos que indivíduos com norma ℓ_2 menor que 10^{-5} , possuem o mesmo valor de função custo. Por exemplo, suponha que um indivíduo i forneça os valores de critérios $(2.10^{-6}, 14)$ e outro indivíduo j forneça os valores $(5.10^{-7}, 15)$. Embora nenhum domine o outro, é razoável pensar que a diferença entre eles quanto à norma ℓ_2 é numérica e, portanto, pode ser considerada a mesma para ambos. Assim, a dominância se basearia no outro critério e, portanto, o indivíduo i dominaria o indivíduo j .
- Com relação à etapa da variação, consideramos que 70% da população passa por um processo de recombinação e que 30% dela sofre mutação. A recombinação é feita, primeiramente, selecionando dois indivíduos i e j da população de recombinação de maneira aleatória. Em seguida, geramos um número inteiro aleatório I_r entre 1 e 204 (número total de elementos no vetor de indivíduos) que definirá a posição onde haverá a troca de informações. A posição I_r

do indivíduo i recebe o valor da posição I_r do indivíduo j e a posição I_r do indivíduo j recebe o valor da posição I_r do indivíduo i . Já na mutação, para cada indivíduo i da população de mutação, também geramos um número inteiro aleatório I_m entre 1 e 204 e mutamos o elemento da posição I_m segundo a relação $ind_m(I_m) = (1 + randn) * ind_m(I_m)$, onde $randn$ é um número aleatório obtido a partir da distribuição normal.

4.3. Experimento sem ruído aditivo

No primeiro experimento realizado neste estudo, consideramos um caso em que não há a adição de ruído após o processo de mistura dos sinais fonte. Assim, a mistura ocorre exatamente como descrito em (2). Após 3000 iterações do SPEA2, com uma população e conjunto externo de 200 e 80 indivíduos, respectivamente, as soluções Pareto-ótimas encontradas são apresentadas na Figura 4. Também destacamos na Figura 4 as soluções minimizadoras de cada um dos critérios e a solução Pareto-ótima que mais se aproxima dos sinais fonte. Esse nível da aproximação foi calculado através da razão sinal-interferência (SIR), definida como

$$SIR_i = 10 \log \left(\frac{E[s_i(t)^2]}{E[(s_i(t) - s_{est}(t))^2]} \right), \quad (8)$$

onde $s_{est}(t)$ é a estimativa do sinal de entrada $s_i(t)$. Claro que, na prática, não temos $s_i(t)$ para verificar a qualidade das estimativas. Assim, usamos a SIR neste experimento apenas como um índice de performance para avaliar as soluções obtidas.

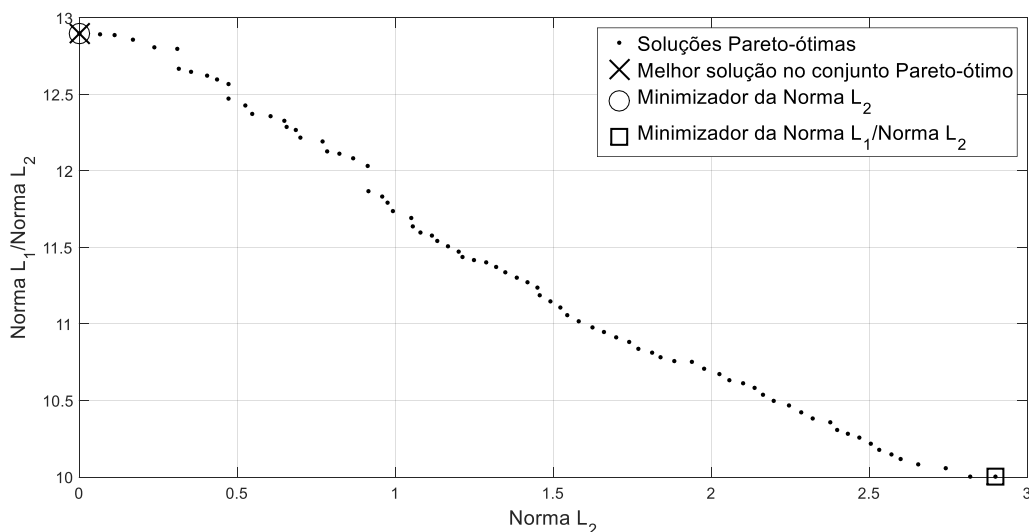


Figura 4: Soluções Pareto-ótimas sem ruído aditivo no processo de mistura.

Pode-se notar que a solução Pareto-ótima que mais se aproxima dos sinais fonte que queremos estimar coincide com a solução que minimiza a norma l_2 (com SIR = 44.3 dB). Isso já era esperado uma vez que não há ruído no processo de mistura e, então, uma solução que minimiza a norma l_1 mantendo a norma l_2 próxima de zero seria a situação ideal. A Figura 5 compara os sinais fonte com a melhor estimativa obtida.

4.4. Experimentos com ruído aditivo

Neste experimento, consideramos a inclusão de ruído após o processo de mistura. O nível de ruído adicionado, tendo como base a razão sinal-ruído (SNR³), foi de 25 dB. O processo de

³O SNR é dado por $SNR = 10 \log \sigma_s^2 / \sigma_r^2$, onde σ_s^2 é o potência do sinal e σ_r^2 é a potencia do ruído.

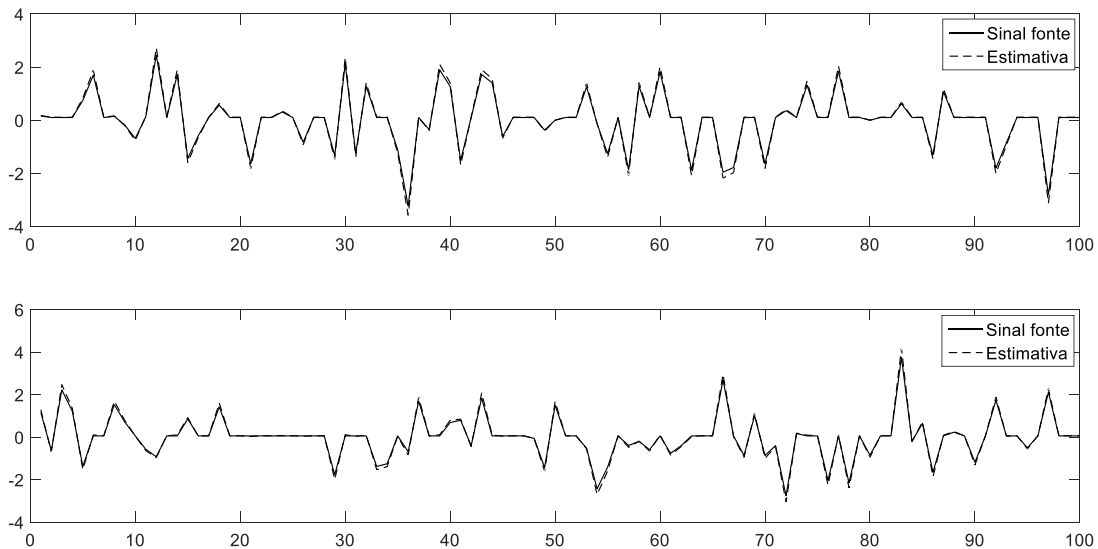


Figura 5: Comparação entre sinais fonte com estimativa, sem ruído no processo de mistura.

mistura, agora, dado por

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{r}, \tag{9}$$

onde \mathbf{r} representa o ruído Gaussiano incorporado ao modelo. Considerando os mesmos números de iterações, tamanho da população e conjunto externo, as soluções Pareto-ótimas obtidas são apresentadas na Figura 6. Aqui também destacamos as soluções minimizadoras de cada um dos critérios e a solução Pareto-ótima que mais se aproxima dos sinais fonte.

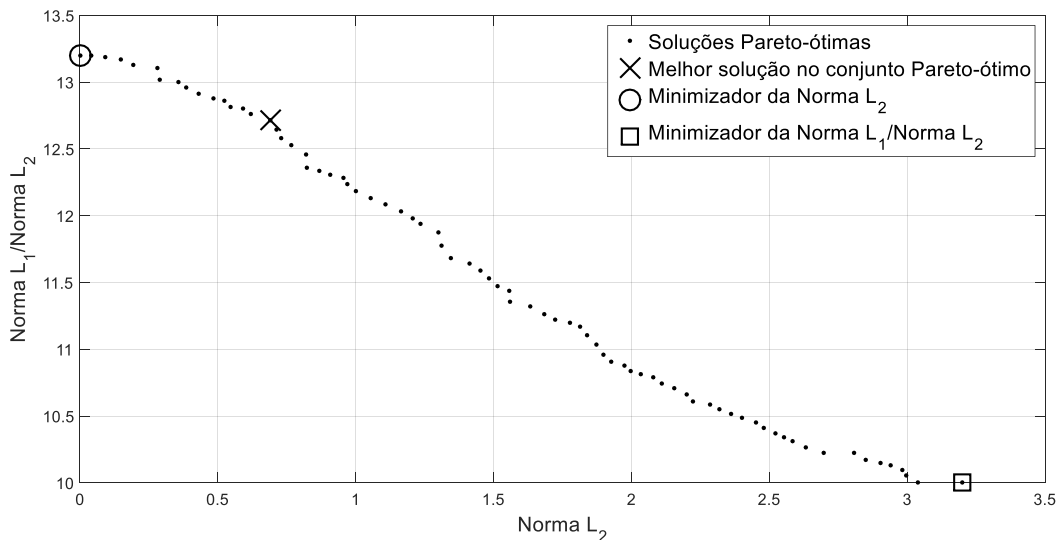


Figura 6: Soluções Pareto-ótimas com ruído aditivo no processo de mistura.

Diferente do resultado sem ruído aditivo, podemos notar neste experimento que a solução Pareto-ótima que mais se aproxima da solução ideal para o problema inverso em questão não está na fronteira, ou seja, não seria alcançada apenas pela otimização de um único critério. Uma solução com norma l_2 nula não é mais a ideal, já que a introdução de ruído impossibilita que o erro de

representação, considerando os resultados ideais, atinja um valor nulo. A Figura 7 compara os sinais fonte com a melhor estimativa obtida, com um SIR = 14.2 dB.

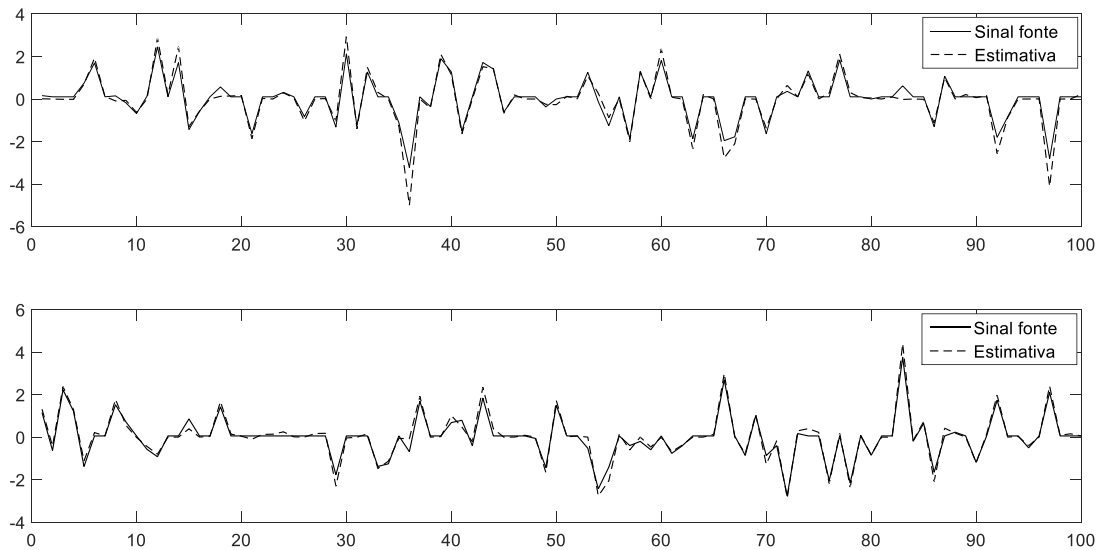


Figura 7: Comparação entre sinais fonte com estimativa, com ruído no processo de mistura.

Com o intuito de explorar mais a questão da incorporação de ruído no processo de mistura, realizamos um experimento comparando as melhores, médias e piores soluções Pareto-ótimas com as soluções que minimizam individualmente cada um dos critérios. Além disso, usamos como um limitante superior a solução de Wiener, definida por

$$\min_{\mathbf{s}} E[(\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{s})^2]. \quad (10)$$

Por ser um modelo supervisionado (a matriz \mathbf{A} é conhecida), a solução de Wiener apresenta um alto SIR. Os resultados obtidos para um intervalo de SNR = (0, 50) dB (tomando os valores médios após cinco simulações) são apresentados na Figura 8.

Como pode ser notado, na presença de ruído, as melhores soluções no conjunto Pareto-ótimo apresentam maiores valores de SIR quando comparadas às soluções minimizadoras dos critérios individuais. Ou seja, soluções obtidas a partir da otimização mono-objetivo de cada dos critérios não seriam tão boas quanto soluções obtidas através da abordagem multiobjetivo. Isso pode ser facilmente notado na Figura 8 para valores de SNR maiores que 10 dB.

5. Considerações finais

Muitos problemas encontrados na prática podem ser formulados como problemas inversos. Normalmente, estes são resolvidos a partir de modelos de otimização mono-objetivo. Este trabalho propôs tratar os problemas inversos a partir de uma abordagem multiobjetivo, ou seja, considerando a otimização simultânea de mais de um critério.

Os resultados alcançados dentro do contexto de processamentos de sinais confirmam a aplicabilidade do modelo proposto. Nos casos onde há ruído no processo de mistura, as melhores soluções encontradas não se encontram na fronteira do conjunto Pareto-ótimo, ou seja, não poderiam ser obtidas através da otimização de um critério individualmente. É evidente que, sendo o problema cego, não temos como comparar com o resultado ideal a fim de selecionar a melhor solução. No entanto, o fato desta abordagem gerar um conjunto de soluções, estas podem servir de

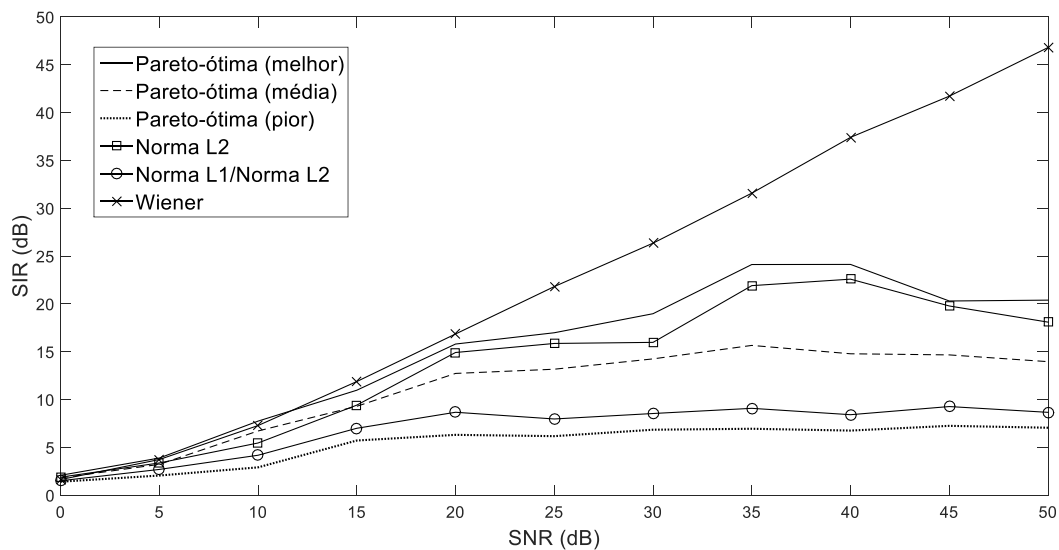


Figura 8: Comparação entre as soluções Pareto-ótimas, soluções que minimizam os critérios individualmente e solução de Wiener.

subsídio para que o especialista na tomada de decisão do problema em questão escolha a que mais lhe convém.

Como perspectivas futuras, desejamos aplicar o método em dados reais. Além disso, procuraremos explorar outros critérios de otimização, assim como diferente conjunto de dados.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP (Processos n. 2014/27108-9 e 2015/16325-1) e ao CNPq (Processo n. 311786/2014-6).

Referências

- Aster, R., Borchers, B., e Thurber, C. (2011). *Parameter estimation and inverse problems*. Academic Press.
- Comon, P. e Jutten, C. (2010). *Handbook of blind source separation: independent component analysis and applications*. Academic Press.
- Deb, K. (2001). *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. John Wiley & Sons.
- Duarte, L., Jutten, C., e Moussaoui, S. (2009). A Bayesian nonlinear source separation method for smart ion-selective electrode arrays. *IEEE Sensors Journal*, 9(12):1763–1771.
- Elad, M. (2010). *Sparse and redundant representations - from theory to applications in signal and image processing*. Springer.
- Hérault, J., Jutten, C., e Ans, B. (1985). Détection de grandeurs primitives dans un message composite par une architecture de calcul neuromimétique en apprentissage non supervisé. In *10^o Colloque sur le traitement du signal et des images, FRA, 1985*, volume 3, p. 1017–1022. GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images.
- Miettinen, K. M. (1999). *Nonlinear multiobjective optimization*. Kluwer Academic Publishers.

- Takahata, A. K., Nadalin, E. Z., Ferrari, R., Duarte, L. T., Suyama, R., Lopes, R. R., Romano, J. M. T., e Tygel, M. (2012). Unsupervised processing of geophysical signals: a review of some key aspects of blind deconvolution and blind source separation. *IEEE Signal Processing Magazine*, 29(4):27–35.
- Tarantola, A. (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. SIAM.
- Zitzler, E., Laumanns, M., e Thiele, L. (2001). SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm. Technical Report 103, Computer Engineering and Communication Networks Lab (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH).
- Zitzler, E. e Thiele, L. (1998). An evolutionary algorithm for multiobjective optimization: the strength Pareto approach. Technical Report 43, Computer Engineering and Communication Networks Lab (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH).