

## MODELO PARA LOCALIZAÇÃO DE HUBS COM HIERARQUIA LOCALMENTE INCLUSIVA EM REDES DE FLUXOS

**Guina Sotomayor Alzamora**

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)  
Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico, Rio de Janeiro, Brasil  
guinas@gmail.com

**Fernanda M P Raupp**

Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC)  
Avenida Getúlio Vargas 333, Quitandinha, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil  
fernanda@lncc.br

### RESUMO

O problema de localização de *hubs* visa encontrar pontos de concentração de fluxos numa rede, de modo que a soma das conexões compartilhadas entre os pontos da rede seja minimizada. Neste trabalho, um modelo matemático para o problema fundamental de localização de *hubs* com hierarquia e alocação simples numa rede de fluxos é apresentado. Ele integra decisões sobre localização de *hubs* regionais e centrais, tendo como novidade a introdução de hierarquia de serviços localmente inclusiva, visando a melhor exploração dos serviços dos hubs regionais. Experimentos computacionais com o modelo proposto são realizados para a instância do sistema de transporte aéreo americano, e seus resultados são comparados com os de um modelo que introduz hierarquia de serviços globalmente inclusiva, usando o solver CPLEX e um software com recursos gráficos de implementação própria. Resultados numéricos preliminares indicam o potencial do modelo aqui proposto.

**PALAVRAS CHAVE.** Problema de localização de *hubs*, Localização hierárquica, Hierarquia localmente inclusiva.

**Área Principal:** L&T – Logística e Transportes, PM – Programação Matemática

### ABSTRACT

The hub location problem aims to find points of concentration in a network flow so that the sum of the connections shared between the network points is minimized. In this work, we present a mathematical model for the fundamental location problem with hierarchy and simple allocation in a network flow. It integrates the decisions on locating regional and central hubs, and has as novelty the introduction of locally inclusive service hierarchy to better explore the services provided by regional hubs. Computational experiments with the proposed model are conducted for instance of the American air transportation system, and the results are compared with the ones given by a globally inclusive service hierarchy model, using the CPLEX solver and a own software implemented with graphical features. Preliminary numerical results show the potential of the model proposed here.

**KEYWORDS.** Hub location problem. Hierarchy location. Locally inclusive hierarchy.

**Main Area:** L & T – Logistics and Transport, MP – Mathematical Programming

## 1. Introdução

*Hubs* são concentradores de fluxos introduzidos em redes para reduzir o número de conexões entre nós origem e destino, quando comparados a uma rede sem *hubs*, [Farahani et al., 2013]. De fato, a introdução de *hubs* em uma rede permite consolidar fluxos, gerando um número menor de conexões, e conseqüentemente aumentando a eficiência da rede, uma vez que permite um decréscimo significativo de custos operacionais com a economia de escala gerada [An et al., 2015]. Ainda, pode-se pensar em introduzir concentradores que interagem numa configuração de mais de uma camada [Şahin e Süral, 2007], permitindo a hierarquização de suas funcionalidades. Cabe mencionar que o número de camadas não altera o número de conexões no uso de *hubs*.

Conhecido geralmente por problema de localização de *hubs*, o problema de desenho de rede de fluxos do tipo *hub-and-spoke* trata da localização de *hubs* e da alocação de nós da rede (*spokes*) aos *hubs*, de modo a satisfazer a demanda e otimizar um ou mais critérios [An et al., 2015]. As alocações podem ser do tipo simples ou múltipla; no caso de simples, os nós *spokes* são alocados a exatamente um único *hub*, enquanto que no caso de múltipla, os nós *spokes* podem ser alocados a mais de um *hub*.

Uma visão geral da pesquisa sobre o problema de localização de *hubs* é obtida com os trabalhos de [Alumur e Kara, 2008], [Campbell e O’Kelly, 2012] e [Farahani et al., 2013]. Nesse último, se faz uma revisão e classificação de modelos, de métodos de solução, de aplicações, assim como se esboça tendências futuras. Os trabalhos de [Farahani e Hekmatfar, 2009, Cap. 10], [Narula, 1986] e [Şahin e Süral, 2007] oferecem uma revisão sobre sistemas de localização hierárquica, descrevendo o problema como o de coordenação de decisões de localização de diferentes tipos de facilidades em sistemas multiníveis ou em camadas. Já [Calvo e Marks, 1987], [Mirchandani, 1987] e [Tien et al., 1983] introduzem o conceito de hierarquia localmente inclusiva.

Num problema de localização hierárquica em redes de fluxos, numa configuração básica, as demandas podem ser atendidas parcialmente por facilidades em diferentes camadas. A estrutura hierárquica possui geralmente padrão de fluxo único, encapsulado e coerente [Şahin e Süral, 2007]. Esses sistemas podem ter hierarquia sucessivamente inclusiva ou exclusiva. Numa hierarquia sucessivamente inclusiva, uma facilidade de maior nível oferece todos os serviços que podem ser encontrados em facilidades de hierarquia inferior, formando uma estrutura piramidal, isto é, uma facilidade de nível  $l$  oferece serviços do tipo 1 até  $l - 1$  e também serviços específicos de nível  $l$ . Caso contrário, se facilidades de cada nível provêm seus próprios serviços, e estes não são proporcionados por facilidades de outro nível, isto é, uma facilidade de nível  $l$  oferece serviços que não podem ser encontrados em qualquer outro nível, tem-se uma hierarquia sucessivamente exclusiva [Farahani e Hekmatfar, 2009, Cap. 10].

Segundo [Narula, 1984] e [Daskin, 1995] a hierarquia sucessivamente inclusiva pode ser globalmente inclusiva (também conhecida apenas por sucessivamente inclusiva) ou localmente inclusiva. Nesse último caso, em particular, cada facilidade do tipo  $l$  oferece serviços de nível 1 até  $l$  para pontos de demanda localizados em sua vizinhança, para os demais pontos de demanda esta facilidade oferece unicamente serviços de nível  $l$ . Aplicações deste tipo são encontradas majoritariamente em sistemas de saúde, como são os trabalhos de [Narula, 1986], [Galvão et al., 2002] e nos trabalhos já mencionados [Calvo e Marks, 1987], [Tien et al., 1983] e [Mirchandani, 1987].

Neste trabalho, o problema fundamental de localização de *hubs* com hierarquia localmente inclusiva e alocação simples em redes de fluxos é abordado, via apresentação de um modelo que integra as decisões de localização e alocação de *hubs* centrais e regionais. As conexões resultantes do tipo *spoke–hub* regional, *hub* regional–*hub* central e *hub* central–*hub* central irão determinar o tipo de serviço e/ou de atendimento em cada nó da rede.

Vale lembrar que no problema fundamental de localização de *hubs*, proposto originalmente por [Campbell, 1994], não se considera fluxos diretos, mas sim fluxos que passam por pelo menos um e no máximo dois *hubs*. Quando existem duas categorias de *hubs*, os fluxos devem passar por pelo menos um *hub* regional e no máximo por dois *hubs* centrais.

Aqui, redes de fluxos são sistemas de transporte aéreo, e fluxos são passageiros transportados entre os aeroportos dos sistemas. Assim, na tentativa de superar o desafio para melhor atender a demanda crescente por esses sistemas, e conseqüentemente melhorar os serviços nos aeroportos, propõe-se esta estratégia de localização de *hubs* com hierarquia localmente inclusiva.

A demanda por transporte aéreo no mundo superou a marca de 3,3 bilhões de passageiros em 2014, 5,5% a mais que no 2013 [ICAO, 2016]. Com este crescimento, a capacidade dos aeroportos pode ficar comprometida, assim como o planejamento de voos das companhias aéreas. Portanto, é razoável considerar a estratégia de inserção de *hubs* pelas companhias aéreas individualmente ou pelo responsável pela gerência de todo o sistema de transporte aéreo. Com a introdução de *hubs* centrais e regionais nesses sistemas, espera-se que aeroportos com baixo movimento de passageiros sejam conectados a aeroportos com maior movimento de passageiros, adequando o uso de aeronaves e consolidando fluxos de passageiros de forma eficiente de um modo geral.

Experimentos computacionais com o modelo integrado tendo como instância o sistema de transporte aéreo americano [O'Kelly, 1987] são apresentados. No problema abordado, são conhecidos as localizações geográficas (latitude e longitude) dos aeroportos, e conseqüentemente as distâncias entre os aeroportos, os fluxos de passageiros entre aeroportos e as quantidades de *hubs* regionais e centrais a serem localizados. A escolha do número de aeroportos candidatos a serem *hubs* regionais e centrais é feita baseada no fluxo mínimo de passageiros, de acordo com [Alzamora et al., 2013] e [Costa et al., 2010]. O modelo de programação inteira mista foi resolvido com o algoritmo de *branch-and-cut* do solver CPLEX, versão 12,4, do software AIMMS. Os resultados obtidos são visualizados com o auxílio de um software desenvolvido com recursos gráficos.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, é apresentado o modelo integrado proposto. Os experimentos numéricos realizados com o modelo integrado são apresentados na Seção 3. Finalmente, na Seção 4, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

## 2. Modelo integrado de localização hierárquica

Nesta seção, o problema fundamental de localização de *hubs* com hierarquia localmente inclusiva e alocação simples é abordado via a introdução de um modelo matemático que integra a localização de *hubs* regionais e centrais. Aqui, *hubs* regionais são usados para consolidação de fluxos menores, tendo por base o modelo da *p*-mediana em [Hakimi, 1964] e em [Kariv e Hakimi, 1979], enquanto que *hubs* centrais são usados para consolidação de fluxos maiores, tendo por base o modelo da *q*-hub mediana em [Campbell, 1994] e o modelo hierárquico proposto por [Yaman, 2009].

De fato, o modelo integrado aqui proposto difere do modelo que foi apresentado em [Alzamora e Raupp, 2015], no que se refere ao tipo de hierarquia sobre o uso dos serviços. Naquele trabalho, foi apresentado um modelo com hierarquia sucessivamente inclusiva, em que se observa que um nó *spoke* pode ser simultaneamente *hub* regional e central, sem precisar ter outro nó *spoke* dependente do seu serviço. Portanto, para melhor distribuir os serviços pelos *hubs*, apresenta-se um modelo com hierarquia localmente inclusiva, em que a localização de um *hub* regional deva estar associada ao atendimento da demanda de pelo menos um nó *spoke*, esperando que, com isto, o uso de *hubs* regionais seja melhor explorado.

O modelo integrado para a localização de *hubs* com hierarquia localmente inclusiva e alocação simples numa rede de fluxos é apresentado a seguir.

Sejam os parâmetros:  $N$  o conjunto de  $n$  nós ou pontos de uma rede de fluxos, e seus índices  $i, j, u, k, m \in N$ ;  $p$  o número de *hubs* regionais a serem localizados;  $q$  o número de *hubs* centrais a serem localizados;  $W_{ij}$  o fluxo entre os nós  $i$  e  $j$ ; e  $[d_{ij}]_{n \times n}$  a matriz simétrica das distâncias, em que cada elemento  $d_{ij}$  é a distância do nó  $i$  ao nó  $j$ . Considere ainda as variáveis de decisão:  $z_{iuk}$  que indica a alocação do nó *spoke*  $i$  ao *hub* regional  $u$  conectado ao *hub* central  $k$ ;  $x_{iuk}$  que representa a quantidade de fluxo com origem ou destino no nó  $i$ , que passa através do *hub* regional  $u$  conectado ao *hub* central  $k$ ; e  $y_{ijkm}$  que representa a fração do fluxo do nó origem  $i$  ao

nó destino  $j$  que passa pelos *hubs* centrais  $k$  e  $m$  nesta ordem, se  $k = m$ , então o fluxo passa por um único *hub* central. O modelo proposto é formulado como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (W_{ij} + W_{ji}) \sum_{u \in N} d_{iu} \sum_{k \in N} z_{iuk} \\ & + \sum_{i \in N} \sum_{u \in N} \sum_{k \in N} \alpha_R d_{uk} x_{iuk} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} \alpha_C W_{ij} d_{km} y_{ijkm} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{u \in N} \sum_{k \in N} z_{uuk} = p \quad (2)$$

$$\sum_{u \in N} \sum_{k \in N} z_{iuk} = 1 \quad i \in N \quad (3)$$

$$z_{iuk} \leq z_{uuk} \quad i, u, k \in N \quad (4)$$

$$\sum_{u \in N} z_{iuk} \leq z_{kkk} \quad i, k \in N \quad (5)$$

$$\sum_{k \in N} z_{kkk} = q \quad (6)$$

$$\sum_{j \in N} (W_{ij} + W_{ji})(z_{iuk} - z_{juk}) \leq x_{iuk} \quad i, u, k \in N \quad (7)$$

$$\sum_{i \in N} z_{iuk} \geq 2z_{uuk} \quad u, k \in N \quad (8)$$

$$\sum_{m \in N} y_{ijkm} = \sum_{u \in N} z_{iuk} \quad i, j, k \in N \quad (9)$$

$$\sum_{k \in N} y_{ijkm} = \sum_{u \in N} z_{jum} \quad i, j, m \in N \quad (10)$$

$$z_{iuk} \in \{0, 1\} \quad i, u, k \in N \quad (11)$$

$$x_{iuk} \geq 0 \quad i, u, k \in N \quad (12)$$

$$y_{ijkm} \geq 0 \quad i, j, k, m \in N, \quad (13)$$

onde  $\alpha_R$  e  $\alpha_C$  são interpretados como fatores de economia de escala associados à consolidação de fluxos com a introdução de *hubs* regionais e centrais, respectivamente. A função objetivo (1) a ser minimizada representa o fluxo total percorrido entre *spokes* e *hubs* regionais, entre *hubs* regionais e *hubs* centrais e entre *hubs* centrais. A restrição (2) garante que há exatamente  $p$  *hubs* regionais a serem localizados, já as restrições em (3) indicam que cada nó *spoke*  $i$  é alocado a exatamente um único *hub* regional  $u$  que por sua vez é alocado a um único *hub* central  $k$ . As restrições em (4) garantem que um nó *spoke*  $i$  é alocado a um *hub* regional  $u$  já localizado. As restrições em (5) garantem que um nó  $i$  (*spoke* ou *hub* regional) seja alocado a um *hub* central  $k$  já localizado. A restrição (6) garante que há exatamente  $q$  *hubs* centrais a serem localizados. As restrições em (7) dizem respeito ao fluxo entre os *hubs* regionais e centrais para cada *spoke*, representado por  $x_{iuk}$ . As restrições em (8) garantem que um *hub* regional possua pelo menos dois *spokes* em sua vizinhança alocados a ele. As restrições em (9) asseguram que um *hub* central  $k$  é factível, se um nó  $i$  é alocado a ele independentemente do destino; enquanto que por (10) assegura-se que um *hub* central  $m$  é factível, se um nó  $j$  é alocado a ele independentemente da origem. As restrições (11) definem  $z_{iuk}$  como variáveis de decisão de tipo binário, enquanto que as restrições (12) e (13) indicam que as variáveis de decisões  $x_{iuk}$  e  $y_{ijkm}$  são não negativas.

### 3. Experimentos computacionais

Nesta seção, são apresentados os experimentos computacionais com o modelo integrado (1)–(13) aqui proposto. Para tal, foi considerada a instância CAB15, encontrada em [O’Kelly, 1987],

Tabela 1: Coordenadas geográficas dos aeroportos de CAB15

Num.	Cidade	Latitude	Longitude
1	Atlanta	33,7426	-84,3564
2	Baltimore	39,2949	-76,6121
3	Boston	42,3747	-71,0521
4	Chicago	41,8971	-87,6297
5	Cincinnati	39,0991	-84,5124
6	Cleveland	41,5003	-81,6951
7	Dallas-Fort W.	32,7549	-97,3280
8	Denver	39,7388	-104,9855
9	Detroit	42,3321	-83,04586
10	Houston	29,7572	-95,3711
11	Kansas City	39,1024	-94,5774
12	Los Angeles	34,0754	-118,2406
13	Memphis	35,1491	-90,0483
14	Miami	25,7894	-80,2259
15	Minneapolis	44,9838	-93,2665

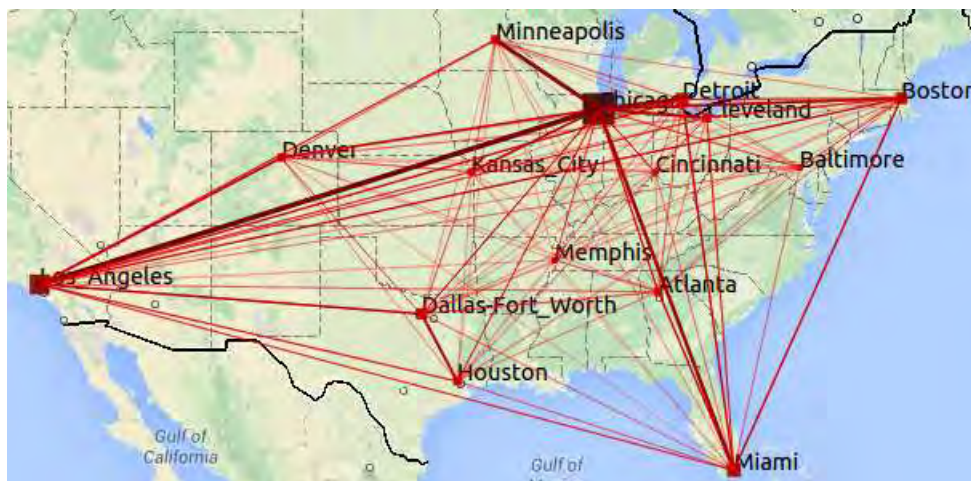


Figura 1: Fluxos diretos de passageiros em CAB15

que reúne 15 aeroportos do sistema de transporte aéreo dos Estados Unidos. Nesse sistema, são informados os nomes das cidades, e não os dos aeroportos, as coordenadas geográficas (latitude e longitude) de cada aeroporto, e os fluxos de passageiros existentes entre os aeroportos. Nesta instância, a matriz de fluxos é simétrica, ou seja, a quantidade de passageiros transportados é igual entre cada par de aeroportos ( $W_{ij} = W_{ji}$ ), existindo um total de 105 conexões distintas entre os aeroportos e de 210 fluxos entre os pares de aeroportos origem-destino.

A Tabela 1 apresenta as coordenadas geográficas dos aeroportos e a Figura 1 mostra os fluxos diretos entre os aeroportos de CAB15. Cabe informar que a cor vermelha possui tonalidade mais clara em conexões com fluxos de passageiros menores e tonalidade mais escura em conexões com fluxos maiores. Vale observar que quanto mais largo for o segmento de reta associado a uma conexão, maior é o fluxo de passageiros.

Para a instância CAB15 o modelo aqui proposto e o modelo em [Alzamora e Raupp, 2015] foram resolvidos com o software CPLEX, versão 12,4 do pacote AIMMS versão 12,1. O método de solução aplicado foi o algoritmo de *branch-and-cut*, que vem a ser o método de solução padrão do CPLEX para os problemas de programação inteira mista. O sistema de visualização gráfica foi im-

Tabela 2: Resultados da localização com hierarquia local e globalmente inclusiva para CAB15

tipo hierarquia (inclusiva)	$q$	$\alpha_R$	tempo (s)	função objetivo	<i>hubs</i> centrais	<i>hubs</i> regionais	<i>spokes</i>
localmente	2	0,8	179,88	2313664,216	4,11	1,4,7,8,9,11	2,3,5,6,10,12,13,14,15
		1,0	6503,99	2531872,824	4,11	1,4,7,8,9,11	2,3,5,6,10,12,13,14,15
	3	0,8	185,33	2215181,898	4,1,11	4,7,8,9,1,11	2,3,6,10,12,13,14,15,5
		1,0	571,26	2274497,110	4,7,8	4,7,8,9,1,5	2,3,6,10,12,13,14,15,11
globalmente	2	0,8	476,89	2277194,471	4,8	1,4,7,9,12,8	2,3,5,6,10,13,14,15,11
		1,0	1166,90	2504825,369	4,12	1,4,7,9,12,11	2,3,5,6,10,13,14,15,8
	3	0,8	429,36	2131081,838	4,12,11	1,4,7,9,12,11	2,3,5,6,10,13,14,15,8
		1,0	1049,08	2274597,110	4,12,11	1,4,7,9,12,11	2,3,5,6,10,13,14,15,8

plementado na linguagem C++, usando a ferramenta Qt para a interface gráfica sobre uma imagem do google maps. Além disso, os experimentos numéricos foram efetuados num computador Intel PC Celeron com 2,7GHz e 512MB RAM, sob o sistema operacional de 32 bits, Windows Vista.

Para os testes computacionais foram considerados:  $q = 2, 3$  (número de *hubs* centrais), baseado no critério do grau de concentração numa rede como em [Costa et al., 2010];  $p = 6$  (número de *hubs* regionais), de acordo com o critério de volume mínimo de fluxo de passageiros como em [Alzamora et al., 2013], isto é, a escolha do número de aeroportos é feita seguindo a ordem decrescente do volume correspondente de passageiros; o fator de economia de escala de *hubs* centrais é  $\alpha_C = 0,6$ , tal como fixado em [Figueiredo et al., 2014]; e finalmente o valor do fator de economia de escala dos *hubs* regionais foi fixado em  $\alpha_R = 0,8$ , cujos resultados foram comparados ao caso de não haver nenhuma economia de escala, com  $\alpha_R = 1,0$ .

A complexidade do modelo proposto para a instância CAB15, testada com  $N = 15$  aeroportos, foi de 137.438 restrições, 54.001 variáveis reais e 3.375 variáveis inteiras.

Na Tabela 2 são informados os tempos de execução em segundos, os valores ótimos da função objetivo, a localização dos *hubs* centrais e regionais e os *spokes* para a instância CAB15 do modelo integrado proposto, com hierarquia localmente inclusiva, e do modelo com hierarquia globalmente inclusiva, proposto por [Alzamora e Raupp, 2015]. Observe que os aeroportos estão codificados por números, tal como na Tabela 1.

Analisando os resultados da Tabela 2, verifica-se que, quando  $q = 2$ , Chicago foi eleito como *hub* central por ambos os modelos. O segundo *hub* central selecionado pelo modelo integrado proposto foi Kansas City para  $\alpha_R = 0,8; 1,0$ , enquanto que, para  $\alpha_R = 0,8$ , o modelo em [Alzamora e Raupp, 2015] selecionou Denver, e, para  $\alpha_R = 1,0$ , selecionou Los Angeles. Já quando  $q = 3$  tem-se Chicago, Kansas City e Atlanta, para  $\alpha_R = 0,8$ , e Chicago, Denver e Dallas-Forth Worth, para  $\alpha_R = 1,0$ , pelo modelo integrado proposto, enquanto que Chicago, Kansas City e Los Angeles foram escolhidos como *hubs* centrais por [Alzamora e Raupp, 2015], para  $\alpha_R = 0,8; 1,0$ . Também pode-se verificar que a localização de *hubs* regionais difere no modelo integrado proposto se  $q = 3$ , quando não aplicada a economia de escala nos *hubs* regionais ( $\alpha_R = 1,0$ ) e em [Alzamora e Raupp, 2015] se  $q = 2$ , quando aplicada a economia de escala ( $\alpha_R = 0,8$ ) nos *hubs* regionais.

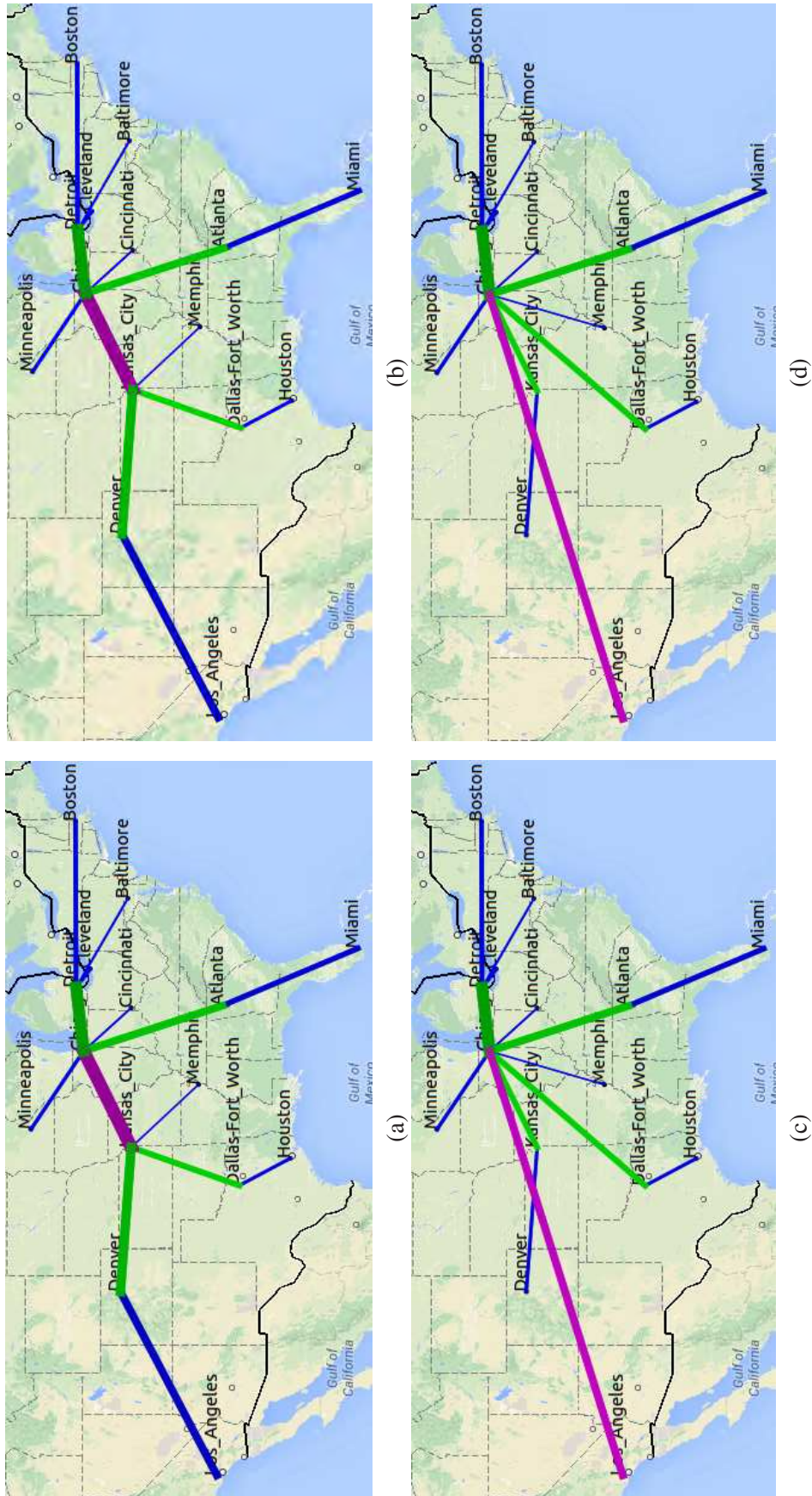


Figura 2: Resultado com 14 conexões visíveis para 6 hubs centrais para CAB15 do modelo integrado proposto com hierarquia localmente inclusiva para  $\alpha_R = 0, 8$  (a) e  $\alpha_R = 1, 0$  (b) e de [Alzamora e Raupp, 2015] com hierarquia globalmente inclusiva para  $\alpha_R = 0, 8$  (c) e  $\alpha_R = 1, 0$  (d).

Na Figura 2 são apresentados os fluxos consolidados em 14 conexões, contra 105 conexões iniciais, após a localização de 6 *hubs* regionais e 2 *hubs* centrais pelo modelo integrado proposto, com hierarquia localmente inclusiva, Figuras 2(a) e 2(b), e pelo modelo com hierarquia globalmente inclusiva de [Alzamora e Raupp, 2015], Figuras 2(c) e 2(d), para a instância CAB15. Observe que, ao se considerar economia de escala com a introdução de *hubs* regionais ( $\alpha_R = 0,8$ ), a localização desses *hubs* se altera de modo a considerar o tipo de hierarquia além dos aeroportos de maior fluxo, Figuras 2(a) e 2(c), quando comparado ao caso sem economia de escala ( $\alpha_R = 1,0$ ), Figuras 2(b) e 2(d).

Os segmentos de reta azuis mostram as conexões entre os aeroportos *spokes* e os aeroportos que servem de *hubs* regionais, os segmentos de reta verdes mostram os aeroportos que são *hubs* regionais alocados aos aeroportos que são *hubs* centrais, e os segmentos de reta em lilás mostram as interconexões entre os aeroportos que servem de *hubs* centrais. Vale observar que, quanto mais largo for o segmento de reta de uma conexão, maior é o seu fluxo de passageiros.

De maneira similar, na Figura 3 são apresentados os fluxos consolidados em 14 conexões, contra 105 conexões iniciais, após a localização de 6 *hubs* regionais e 3 *hubs* centrais pelo modelo integrado proposto, com hierarquia localmente inclusiva, Figuras 3(a) e 3(b), e pelo modelo com hierarquia globalmente inclusiva de [Alzamora e Raupp, 2015], Figuras 3(c) e 3(d), para a instância CAB15. Observe que, ao se considerar economia de escala com a introdução de *hubs* regionais ( $\alpha_R = 0,8$ ), a localização desses *hubs* se altera de modo a considerar o tipo de hierarquia além dos aeroportos de maior fluxo, Figuras 3(a) e 3(c), quando comparado ao caso sem economia de escala ( $\alpha_R = 1,0$ ), Figuras 3(b) e 3(d).



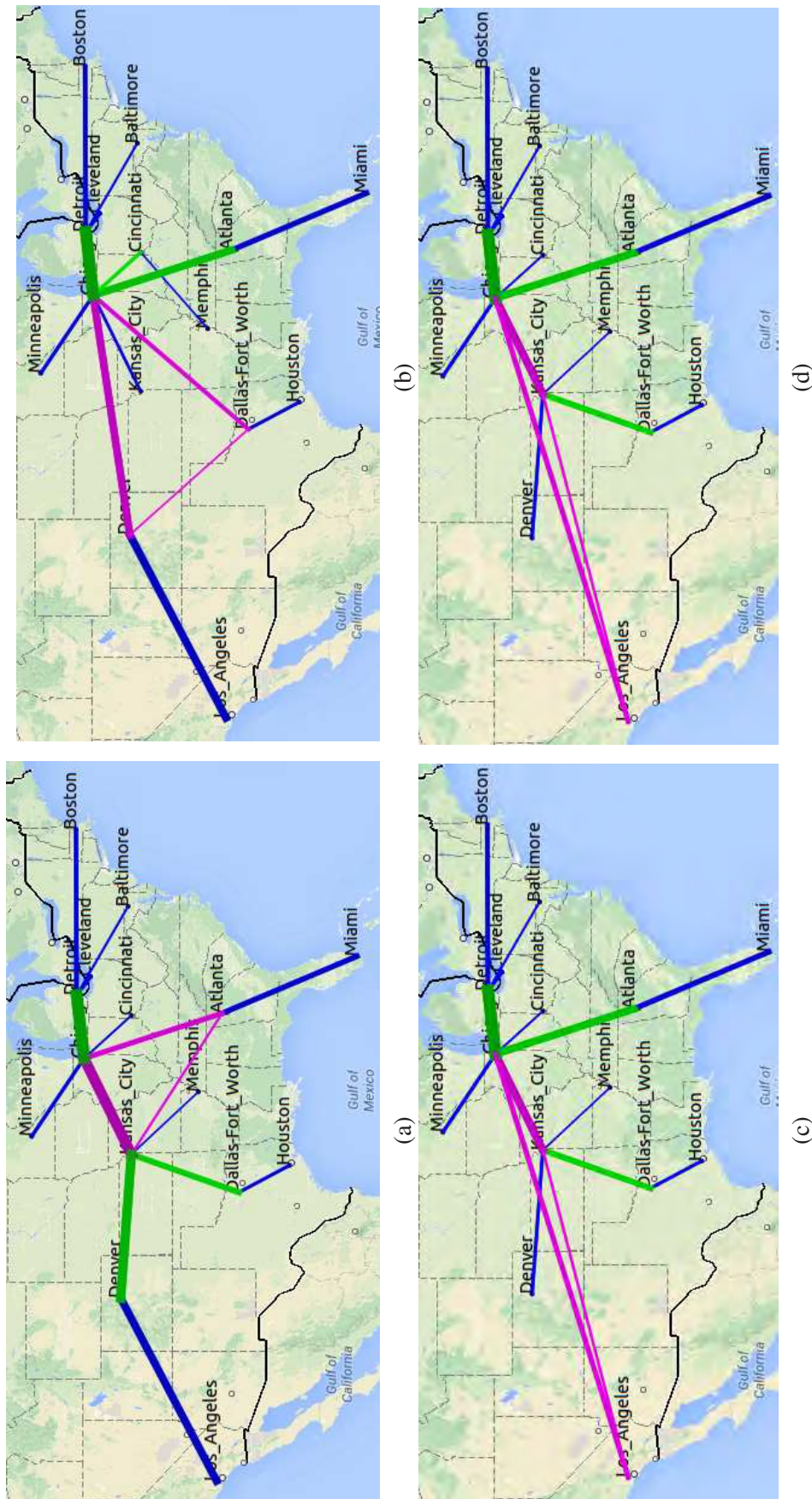


Figura 3: Resultado com 14 conexões visíveis para 6 *hubs* regionais e 3 *hubs* centrais para CAB15 do modelo integrado com hierarquia localmente inclusiva para  $\alpha_R = 0, 8$  (a) e  $\alpha_R = 1, 0$  (b) e de [Alzamora e Raupp, 2015] com hierarquia globalmente inclusiva para  $\alpha_R = 0, 8$  (c) e  $\alpha_R = 1, 0$  (d).

Analisando os resultados dos experimentos computacionais realizados com CAB15 observa-se que os *hubs* centrais possuem uma abrangência maior de *hubs* regionais e nós *spokes*, gerando uma distribuição espacial mais equilibrada. Assim, a diferença principal do resultado do modelo proposto está na distribuição do atendimento das demandas entre os *hubs* centrais e regionais, com destaque para a descentralização dos serviços.

Para 2 ou 3 *hubs* centrais, obtém-se como resultado 14 conexões no sistema de transporte aéreo, ao invés de 105 conexões iniciais. Ou seja, a localização de *hubs* sobre a rede completa inicial decrementa o número de conexões, com apenas 28 fluxos de ida-e-volta entre os pares de aeroportos do sistema considerado.

Embora os resultados do modelo proposto sejam promissores, quando comparados ao sistema CAB15 sem inserção de *hubs*, a hierarquia localmente inclusiva pode fazer com que os percursos dos fluxos aumente ligeiramente, quando comparada à hierarquia globalmente inclusiva do modelo em [Alzamora e Raupp, 2015]. Porém, a hierarquia localmente inclusiva explora melhor o uso de serviços de *hubs* regionais por aeroportos *spokes* vizinhos, uma vez que na hierarquia globalmente inclusiva um *hub* regional pode ser apenas um aeroporto *spoke*, sem necessidade de ter uma funcionalidade específica.

#### 4. Conclusões

Neste trabalho, propõe-se um modelo de otimização para o problema fundamental de localização de *hubs* centrais e regionais com hierarquia localmente inclusiva e alocação simples numa rede de fluxos. Ainda, aplica-se um software gráfico de implementação própria para visualizar dados e resultados dos experimentos computacionais realizados com o modelo proposto.

Os resultados numéricos obtidos para uma instância de sistemas de transporte aéreo mostra que o modelo proposto é promissor em otimizar conexões de fluxos de passageiros mediante a introdução de *hubs* regionais, para consolidar fluxos menos densos, e de *hubs* centrais, para consolidar fluxos mais densos, explorando em particular os serviços de *hubs* regionais.

Mesmo que alguns fluxos apresentem percursos maiores ao serem forçados a passar por *hubs*, existe compensação com a consolidação de todos os fluxos, proporcionando ganho em escala. Além disso, quando se impõe uma hierarquia sobre os *hubs*, é possível tratar suas operações em camadas de maior ou menor importância, sendo que o número de conexões não muda mesmo usando hierarquia localmente inclusiva.

A localização de *hubs* com hierarquia localmente inclusiva permite a melhor exploração do uso de *hubs* regionais, embora nem sempre permita a redução do volume máximo de fluxos em *hubs* centrais, o qual representa a soma dos fluxos que têm como origem ou destino um *hub* central. Em contrapartida, esse tipo de hierarquia pode gerar caminhos com mais escalas, tais como: *spoke* - *hub* regional - *hub* central - *hub* central - *hub* regional - *spoke*.

Como trabalhos futuros, pretende-se considerar a alocação múltipla, tanto para hierarquia localmente inclusiva e globalmente inclusiva, assim como novos critérios para a localização hierárquica de *hubs*, e ainda desenvolver um método heurístico para resolver estes problemas em instâncias de médio e grande porte com resultados aproximados em tempos razoáveis.

#### Referências

- Alumur, S. e Kara, B. Y. (2008). Network hub location problems: The state of the art. *European Journal of Operational Research*, 190(1):1–21.
- Alzamora, G. S. e Raupp, F. M. P. (2015). Modelo integrado para localização hierárquica de *hubs* em redes de fluxos. In *Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha (SPOLM)*, RJ.
- Alzamora, G. S., Raupp, F. M. P., e Pizzolato, N. D. (2013). Estratégia de localização de *hubs* no transporte aéreo brasileiro. In *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO)*, Natal, RN.
- An, Y., Zhang, Y., e Zeng, B. (2015). The reliable hub-and-spoke design problem: Models and algorithms. *Transportation Research Part B: Methodological*, 77:103–122.

- Calvo, A. B. e Marks, D. H. (1987). Location of health care facilities: an analytic approach. *Socio-Economic Planning Science*, 7:407–422.
- Campbell, J. F. (1994). Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72:387–405.
- Campbell, J. F. e O’Kelly, M. E. (2012). Twenty-five years of hub location research. *Transportation Science*, 46:153–169.
- Costa, T. F. G., Lohmann, G., e Oliveira, A. V. M. (2010). A model to identify airport hubs and their importance to tourism in Brazil. *Research in Transportation Economics*, pages 3–11.
- Şahin, G. e Süral, H. (2007). A review of hierarchical facility location models. *Computers & Operations Research*, 34(8):2310–2331.
- Daskin, M. S., editor (1995). *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications*. Springer Series in Operations Research. John Wiley and Sons, New York.
- Farahani, R. Z. e Hekmatfar, M., editors (2009). *Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies: Contributions to Management Science*. Physica-Verlag Heidelberg.
- Farahani, R. Z., Hekmatfar, M., Arabani, A. B., e Nikbakhsh, E. (2013). Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques and applications. *Computers & Industrial Engineering*, 64:1096–1109.
- Figueiredo, R. M. A., O’Kelly, M. E., e Pizzolato, N. D. (2014). A two stage hub location model for air transportation on Brazil. *International Transactions in Operational Research (ITOR)*, 21:275–289.
- Galvão, R. D., Espejo, L. G., e Boffey, B. (2002). A hierarchical model for the location of perinatal facilities in the municipality of Rio de Janeiro. *European Journal of Operational Research*, 138:495–517.
- Hakimi, S. L. (1964). Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations Research*, 12:450–459.
- ICAO (2016). Annual report of the council 2014. Internet. <http://www.icao.int/annual-report-2014/Pages/default.aspx>.
- Kariv, O. e Hakimi, S. L. (1979). An algorithmic approach to network location problems. II: The  $p$ -medians. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 37:539–560.
- Mirchandani, P. B. (1987). Generalized hierarchical facility locations. *Transportation Science*, 21:123–125.
- Narula, S. C. (1984). Hierarchical location-allocation problems: A classification scheme. *European Journal of Operational Research*, 15:93–99.
- Narula, S. C. (1986). Minisum hierarchical location-allocation problems on a network: A survey. *Annals of Operations Research*, 6:257–272.
- O’Kelly, M. E. (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 32(3):393–404.
- Tien, J. M., El-Tell, K., e Simons, G. R. (1983). Improved formulations to the hierarchical health facility location-allocation problem. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 13:1128–1132.
- Yaman, H. (2009). The hierarchical hub median problem with single assignment. *Transportation Research Part B*, 43:643–658.