Avaliação de eficiência com DEA - Fundamentos matemáticos e modelagem de aplicações.

João Carlos Soares de Mello
Lidia Angulo-Meza

Vitória-ES
XLVIII SBPO
Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional

Agenda

- Noções fundamentais
- Modelos matemáticos
- Propriedades
- Introdução aos modelos avançados
- Uso de software
- Modelagem de problemas

Data Envelopment Analysis

- Avaliação de desempenho de unidades produtivas que transformam recursos em produtos
- Medidas de desempenho
  - Eficácia $\rightarrow$ capacidade de a unidade produtiva atingir a produção que tinha como meta
  - Produtividade $\rightarrow$ quociente entre o que foi produzido (*output*) e o que foi gasto para produzir (*input*)

$$\text{Produtividade} = \frac{\textit{saída}}{\textit{entrada}}$$

Data Envelopment Analysis

- Produtividade
  - Quando há múltiplas variáveis, há necessidade de agregá-las em índices únicos

$$P = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_s y_s}{b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_r x_r}$$

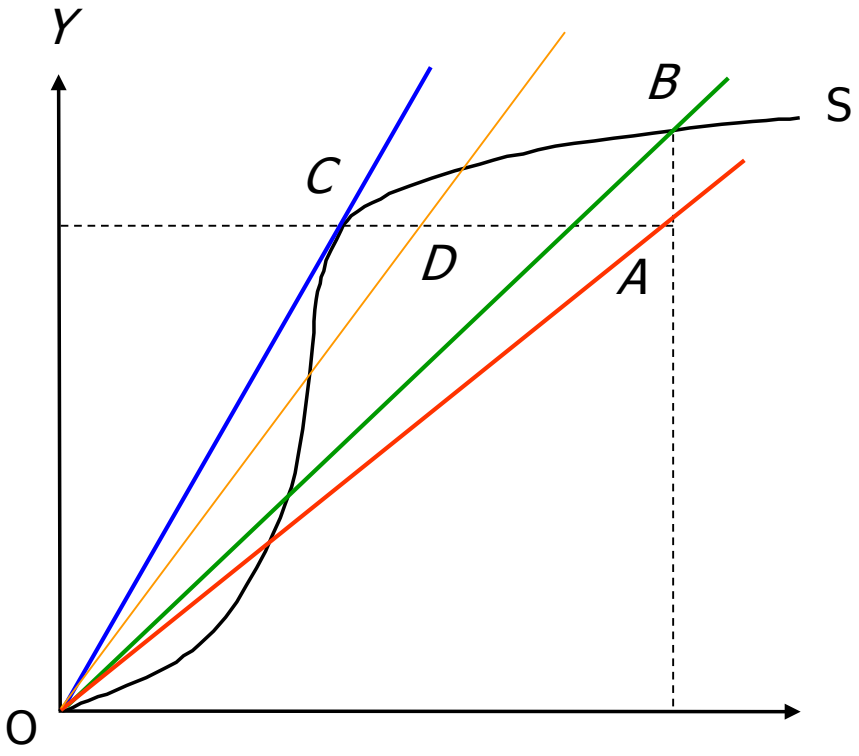
  - a_i e b_j são coeficientes de escala
  - Podem ser fixos ou pré-determinados, monetários ou não monetários

Data Envelopment Analysis

- **Eficiência**
  - Conceito relativo
  - Comparação entre o que foi realizado (produzido/gasto) e o que poderia ter sido realizado por uma unidade de referência

- Formas de determinar a eficiência: métodos paramétricos (regressão, uma função para a fronteira de produção) e não paramétricos (DEA clássico)
- Medida de excelência: não existem "outliers"

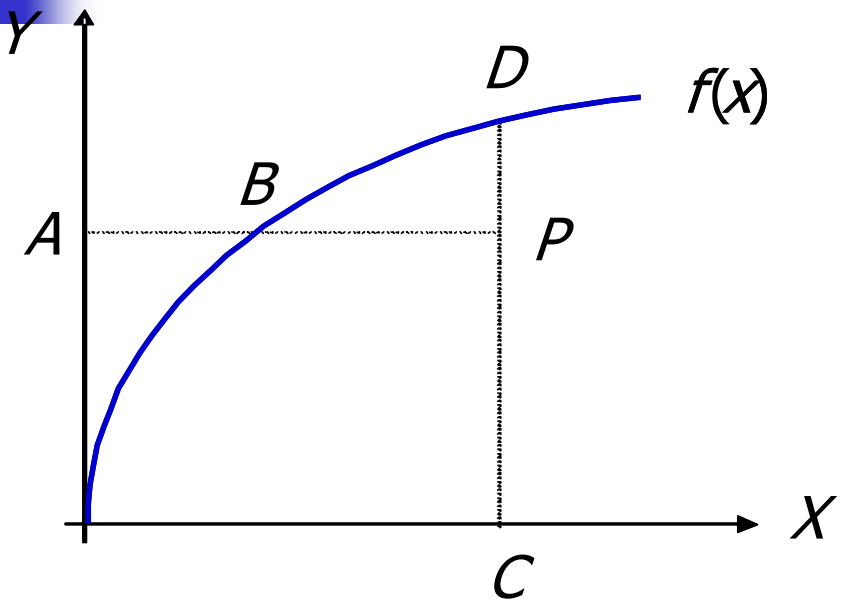
Produtividade x Eficiência



Produtividade = Y/X

- $A \rightarrow$ ineficiente
- $C \rightarrow$ tecnicamente eficiente e de maior produtividade $\rightarrow$ Produtividade = dY/dX
- $B \rightarrow$ eficiente, mas não é mais produtiva
- $D \rightarrow$ mais produtiva que B, mas não é eficiente

Orientação a recursos



- Em quanto os recursos podem ser reduzidos sem alterar a produção
- Eficiência técnica = AB/AP

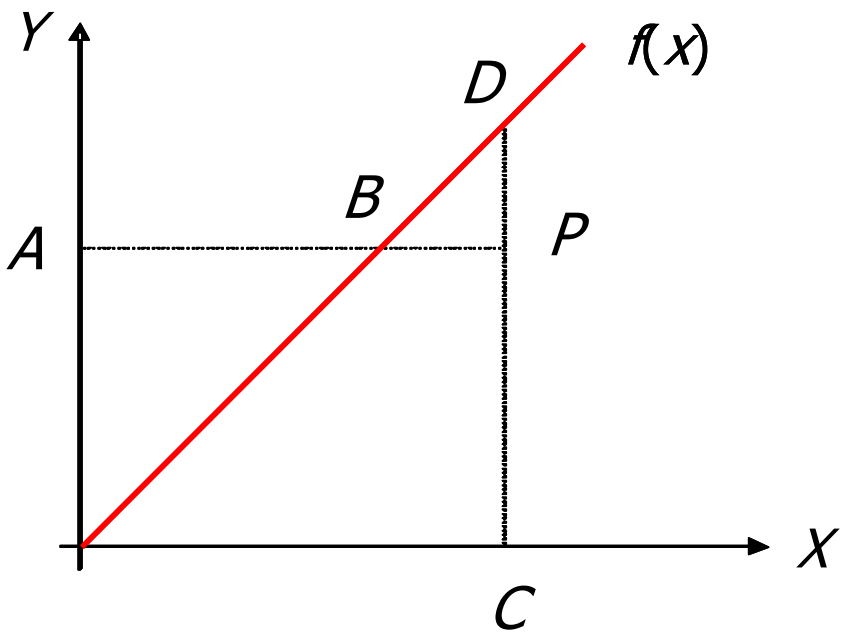
$$P(X_P, Y_P)$$

$$B(X_B, Y_B) \rightarrow X_B = \mathrm{h} X_P$$

$$A(0, Y_P)$$

$$\mathrm{h} = X_B / X_P = AB/AP$$

Orientação a produtos



- Em quanto os produtos podem ser aumentados sem alterar os recursos
- Eficiência técnica = *CP*/*CD*
- Equivalente à anterior somente sob certas condições

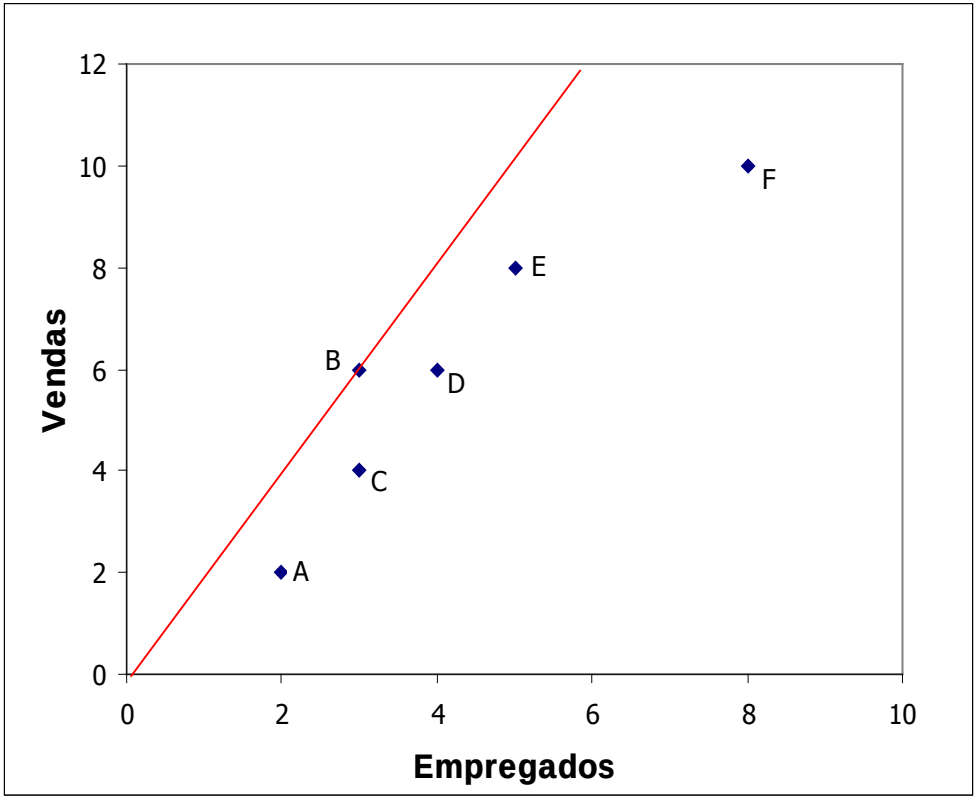
Produtividade x Eficiência

Exemplo:

- Produtividade: Vendas/Empregados

Loja	A	B	C	D	E	F
Empregados	2	3	3	4	5	8
Vendas (R$100.000)	2	6	4	6	8	10
Produtividade	1	2	1,33333	1,5	1,6	1,25

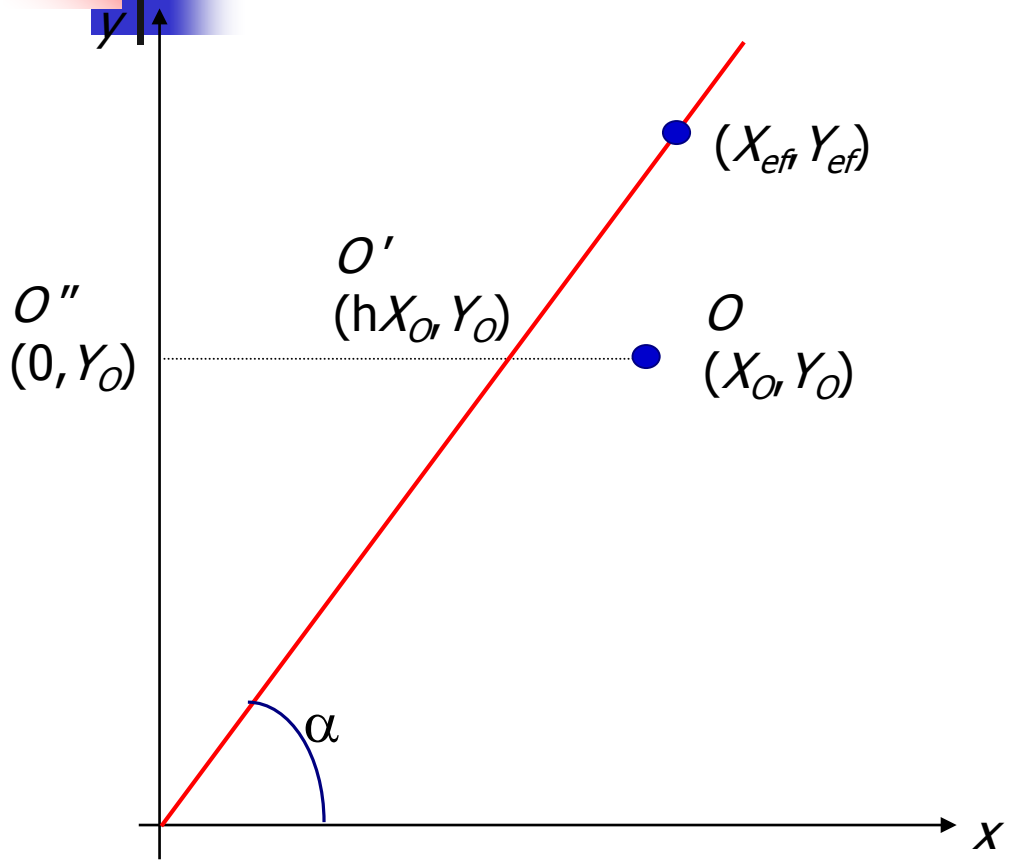
Produtividade x Eficiência



- B eficiente, as outras ineficientes

Loja	A	B	C	D	E	F
Eficiência	0,5	1	0,667	0,75	0,8	0,625

1 *input*, 1 *output*



- $Y_{ef} = a\, X_{ef} \Rightarrow a = Y_{ef}/X_{ef}$
- a → produtividade da unidade eficiente = tg α
- Eficiência → produtividade de uma unidade comparada a de com uma unidade eficiente
- Modelo CCR do envelope orientado a *input*

$$Ef = \frac{\overline{O'O''}}{\overline{O''O}} = \frac{X_{ef}}{X_O} = \frac{Y_O / a}{X_O} = \frac{Y_O}{X_O}\frac{1}{a} = \frac{P_O}{P_{ef}}$$

Multidimensional

- PPL

$$\text{Max} \frac{u_{1o}Y_{1o} + u_{2o}Y_{2o} + \ldots + u_{jo}Y_{jo}}{v_{1o}X_{1o} + v_{2o}X_{2o} + \ldots + v_{io}X_{io}}$$

sujeito a

$$\frac{u_{1o}Y_{1j} + u_{2o}Y_{2j} + \ldots + u_{jo}Y_{jk}}{v_{1o}X_{1j} + v_{2o}X_{2j} + \ldots + v_{io}X_{ik}} \leq 1, \quad k = 1 \ldots n$$

$$u_j, v_i \geq 0, \quad i = 1 \ldots r, \quad j = 1 \ldots s$$

- Função objetivo segue o conceito de Farrell
- Restrições garantem que é uma eficiência
- Será a mesma eficiência anterior?

Interpretação do modelo

- Charnes, Cooper e Rhodes, 1978
- Eficiência relativa é o quociente entre soma ponderada dos *outputs* e soma ponderada dos *inputs*

$$Eficiência_{DMU_k} = \frac{\sum_j u_j y_{jk}}{\sum_i v_i x_{ik}} \quad \begin{matrix} \leftarrow \textit{output} \text{ virtual} \\ \leftarrow \textit{input} \text{ virtual} \end{matrix}$$

- Pesos são dados por um PPL de forma mais benevolente para cada DMU
- Modelo com proporcionalidade $\rightarrow$ alteração em uma variável produz alteração proporcional em outra variável

Caso particular: 1 *input*, 1 *output*

- PPNL

$$\text{Max} \frac{uY_O}{vX_O}$$

sujeito a

$$\frac{uY_k}{vX_k} \leq 1$$

- Para calcular u/v

$$\frac{uY_{ef}}{vX_{ef}} = 1$$

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{Y_{ef} / X_{ef}} = \frac{1}{P_{ef}}$$

$$Ef = \frac{P_O}{P_{ef}}$$

- Neste caso particular as duas eficiências coincidem
- Demonstração geral usa dualidade

Modelo CCR

$$\text{Max } Eff_0 = \left(\frac{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{j0}}{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{i0}} \right)$$

sujeito a

$$\frac{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk}}{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik}} \leq 1, \quad k = 1,\ldots,n$$

$$u_j, v_i \geq 0, \quad \forall\ j,i$$

- Problema de programação fracionária
- Calcula os pesos para os *inputs* e *outputs* (v_i e u_j)
- Unidade 0 $\rightarrow$ unidade em análise
- Problema tem múltiplas soluções ótimas $\rightarrow$ linearização

Modelo DEA CCR

$$\text{Max} \quad Eff_0 = \sum_{j=1}^{s} u_j y_{j0}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{r} v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$$

$$u_j, v_i \geq 0, \forall\ j,i$$

- Problema de Programação Linear
- Modelo dos multiplicadores (determina conjunto de pesos e eficiência)
- DMU é CCR eficiente se $Eff^* = 1$ e existe uma solução ótima com v^* e $u^* > 0$

Exemplo

DMU	*Input* 1	*Input* 2	*Output*
A	4	3	2
B	1	6	5
C	2	3	4
D	1	2	1
E	10	5	8
F	12	5	8

Exemplo

Max $Eff_A = 2\,u_1$

sujeito a

$$4v_1 + 3v_2 = 1$$
$$2u_1 - 4v_1 - 3v_2 \le 0$$
$$5u_1 - 1v_1 - 6v_2 \le 0$$
$$4u_1 - 2v_1 - 3v_2 \le 0$$
$$1u_1 - 1v_1 - 2v_2 \le 0$$
$$8u_1 - 10v_1 - 5v_2 \le 0$$
$$8u_1 - 12v_1 - 5v_2 \le 0$$
$$u_1, v_1, v_2 \ge 0$$

Max $Eff_B = 5\,u_1$

sujeito a

$$1v_1 + 6v_2 = 1$$
$$2u_1 - 4v_1 - 3v_2 \le 0$$
$$5u_1 - 1v_1 - 6v_2 \le 0$$
$$4u_1 - 2v_1 - 3v_2 \le 0$$
$$1u_1 - 1v_1 - 2v_2 \le 0$$
$$8u_1 - 10v_1 - 5v_2 \le 0$$
$$8u_1 - 12v_1 - 5v_2 \le 0$$
$$u_1, v_1, v_2 \ge 0$$

Exemplo

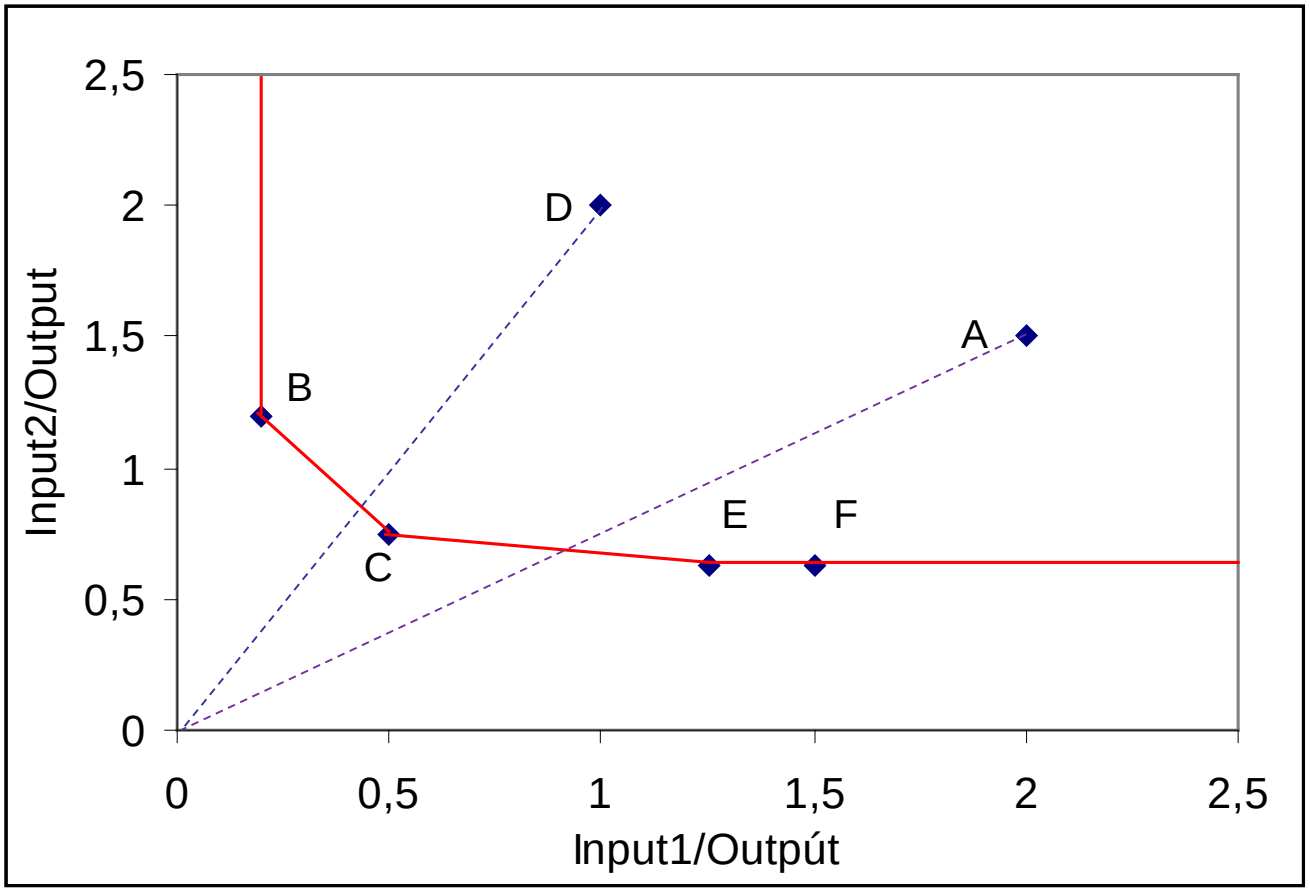
	Pesos			
DMU	*Input* 1	*Input* 2	*Output*	Eficiência (%)
A	0,045	0,273	0,227	45,45
B	0,200	0,133	0,200	100,00
C	0,050	0,300	0,250	100,00
D	0,429	0,286	0,429	42,85
E	0,025	0,150	0,125	100,00
F	0,000	0,200	0,125	100,00

Exemplo: invariância com escala

DMU	*Input* 1	*Input* 2	*Output*
A	40	3	2
B	10	6	5
C	20	3	4
D	10	2	1
E	100	5	8
F	120	5	8

	Pesos			
DMU	*Input* 1	*Input* 2	*Output*	Eficiência (%)
A	0,0045	0,273	0,227	45,45
B	0,0200	0,133	0,200	100,00
C	0,0050	0,300	0,250	100,00
D	0,0429	0,286	0,429	42,85
E	0,0025	0,150	0,125	100,00
F	0,0000	0,200	0,125	100,00

Representação gráfica



A e D ineficientes; B, C e E eficientes;
F parece eficiente, mas menos eficiente que E;
só consegue eficiência com um peso zero

Análise de resultados

- B, C e E Pareto eficientes
- F fracamente eficiente ou não Pareto eficiente
- Qualquer DMU em região da fronteira paralela aos eixos tem a mesma designação
- B e E admitem outro esquema de pesos
  - DMU E: 0 para o *input* 1 e 0,2 para o *input* 2
- Propriedade é válida para todos os vértices da fronteira, chamados de DMUs extremo eficientes

Modelo do Envelope

- Baseado na redução do *input*, como visto anteriormente
- Caso haja mais de um *input*, aplica-se a redução de Debreu, ou seja, redução equiproporcional
- Admite-se que se é possível produzir de forma eficiente também é possível produzir de forma ineficiente (aumento de *inputs* ou redução de *outputs*)
- Admite-se que não há restrição quanto à escala de operação (raio ilimitado)

Modelo do Envelope

- Se é possível produzir de forma eficiente um vetor *Y* de *outputs* com um vetor *X* de *inputs*, então é possível produzir de forma eficiente um vetor *kY* de *outputs* com um vetor *kX* de *inputs*
- Se é possível produzir de forma eficiente um vetor *Y*1 e *Y*2 de *outputs* com, respectivamente, vetores *X*1 e *X*2 de *inputs*, é possível produzir de forma eficiente $Y = Y1 + Y2$ *outputs* com $X = X1 + X2$ *inputs*
- A combinação linear de um conjunto de DMUs viáveis é uma DMU viável

Modelo do Envelope: orientação a *inputs*

Min h

sujeito a

$$h\overline{X}_o \geq \lambda_1 \overline{X}_1 + \lambda_2 \overline{X}_2 + \ldots + \lambda_k \overline{X}_k + \ldots + \lambda_n \overline{X}_n$$

$$\overline{Y}_o \leq \lambda_1 \overline{Y}_1 + \lambda_2 \overline{Y}_2 + \ldots + \lambda_k \overline{Y}_k + \ldots + \lambda_n \overline{Y}_n$$

$$\lambda_k \geq 0$$

- h é a eficiência - Será a mesma do modelo dos multiplicadores?
- Quanto menor h, mais distante a DMU está da fronteira
- $1/h$ é um indicativo da distância da DMU da fronteira, chamada distância de Shephard (apesar de não ser uma métrica)

Exemplo

DMU	*Input* 1	*Input* 2	*Output*
A	4	3	2
B	1	6	5
C	2	3	4
D	1	2	1
E	10	5	8
F	12	5	8

Exemplo

Min h_A

sujeito a

$$4h_A \geq 4\lambda_A + \lambda_B + 2\lambda_C + \lambda_D + 10\lambda_E + 12\lambda_F$$

$$3h_A \geq 3\lambda_A + 6\lambda_B + 3\lambda_C + 2\lambda_D + 5\lambda_E + 5\lambda_F$$

$$2 \leq 2\lambda_A + 5\lambda_B + 4\lambda_C + \lambda_D + 8\lambda_E + 8\lambda_F$$

$$\lambda_i \geq 0$$

Exemplo

DMUs	Eficiência *h*	λ_A	λ_B	λ_C	λ_D	λ_E	λ_F	Folga
A	0,4545	0	0	0,2273	0	0,1364	0	S_2=2

- DMU A é ineficiente; alvo é uma combinação linear das DMUs C e E que são os seus *benchmarks*
- Soma dos lambdas pode não ser igual a 1

Dualidade

Max $Eff_A = 2u_1$

sujeito a

$4v_1 + 3v_2 = 1$

$2u_1 - 4v_1 - 3v_2 \leq 0$

$5u_1 - 1v_1 - 6v_2 \leq 0$

$4u_1 - 2v_1 - 3v_2 \leq 0$

$1u_1 - 1v_1 - 2v_2 \leq 0$

$8u_1 - 10v_1 - 5v_2 \leq 0$

$8u_1 - 12v_1 - 5v_2 \leq 0$

$u_1, v_1, v_2 \geq 0$

Min h_A

sujeito a

$4h_A - 4\lambda_A - \lambda_B - 2\lambda_C - \lambda_D - 10\lambda_E - 12\lambda_F \geq 0$

$3h_A - 3\lambda_A - 6\lambda_B - 3\lambda_C - 2\lambda_D - 5\lambda_E - 5\lambda_F \geq 0$

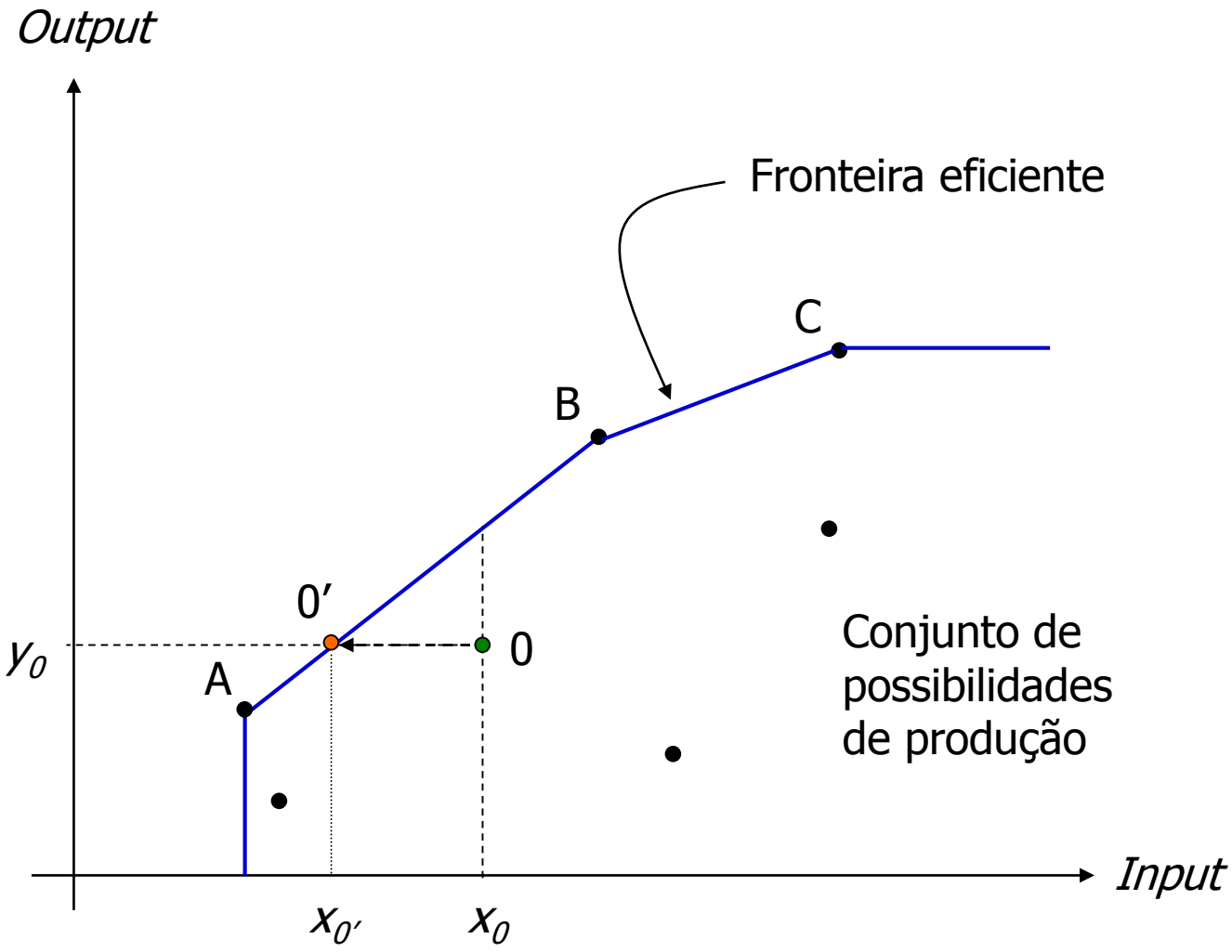
$2\lambda_A + 5\lambda_B + 4\lambda_C + \lambda_D + 8\lambda_E + 8\lambda_F - 2 \geq 0$

$\lambda_i \geq 0$

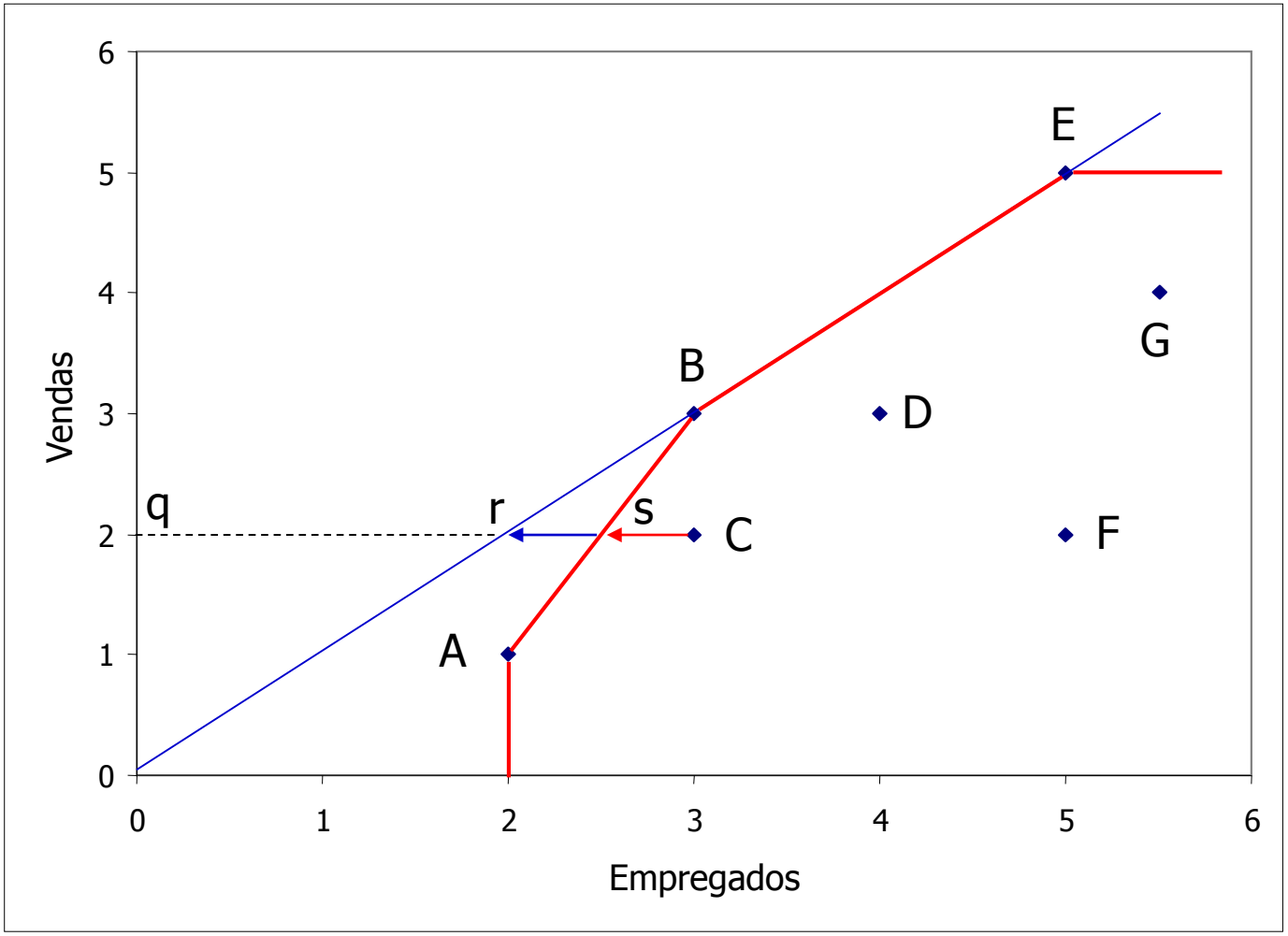
Modelo DEA BCC

- Modelo CCR
  - Retornos constantes de escala
  - Válido para unidades operando em escala ótima
- Modelo BCC ou VRS (Banker, Charnes e Cooper, 1984)
  - Substitui o axioma da **proporcionalidade** pelo axioma da **convexidade**, soma dos lambdas igual a 1
  - Fronteira côncava e linear por partes (*piece-wise linear*) $\rightarrow$ impropriamente chamado "retornos variáveis de escala"
  - Mais benevolente com as unidades

Modelo DEA BCC



Modelo DEA BCC



Modelo CCR
Eficiência = qr/qC

Modelo BCC
Eficiência = qs/qC

Modelo DEA BCC/I

Modelo CCR/I

Min h_o

sujeito a

$$h_o x_{io} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_k \geq 0, \forall i$$

$$-y_{jo} + \sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_k \geq 0, \forall j$$

$$\lambda_k \geq 0, \forall k$$

Modelo BCC/I

Min h_o

sujeito a

$$h_o x_{io} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_k \geq 0, \forall i$$

$$-y_{jo} + \sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_k \geq 0, \forall j$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$$

$$\lambda_k \geq 0, \forall k$$

Exemplo

DMU	*Input* 1	*Input* 2	*Output*
A	4	3	2
B	1	6	5
C	2	3	4
D	1	2	1
E	10	5	8
F	12	5	8

Exemplo

Min h_A

sujeito a

$$4h_A - 4\lambda_A - \lambda_B - 2\lambda_C - \lambda_D - 10\lambda_E - 12\lambda_F \geq 0$$

$$3h_A - 3\lambda_A - 6\lambda_B - 3\lambda_C - 2\lambda_D - 5\lambda_E - 5\lambda_F \geq 0$$

$$2\lambda_A + 5\lambda_B + 4\lambda_C + \lambda_D + 8\lambda_E + 8\lambda_F - 2 \geq 0$$

$$\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F = 1$$

$$\lambda_i \geq 0$$

Exemplo

DMUs	Eficiência BCC	λ_A	λ_B	λ_C	λ_D	λ_E	λ_F	Folga
A	0,7778	0	0	0,3333	0,6667	0	0	S_1=1,777

- Eficiências BCC são maiores ou iguais que as eficiências CCR
- Observar somatório dos lambdas igual 1

Modelo DEA BCC/I

Envelope

$$\text{Min} \quad h_o$$

sujeito a

$$h_o x_{io} - \sum_k x_{ik}\lambda_k \geq 0, \forall i$$

$$-y_{jo} + \sum_k y_{jk}\lambda_k \geq 0, \forall j$$

$$\sum_k \lambda_k = 1$$

$$\lambda_k \geq 0, \forall k$$

Multiplicadores

$$\text{Max} \quad Eff_o = \sum_j u_j y_{jo} + u_*$$

sujeito a

$$\sum_i v_i x_{io} = 1$$

$$-\sum_i v_i x_{ik} + \sum_j u_j y_{jk} + u_* \leq 0, \forall k$$

$$u_j \geq 0, v_i \geq 0, \forall j, i$$

$$u_* \in \Re$$

Exemplo

Max $Eff_A = 2\,u_1 + u_*$

sujeito a

$4v_1 + 3v_2 = 1$

$2u_1 + u_* - 4v_1 - 3v_2 \le 0$

$5u_1 + u_* - 1v_1 - 6v_2 \le 0$

$4u_1 + u_* - 2v_1 - 3v_2 \le 0$

$1u_1 + u_* - 1v_1 - 2v_2 \le 0$

$8u_1 + u_* - 10v_1 - 5v_2 \le 0$

$8u_1 + u_* - 12v_1 - 5v_2 \le 0$

$u_1, v_1, v_2 \ge 0$

$u_* \in \Re$

DMU *A*	0,7778
v	0,0000
u_1	0,3333
u_2	0,1111
u_*	0,5556

Modelo DEA BCC/I

$$\text{Max} \quad Eff_o = \frac{\sum_j u_j y_{jo} + u_*}{\sum_i v_i x_{io}}$$

sujeito a

$$\frac{\sum_j u_j y_{jk} + u_*}{\sum_i v_i x_{ik}} \leq 1, \forall k$$

$$u_j \geq 0, v_i \geq 0, \forall j, i$$

$$u_* \in \Re$$

Possibilidade de eficiências negativas ocultas devido a u_*

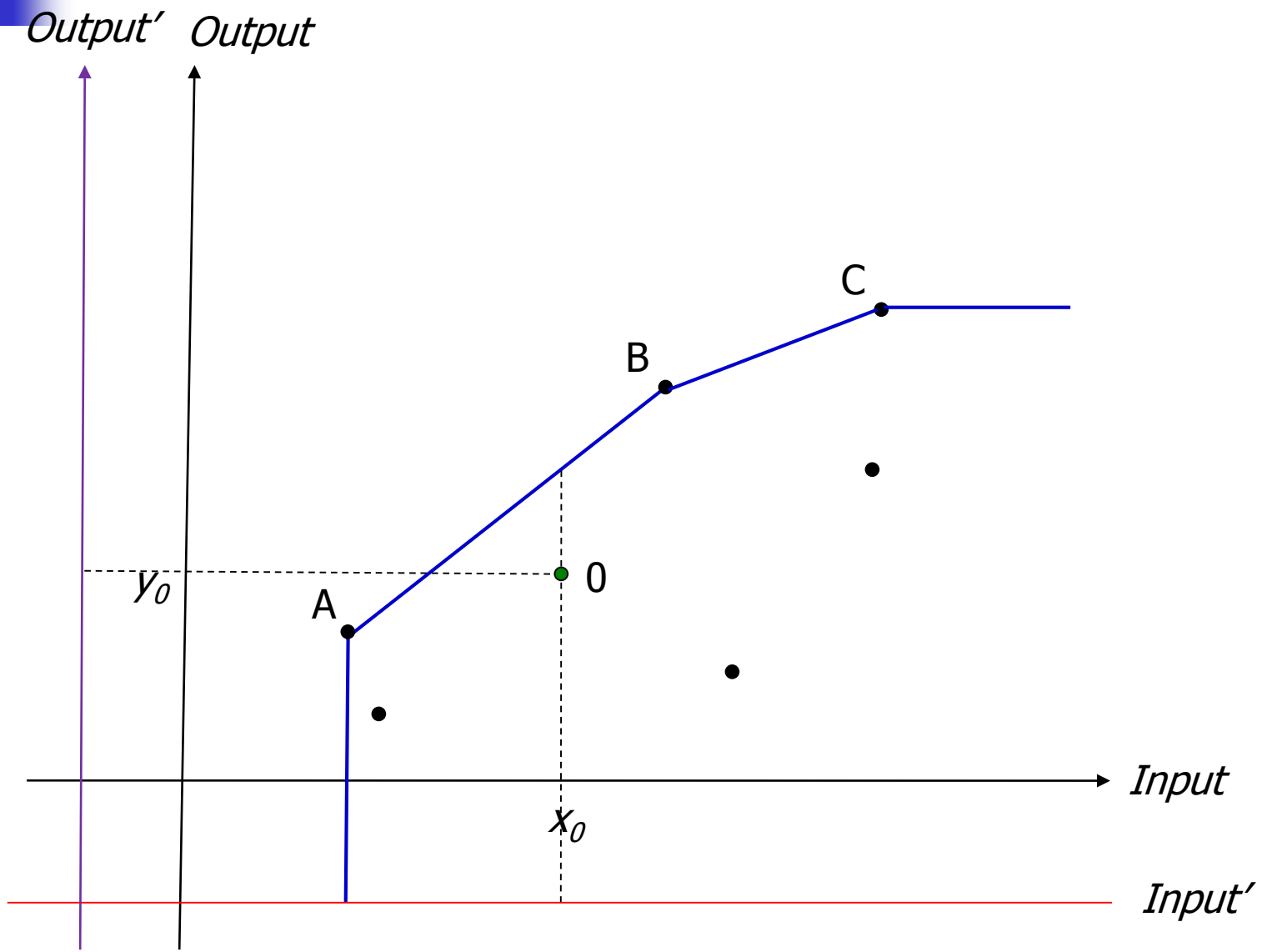
Orientação a *outputs*

- É possível atingir a eficiência mantendo os *inputs* constantes e multiplicando os *outputs* por um número *h* maior ou igual a 1
- Neste caso, a eficiência é dada por 1/*h*
- A dedução é feita no Modelo do Envelope
- Obtém-se o Modelo dos Multiplicadores por Dualidade
- No modelo CCR as eficiências independem da orientação; os outros resultados de DEA dependem da orientação
- No modelo BCC todos os resultados de DEA dependem da orientação

Propriedades dos modelos

- Invariância com a escala de medida
- Melhor relação output i e input j é eficiente: obriga haver relação causal
- Maior output ou menor input: eficiente no BCC
- BCC é invariante a translações a output quando é orientado a input e vice-versa: aplicação para valores negativos

Invariância do BCC com translações



Introdução aos modelos avançados

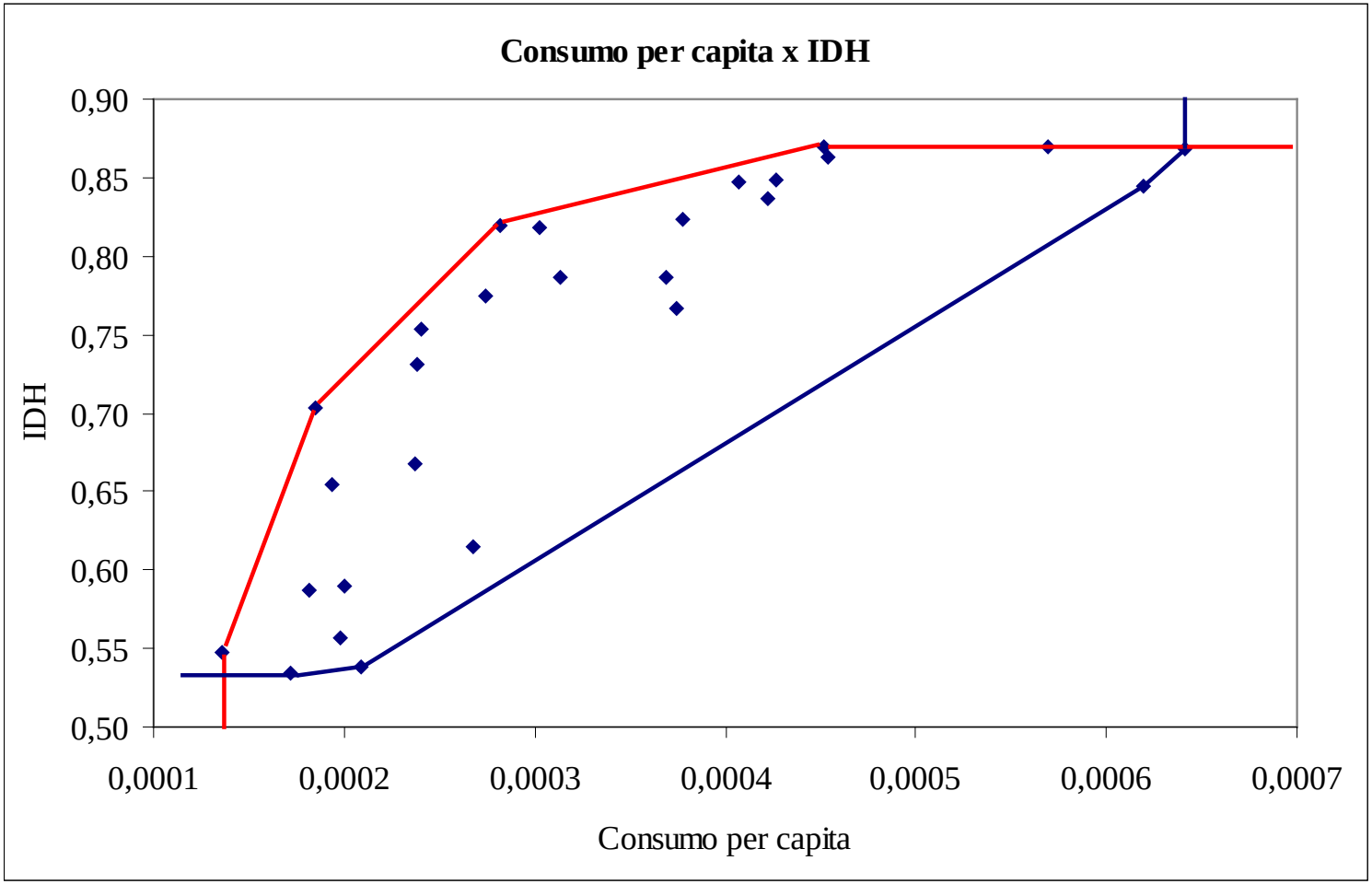
- Fronteira invertida
- Restrições aos pesos
- Avaliação Cruzada
- Input unitário
- Network DEA
- Modelos multiobjetivo
- Outputs indesejáveis
- Representação bi-dimensional para múltiplos inputs e outputs
- Outros

Modelos DEA avançados

- **Fronteira Invertida**
  - Inversão dos *inputs* com os *outputs*
  - Inversão da orientação
  - Duas interpretações:
    - Representa uma visão pessimista em oposição a uma visão otimista do DEA clássico, identificação das piores práticas gerencias
    - Pontos de vista ou óticas opostas (Ex: apartamento para venda, mesmas variáveis, ótica do comprador e do vendedor)

Fronteira Invertida

- Modelo BCC



Modelos DEA avançados

- **Fronteira Invertida**
  - Índice de eficiência da fronteira invertida é um índice de ineficiência para a fronteira padrão
  - Índice geral, eficiência composta é a média entre eficiência padrão e o complemento da eficiência invertida

$$eficiencia\ \ composta = \frac{\left[eficiencia\ \ padrao + \left(1 - eficiencia\ \ invertida\right)\right]}{2}$$

  - Bom índice significa que "a DMU é bem avaliada no que é melhor e não é mal avaliada no que é pior"
  - Não permitimos especialização de uma DMU

Modelos DEA avançados

- **Fronteira Invertida**
  - Melhora na discriminação de DMUs eficientes sem incluir julgamentos a priori
  - Para uma DMU ter um bom índice composto: ela é bem avaliada no que é melhor (um bom desempenho), mas não pode ter um desempenho fraco naquilo que não se destaca
  - Não permitimos especialização de uma DMU

Modelos DEA avançados

- **Restrições aos pesos**
  - DEA é extremamente benevolente e pode ter pesos irreais
  - Incorporação das preferências do decisor e/ou opinião de especialistas
  - Tipos
    - Restrições diretas
    - Razões de pesos
    - Restrições à importância relativa

Restrições diretas

$$\text{Max} \quad Eff_0 = \sum_{j=1}^{s} u_j y_{j0}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{r} v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$$

$$Ii_i \leq v_i \leq Is_i$$

$$Oi_i \leq u_j \leq Os_j$$

$$u_j, v_i \geq 0, \forall\ j,i$$

- É difícil saber o significado dos limites impostos aos pesos
- Existe grande probabilidade de o modelo ficar inviável
- No modelo do envelope, cada restrição equivale a uma variável extra (multiplicador de Lagrange)
- Restrição direta aos pesos equivale a colocar folgas e excessos na função objetivo do modelo do envelope

Razões dos pesos

Max $Eff_0 = \sum_{j=1}^{s} u_j y_{j0}$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{r} v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$$

$$Ii_i \leq \frac{v_i}{v_j} \leq Is_i$$

$$Oi_i \leq \frac{u_i}{u_j} \leq Os_i$$

$$u_j, v_i \geq 0, \forall\ j,i$$

- Restrições adicionais indicam qual peso deve ser maior e por quanto
- Menor problema de inviabilidade
- Faz comparação entre pesos em vez de julgamentos absolutos
- Em alguns casos, a correta interpretação das restrições exige prévia normalização das variáveis

Restrições à importância relativa

Max $Eff_0 = \sum_{j=1}^{s} u_j y_{j0}$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{r} v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$$

$$\varphi_j \leq \frac{u_j y_{jo}}{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jo}} \leq \rho_j$$

$$\alpha_i \leq \frac{v_i x_{io}}{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{io}} \leq \beta_i$$

$$u_j, v_i \geq 0, \forall\ j,i$$

- Restrições à importância relativa de cada *output* e de cada *input* na formação do *output* e *input* virtual
- Exige muita informação do decisor
- Inviabilidade: decidir a quem se aplicam as restrições

Avaliação Cruzada

- Avaliação cruzada (Sexton et al, 1986)
- Surgiu para resolver dois problemas em DEA: falta de discriminação e uma melhor distribuição dos pesos das variáveis, atualmente utilizado para rankings
- Útil em situações em que não existe consenso sobre a importância das variáveis
- Faz uma avaliação de conjunto, isto é considera as "opiniões" das outras DMUs
- Cada DMU é avaliada considerando os pesos das outras DMUs do conjunto: avaliação cruzada
- Enfoque semelhante: *common set of weights* (CSW)

Avaliação Cruzada

- Seja

$$E_{ko} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rk} y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ik} x_{io}}$$

  a eficiência cruzada da DMU *O* utilizando o conjunto de pesos da DMU *k*

- u_{rk} é o peso do output r encontrado rodando o PPL da DMU k
- v_{ik} é o peso do input i encontrado rodando o PPL da DMU k

Avaliação Cruzada

- Então, múltiplas soluções ótimas (múltiplos conjuntos de pesos que fornecem a mesma eficiência) precisamos de um segundo PPL para achar o conjunto de pesos mais adequado
- Objetivo do segundo problema: escolher um conjunto de pesos que minimize a eficiência cruzada média das outras DMUs

$$Minimizar\ (n\text{-}1)A_k = \sum_{j \neq k} E_{kj} = \sum_{j \neq k} \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rk} y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ik} x_{ij}}$$

- Problema não linear, diversas propostas de linearização, dentre elas DEA-Game

Input unitário

$$\text{Max } h_0 = \sum_j u_j y_{j0}$$

subject to

$$\sum_j u_j y_{jk} \leq 1, \ \forall k$$

$$u_j \geq 0, \ \forall j$$

$$\text{Min } \sum_k \lambda_k$$

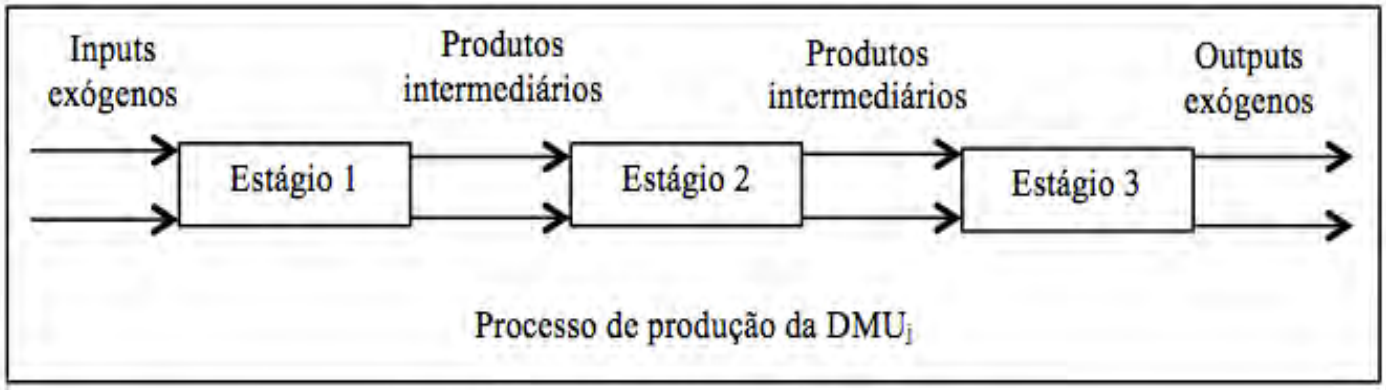
subject to

$$\sum_k y_{jk} \lambda_k \geq y_{j0}, \ \forall j$$

$$\lambda_k \geq 0, \ \forall k$$

Network DEA

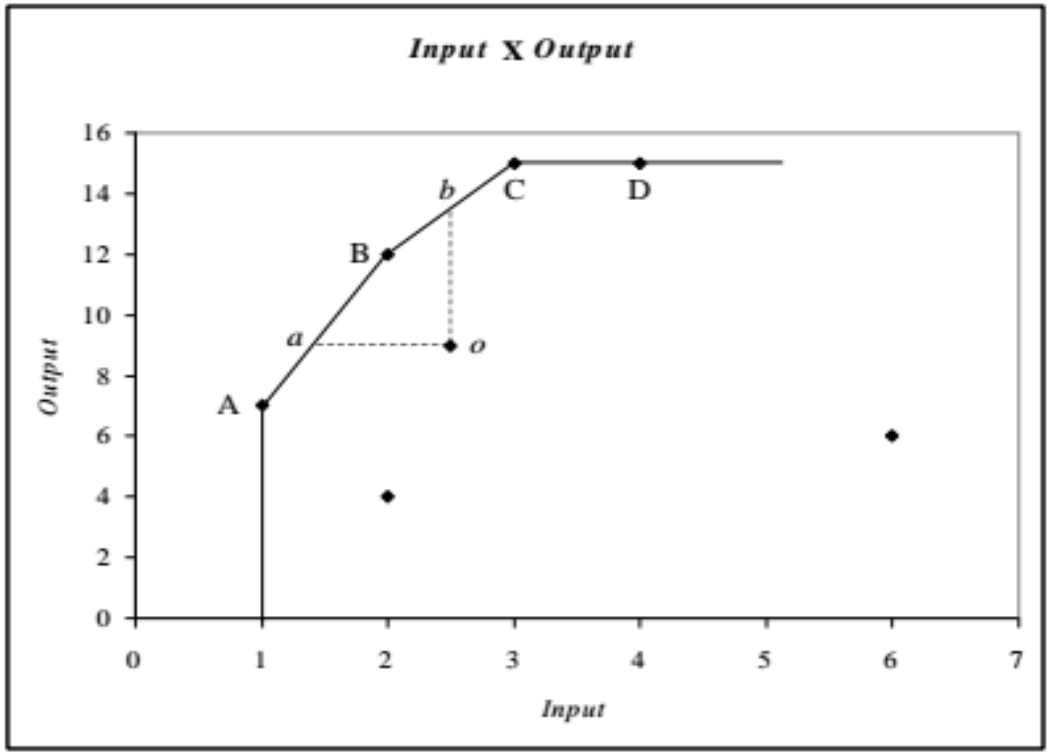
- Abre a "black box" de DEA
- Vários processos: output de um processo é o input do processo seguinte (variável intermediária)
- Modelos mais utilizados: relacional (multiplicativo) e aditivo



- Inputs e outputs exógenos apresentam significado diferente do utilizado em análises estatística

Modelos multiobjetivo

- Modelos MORO: determinam alvos alternativos



Modelos Multiobjetivo

- Modelo MCDEA:
  - Três funções objetivo
  - Com ferramentas adicionais serve para rankings

$$Min\ d_0$$

$$Min\ Max\ d_j$$

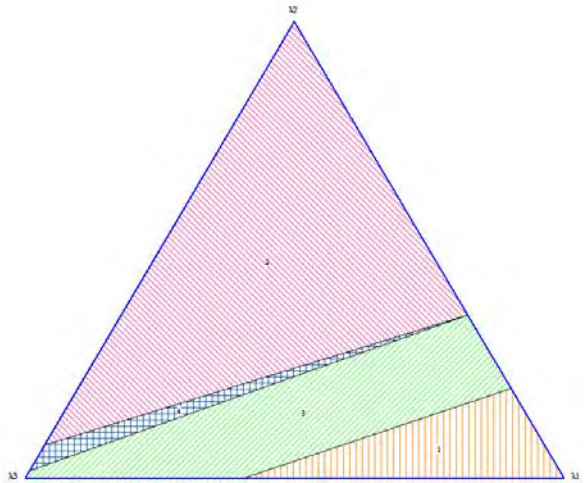
$$Min \sum_{j=1}^{n} d_j$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + d_j = 0,\ j=1,...,n$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad \forall r,i,j$$

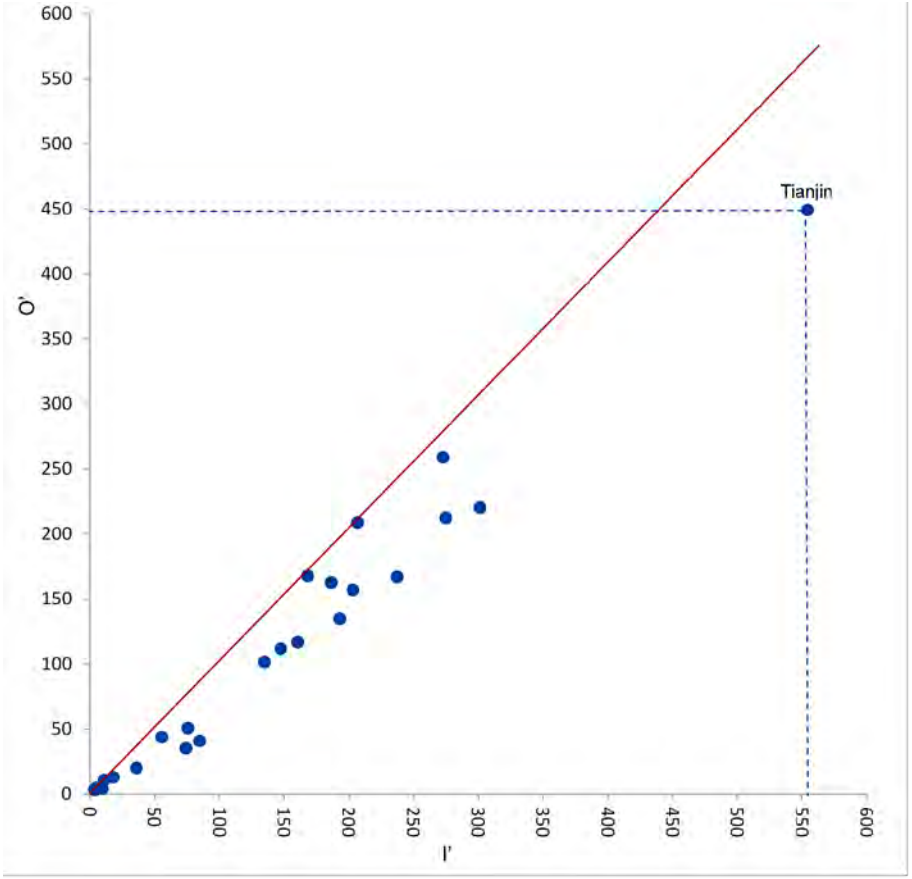


Outputs Indesejáveis

- Resultados do processo produtivo que devem ser minimizados
- Exemplos: atrasos, acidentes, reclamações, poluição
- Várias formas de modelagem:
  - Direta: transformar em input, usar o inverso
  - Indireta: modelos disponibilidade fraca ou forte

Representação bi-dimensional

- Fazer um gráfico de output virtual x input virtual
- Problema: com a linearização usada em DEA o input virtual é sempre 1
- Solução: usar uma restrição de normalização alternativa



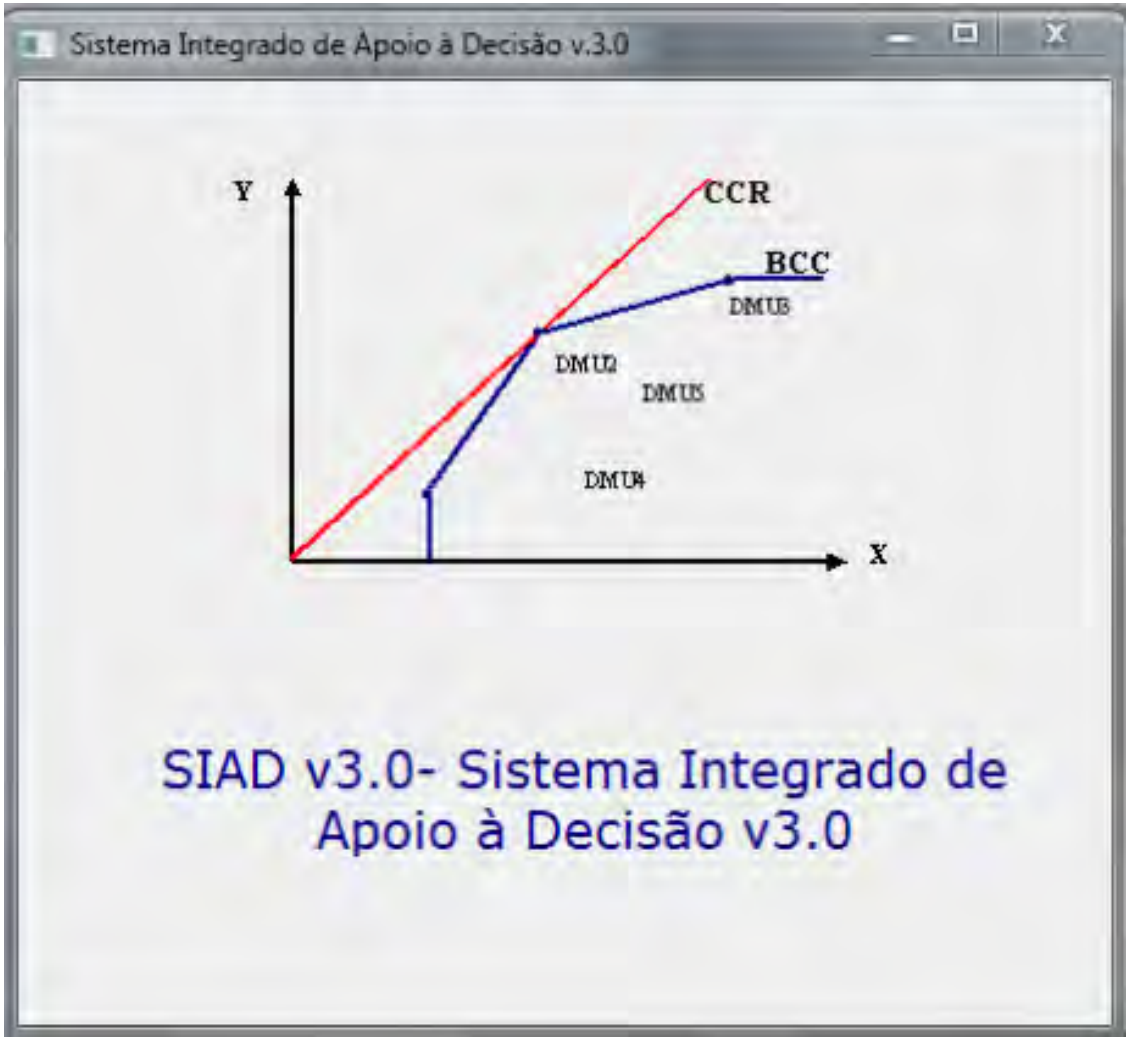
SIAD v3.0

- Disponível em www.uff.br/decisao
- Arquivo ZIP:
  - O SIAD
  - Artigo sobre o programa (como usar)
  - Um exemplo
- Uso livre, mas colocar as referências indicadas no site e no programa

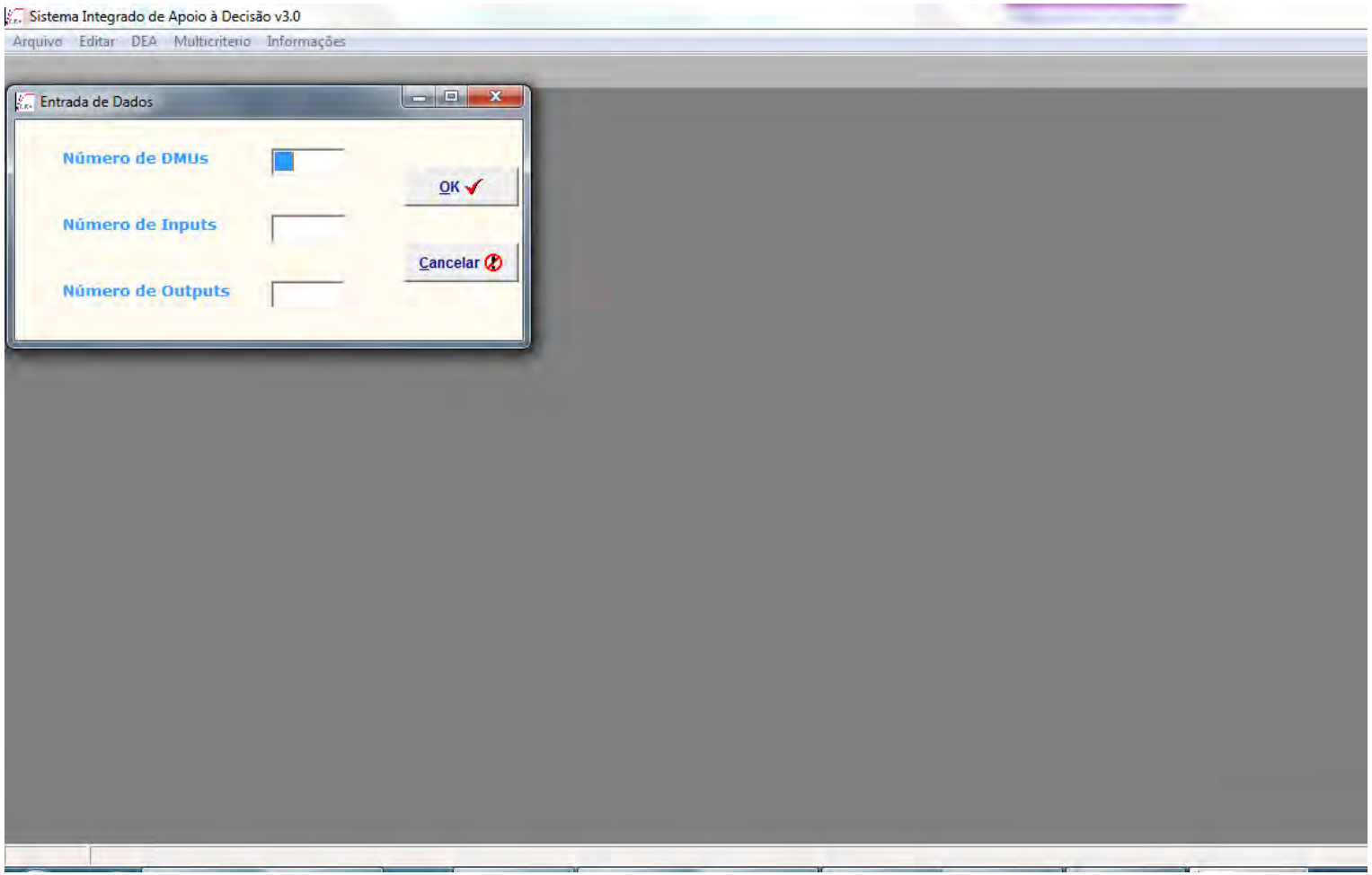
SIAD v.3.0

- Escolha do método: Novo DEA, Novo Multicritério
- Acesso de dados através da grade ou de arquivo txt
- Não aceita copiar e colar
- Opção de salvar resultados
- Editor nomes de DMUs e variáveis
- Modelos básicos e avançados
- Opções dos modelos: retornos de escala e orientação
- Modelos Avançados: fronteira invertida, dois tipos de restrições aos pesos, avaliação cruzada, seleção multicritério de variáveis

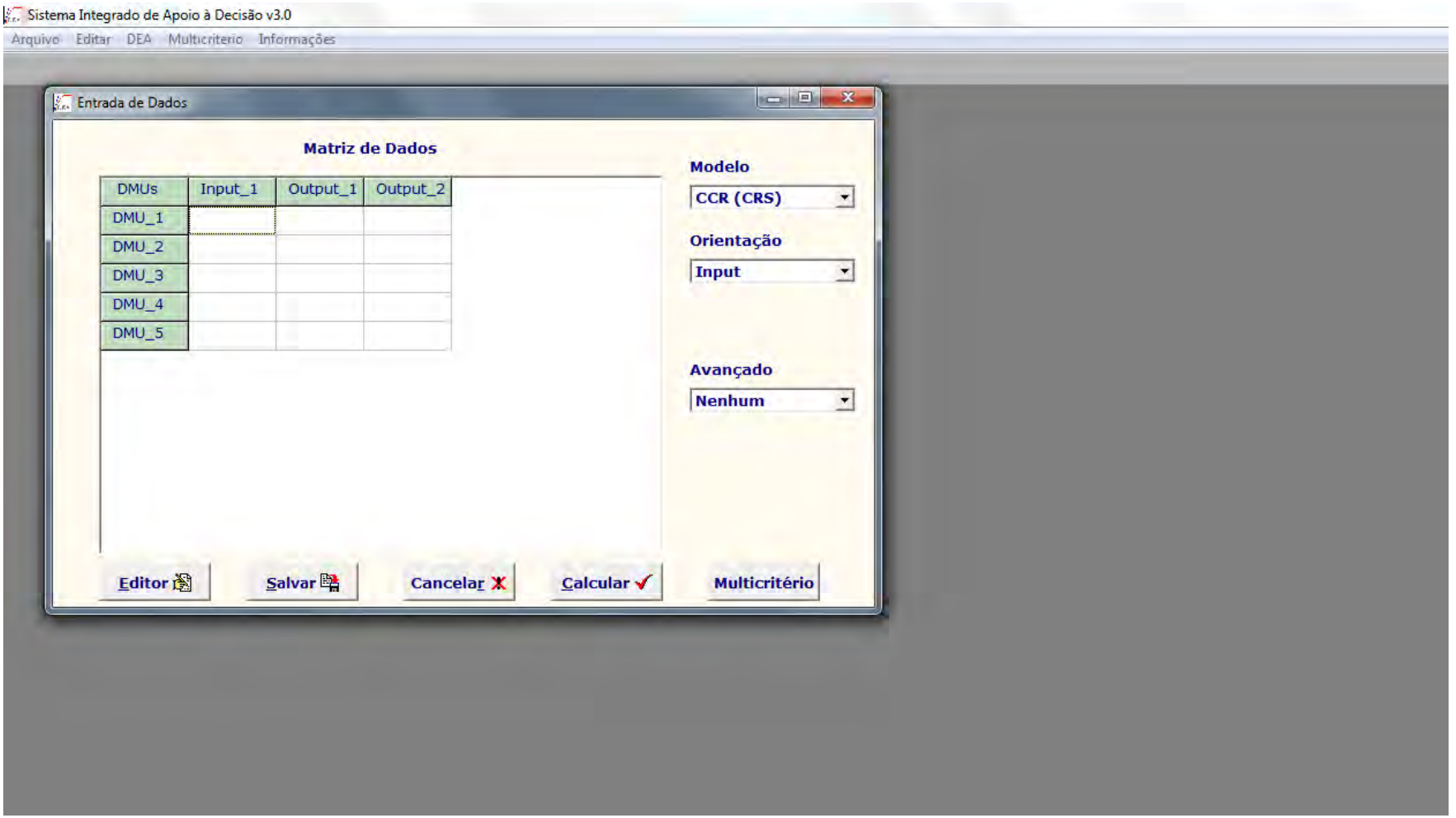
SIAD v3.0


Sistema Integrado de Apoio à Decisão v.3.0
Y
CCR
BCC
DMU3
DMU2
DMU5
DMU4
X
SIAD v3.0- Sistema Integrado de Apoio à Decisão v3.0

SIAD v3.0


Sistema Integrado de Apoio à Decisão v3.0
Arquivo
Editar
DEA
Multicriterio
Informações
Entrada de Dados
Número de DMUs
Número de Inputs
Número de Outputs
OK
Cancelar

SIAD v3.0


Sistema Integrado de Apoio à Decisão v3.0
Arquivo Editar DEA Multicriterio Informações
Entrada de Dados
Matriz de Dados
DMUs
Input_1
Output_1
Output_2
DMU_1
DMU_2
DMU_3
DMU_4
DMU_5
Modelo
CCR (CRS)
Orientação
Input
Avançado
Nenhum
Editor
Salvar
Cancelar
Calcular
Multicritério

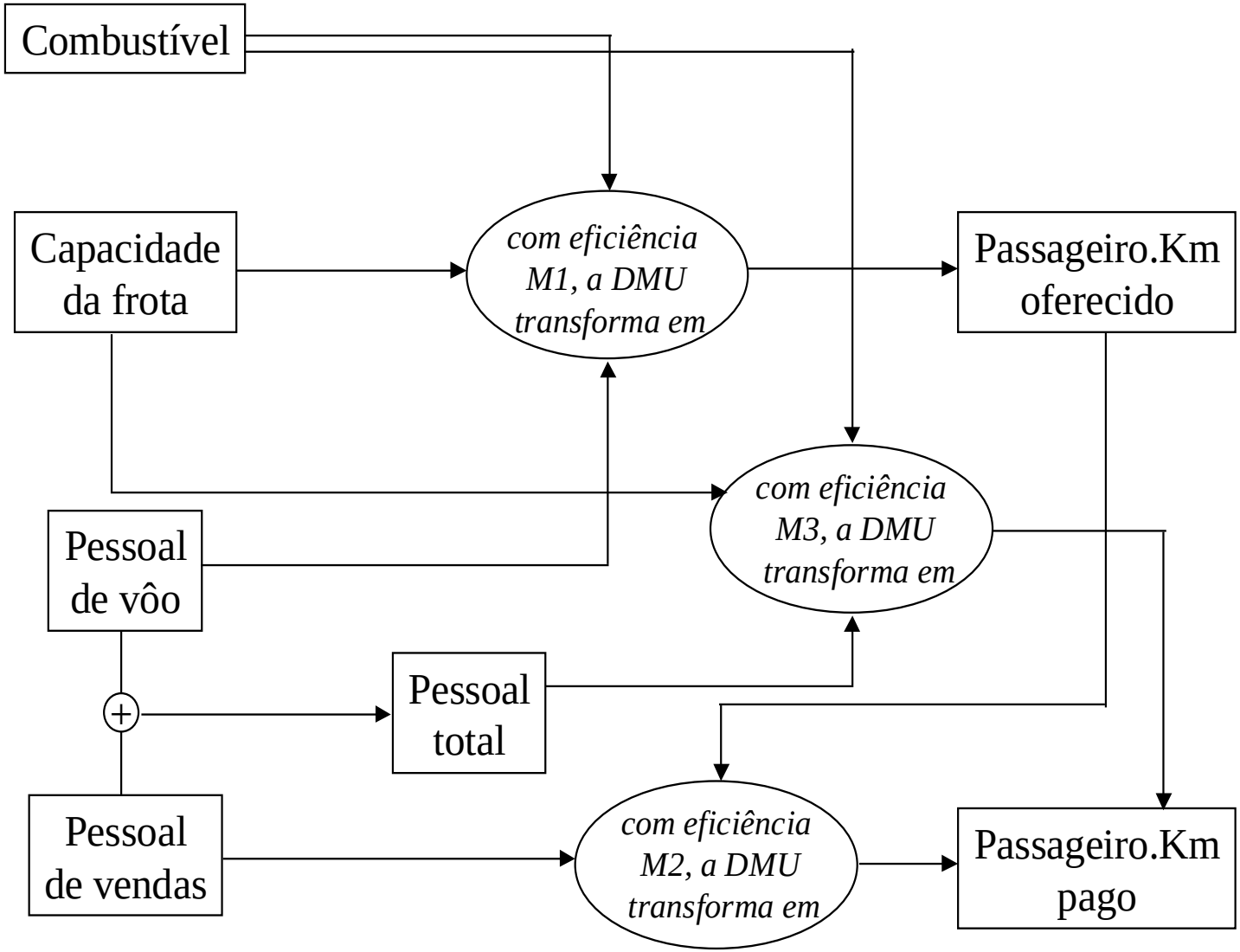
Modelagem em DEA

- Escolha do modelo
  - Comparação de tamanho das DMUs
  - Existência ou não de proporcionalidade
  - Existência ou não de variáveis negativas
  - Verificar cada par output/input
  - PROIBIDO USAR RAZÕES EM QUALQUER MODELO
  - Manter simplicidade
  - Projeções de eficiência, ou seja, o caminho das DMUs ineficientes até a fronteira de eficiência
    - Orientação a *inputs*, a *outputs*, não orientado etc.

Exemplo de aplicação I

- Companhias Aéreas (Soares de Mello et al., 2003)
- Problemas
  - Tipo de eficiência a ser medida
  - Uso do modelo BCC colocava a Varig eficiente sem nenhuma avaliação
- Soluções
  - Três modelos distintos: Vendas, Operacional e Global
  - Aumentar o número de DMUs $\rightarrow$ grupos e anos diferentes
- Resultados $\rightarrow$ avaliação temporal e alvos

Exemplo de aplicação I

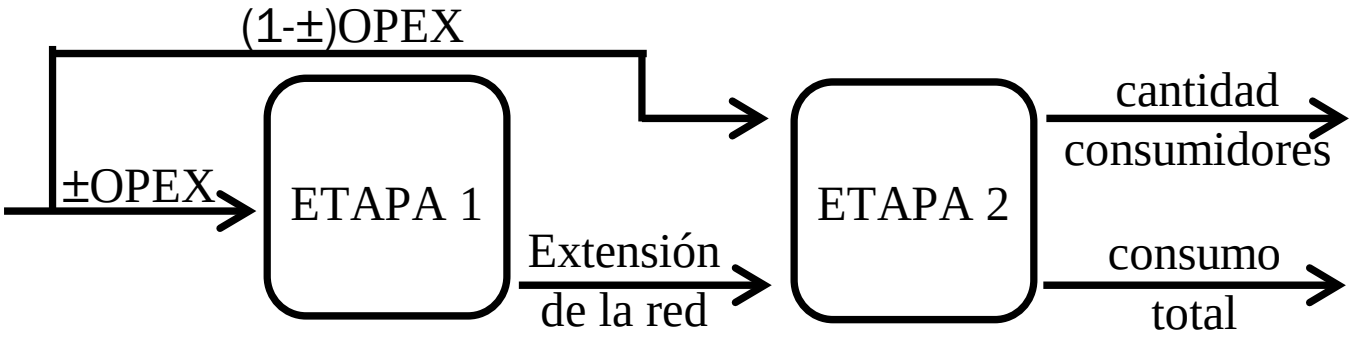


Exemplo de aplicação II

- Avaliação educacional (Soares de Mello et al., 2003)
- Programas da COPPE: 12 DMUs
- Enfoque de qualidade
- Variáveis
  - *Inputs*: Teses de Mestrado e Teses de Doutorado
  - *Outputs*: Periódicos Nacionais, Periódicos Internacionais, Congressos Nacionais, Congressos Internacionais, Livros, Outros
- Restrições do tipo "Razão dos pesos"

Exemplo de aplicação III

- Distribuidoras de energia elétrica: modelo Network DEA com input compartilhado



Exemplo de aplicação IV

- Estudos Olímpicos
  - Rankings puros e relativos
  - Rankings puros: input unitários considerando ou não as diferenças entre as modalidades olímpicas
  - Rankings relativos: medalhas ganhas em relação à população e PIB ou em relação ao tamanho da delegação
  - Restrições aos pesos para as medalhas

Referências

- ANGULO MEZA, L.; BIONDI NETO, L.; SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; GOMES, E.G. ISYDS - Integrated System for Decision Support (SIAD - Sistema Integrado de Apoio à Decisão): a software package for data envelopment analysis model. Pesquisa Operacional, v. 25, (3), p. 493-503, 2005
- ANGULO MEZA, L.; BIONDI NETO, L.; SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; GOMES, E.G.; COELHO, P.H.G. Free software for decision analysis: a software package for data envelopment models. In: 7th International Conference on Enterprise Information Systems - ICEIS 2005, v. 2, p. 207-212.
- ANGULO-MEZA, L.; GOMES, Eliane Gonçalves ; BIONDI NETO, L. ; COELHO, Pedro Henrique Gouvêa . Avaliação do ensino nos cursos de Pós-graduação em engenharia: Um enfoque quantitativo de avaliação em conjunto. Engevista, v. 5, n.9, p. 41-49, 2003.

Referências

- BANA E COSTA, C.A. ; SOARES DE MELLO, J.C.C.B. ; ANGULO MEZA, L. . A new approach to the bi-dimensional representation of the DEA efficient frontier with multiple inputs and outputs. European Journal of Operational Research, v. 255, p. 175-186, 2016.
- BANKER, R.D.; CHARNES, A.; COOPER, W.W. Some models for estimating technical scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science, v. 30, n. 9, p. 1078-1092, 1984.
- CHARNES, A.; COOPER, W.W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision-making units. European Journal of Operational Research, v. 2, p. 429-444, 1978.
- COELLI, T.J.; RAO, D.S.P.; O'DONNEL, C. J., BATTESE, G.E. An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis. Springer.
- COOPER, W.W.; SEIFORD, L.M.; TONE, K. Data Envelopment Analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-Solver Software. Springer, 2007.

Referências

- GOMES, E. G.; LINS, M. P. E. Modelling undesirable outputs with zero sum gains data envelopment analysis models. Journal of the Operational Research Society, v. 59, p. 616-623, 2008.
- LINS, M.P.E.; ANGULO MEZA, L. Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão. Rio de Janeiro: Editora da COPPE/UFRJ, 2000.
- LINS, M.P.E. ; GOMES, E.G. ; SOARES DE MELLO, J.C.C.B. ; SOARES DE MELLO, A.J.R. . Olympic ranking based on a zero sum gains DEA model. European Journal of Operational Research, v. 148, p. 312-322, 2003.
- MORENO, P. ; ANDRADE, G. N. ; ANGULO MEZA, L. ; SOARES DE MELLO, J.C.C.B. . Evaluation of Brazilian electricity distributors using a Network DEA model with shared inputs. Revista IEEE América Latina, v. 13, p. 2209-2216, 2015.

Referências

- SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L.; GOMES, E.G.; SERAPIÃO, B.P.; LINS, M.P.E. Análise de Envoltória de Dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para companhias aéreas brasileiras. Pesquisa Operacional, v. 23, n. 2, p. 325-345, 2003.
- SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; GOMES, E.G. ; ANGULO MEZA, L. ; SOARES DE MELLO, M.H.C. ; SOARES DE MELLO, A.J.R. . Engineering post-graduate programmes: a quality and productivity analysis. Studies in Educational Evaluation, v. 32, n.2, p. 136-152, 2006.
- SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L. ; LACERDA, F.G. . A DEA model with a non discritionary variable for Olympic evaluation. Pesquisa Operacional, v. 32, p. 21-29, 2012.
- SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L. ; BRANCO DA SILVA, B.P. . A ranking for the Olympic Games with unitary input DEA models. IMA Journal of Management Mathematics, v. 20, p. 201-211, 2009.

Referências

- SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L. ; SILVEIRA, J.Q. ; GOMES, E.G. . About negative efficiencies in cross evaluation BCC input oriented models. European Journal of Operational Research, v. 229, p. 732-737, 2013.
- TSCHAFFON, P. B. ; ANGULO-MEZA, L. . Assessing the Efficiency of the Electric Energy Distribution using Data Envelopment Analysis with undesirable outputs. Revista IEEE América Latina, v. 12, p. 1027-1035, 2014.