



MONITORING BIVARIATE PROCESSES WITH A SHEWHART CHART

Antonio Fernando B. Costa

Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
Campus de Guaratinguetá, São Paulo
fbranco@feg.unesp.br

Roberto Campos Leoni

Academia Militar de Agulhas Negras, Divisão de Ensino
Resende, Rio de Janeiro
leoni.roberto@aman.eb.mil.br

RESUMO

Em seu trabalho pioneiro, Shewhart propôs o gráfico de \bar{X} para controlar a média de X . Nós propomos o seu uso para controlar as médias de X e de Y , como uma alternativa ao uso do gráfico de Hotelling. A ideia básica consiste em se alternar a estatística do gráfico de Shewhart, entre \bar{X} e \bar{Y} . Se a estatística em uso com a amostra atual é a estatística de \bar{X} , então \bar{Y} será a estatística a ser utilizada com a próxima amostra, e vice-versa. Uma comparação justa entre os gráficos de Shewhart e de Hotelling é feita alimentando o primeiro deles com amostras duas vezes maiores, uma vez que, em cada amostra, apenas uma das duas características de qualidade é medida. O número de observações por amostra se torna igual para ambos os gráficos. Em comparação com Hotelling, Shewhart é um gráfico mais simples e melhor para sinalizar mudanças no vetor de médias.

PALAVRAS CHAVE. Gráfico de Shewhart. Gráfico de Hotelling. Processos bivariados.

Tópicos (Qualidade, Controle Estatístico de Qualidade, Monitoramento de Processos)

ABSTRACT

In this article, we propose the use of the mean chart to control bivariate processes. The basic idea is to control the mean vector of bivariate (X, Y) processes by alternating the charting statistic of the Shewhart chart (ACS). If the mean of X observations was the charting statistic to obtain the current sample point, then the mean of Y observations will be the charting statistic to obtain the next sample point. A fair comparison between the proposed chart and the Hotelling chart requires an equal number of measurements per sample. That is, if (n) is the Hotelling's sample size then $(2n)$ will be the Shewhart's sample size. The ACS chart is substantially easier to operate and faster than the Hotelling chart in signaling changes in the mean vector of bivariate.

KEYWORDS. Shewhart chart, Hotelling chart, Bivariate Processes.

Paper topics (Quality, Statistical Process Control, Process Monitoring)



1. Introdução

Recentemente, um número crescente de estudos tem sido voltado ao monitoramento de processos bivariados. Leoni et al. (2015) propuseram o uso conjunto de dois gráficos de \bar{X} para controlar o vetor de médias de processos bivariados com observações autocorrelacionadas. Leoni et al. (2015a) investigaram o efeito da autocorrelação no desempenho dos gráficos bivariados de Hotelling. Leoni et al. (2015b) e Leoni et al. (2016), consideraram diferentes estratégias de amostragens para reduzir o efeito da autocorrelação: ou descartando da amostra itens vizinhos, segundo o instante em que foram produzidos, ou compondo as amostras com elementos extraídos da produção em diferentes instantes de amostragens. Simões et al. (2016) também propuseram o uso de dois gráficos de \bar{X} para controlar o vetor de médias de processos bivariados, porém com regras especiais de sinalização. Ho e Costa (2015) e Melo et al. (2016) propuseram o uso de gráficos por atributos para controlar o vetor de médias de processos bivariados.

Alt (1985) propôs o uso do gráfico da variância generalizada $|S|$ para controlar a matriz de covariâncias Σ . Costa e Machado (2008, 2009 e 2011) propuseram as estatísticas de VMAX e de RMAX para o controle da matriz de covariâncias, que além de mais simples são mais eficientes. Para o caso bivariado eles obtiveram expressões fechadas para o cálculo dos erros do tipo I e do tipo II. Os pontos no gráfico de VMAX (RMAX) correspondem a maior das duas variâncias (amplitudes) amostrais padronizadas, a primeira delas calculada com as (n) observações da primeira característica de qualidade e a segunda com as (n) observações da segunda característica de qualidade. Quinino et al. (2012) propuseram a estatística de VMIX para o monitoramento da matriz de covariâncias de processos bivariados. A estatística deles corresponde a variância amostral padronizada de todas as $2n$ observações. Em comparação com o VMAX e o RMAX, o gráfico de VMIX sinaliza com mais rapidez causas especiais que levam ao aumento das variâncias de X e de Y .

Machado et al. (2009) avaliaram o desempenho dos gráficos de VMAX quando combinados com as regras especiais de decisão conhecidas na literatura como “synthetic run rules”. Com estas regras em uso, a sinalização só se caracteriza quando um segundo ponto é plotado além dos limites de controle. Estes dois pontos, não necessariamente precisam ser vizinhos, contudo, não podem estar muito distantes um do outro. O máximo de distanciamento permitido entre eles passa então a ser mais um parâmetro do gráfico de controle. Em geral, um distanciamento máximo não superior a quatro amostras, leva o gráfico de VMAX ao seu melhor desempenho na sinalização de todos os tipos de causas especiais, isto é, causas especiais que afetam a média de apenas uma das variáveis, ou causas especiais que afetam a média das duas variáveis; também levando em conta a magnitude do deslocamento da (s) média (s).

No ambiente da revolução industrial, Shewhart (1931) propôs o gráfico de controle de \bar{X} . Neste artigo, nós adaptamos o gráfico de \bar{X} para controlar o vetor de médias de processos bivariados. De amostra para outra, a estatística do gráfico de Shewhart se alterna entre a estatística de \bar{X} e a estatística de \bar{Y} . Para facilitar, o gráfico proposto será chamado de gráfico de Shewhart para processos bivariados – Gráfico SB . A principal motivação para o uso do gráfico SB está na facilidade do cálculo de sua estatística de monitoramento. A obtenção da estatística de Hotelling é muito mais complicada. Além disso, o gráfico de SB tem um melhor poder de detecção de causas especiais que alteram o vetor de médias dos processos bivariados.

Na próxima seção, o gráfico SB será apresentado junto com a expressão do número médio de amostras - NMA que ele requer para sinalizar uma causa especial. Na seção 3, o gráfico SB será comparado com o gráfico de Hotelling, isto é, serão comparados os números médios de amostras que cada um deles demanda para sinalizar uma causa especial. Na seção 4 seguem os comentários finais.



2. O gráfico de Shewhart para processos bivariados – Gráfico *SB*

Em seu trabalho pioneiro, Hotelling (1947) propôs o gráfico de T^2 para o monitoramento do vetor de médias de processos multivariados. Para o caso bivariado, as variáveis (X, Y) seguem uma distribuição normal com vetor de médias $\boldsymbol{\mu} = (\mu_X, \mu_Y)'$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma} = (a_{ij})_{2 \times 2}$; $(a_{11} = \sigma_X^2, a_{12} = a_{21} = \rho\sigma_{XY}, a_{22} = \rho\sigma_{YX}, \sigma_Y^2)'$. Durante o período em que o processo permanece em controle, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{0X}, \mu_{0Y})'$. Com o gráfico de T^2 em uso, amostras de tamanho (n) são regularmente retiradas do processo e as duas características de qualidade dos itens selecionados são então medidas. Propõe-se neste artigo, como uma alternativa ao gráfico de Hotelling, o gráfico de Shewhart combinado com a seguinte estratégia de inspeção e amostragem: a cada ponto de amostragem $t_i, i = \{1, 2, 3 \dots\}$, $2n$ itens são retirados do processo para comporem as amostras, mas apenas uma das duas características de qualidade (X, Y) é medida. Deste modo, o número médio de observações por amostra que alimentam o gráfico *SB* é igual ao do gráfico de T^2 , a diferença fica por conta do tipo das observações – no gráfico *SB* todas as observações são da mesma característica de qualidade, já no gráfico de T^2 , metade das observações são da característica de qualidade X e a outra metade da característica de qualidade Y . Se as observações da característica de qualidade X são utilizadas para a obtenção dos pontos $i = \{1, 3, 5 \dots\}$ do gráfico, como médias amostrais \bar{X} , então as observações da característica de qualidade Y será utilizada para a obtenção dos pontos $i = \{2, 4, 6 \dots\}$ do gráfico, como médias amostrais \bar{Y} . De acordo com a estratégia proposta de inspeção e amostragem, as observações de X serão das amostras ímpares, e as observações de Y das amostras pares, consequentemente, as observações de X e de Y serão sempre não correlacionadas ($\rho=0$).

A Figure 1 apresenta o gráfico *SB* com seus quatro limites de controle ($CL_{\bar{X}} = \mu_{0X} \pm k_X \sigma_X / (2n)^{1/2}$, $CL_{\bar{Y}} = \mu_{0Y} \pm k_Y \sigma_Y / (2n)^{1/2}$). No exemplo apresentado por Montgomery (2009), as duas características de qualidade (X, Y) representam a resistência a tração (psi) e o diâmetro (10^{-2} inches) da fibra de um certo tecido. A média e o desvio padrão de (X, Y) foram estimados: $\hat{\mu}_{0X} = 115.69$, $\hat{\mu}_{0Y} = 1.06$, $\hat{\sigma}_X = 1.109$, e $\hat{\sigma}_Y = 0.091$. A título de ilustração, seja $n=1$ e $k_X = k_Y = 3.0$. De acordo com a estratégia proposta de inspeção e amostragem, no instante de amostragem t_1 , dois itens são retirados da linha de produção e a característica de qualidade X destes itens são então medidas ($x_1 = 114.27; x_2 = 116.06; \bar{x} = 115.17$). A seguir, no instante de amostragem t_2 , dois novos itens são retirados da linha de produção e a característica de qualidade Y destes itens são então medidas ($y_1 = 0.88; y_2 = 0.89; \bar{y} = 0.89$). No instante de amostragem t_3 , as mensurações retornam a característica de qualidade X ($x_1 = 117.26; x_2 = 116.93; \bar{x} = 117.10$). Em sendo um gráfico de Shewhart, um ponto plotado além dos limites de controle gera sempre um alarme, independentemente do tipo de ponto, se \bar{X} ou \bar{Y} .

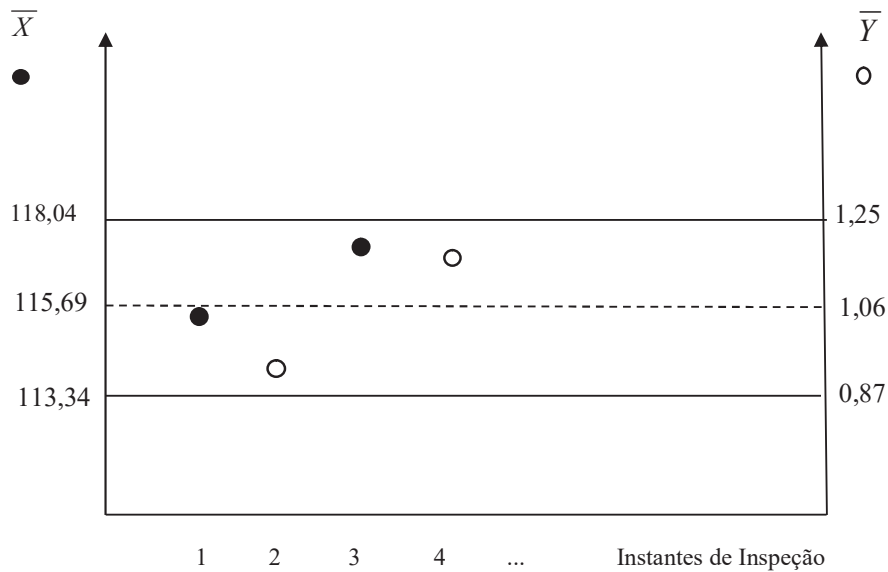


Figura 1. Gráfico SB

Após a ocorrência da causa especial, o vetor de médias muda de $\mu_0 = (\mu_{0X}, \mu_{0Y})'$ para $\mu_1 = (\mu_{1X}, \mu_{1Y})'$, sendo δ o vetor com as magnitudes das mudanças das médias padronizadas:

$$\delta = (\delta_X, \delta_Y)' = \left(\frac{\mu_{1X} - \mu_{0X}}{\sigma_X}, \frac{\mu_{1Y} - \mu_{0Y}}{\sigma_Y} \right)' \quad (1)$$

A rapidez com que o gráfico de controle sinaliza uma mudança no vetor de médias é medido pelo NMA - número médio de amostras até o sinal, Costa et al. (2005). Para o gráfico SB:

$$NMA = \frac{4 - (p_X + p_Y)}{2(p_X + p_Y - p_X p_Y)} \quad (2)$$

Na expressão (2), p_X é o poder do gráfico proposto com as médias amostrais de X e p_Y é o poder com as médias amostrais de Y :

$$p_X = \Phi(-k_X + \delta_X \sqrt{2n}) + \Phi(-k_X - \delta_X \sqrt{2n}) \quad (3)$$

$$p_Y = \Phi(-k_Y + \delta_Y \sqrt{2n}) + \Phi(-k_Y - \delta_Y \sqrt{2n}) \quad (4)$$

Nas expressões (3) e (4), $\Phi(\cdot)$ é a função distribuição acumulada da distribuição normal padrão $N(0, 1)$. Nas comparações com o gráfico de Hotelling, os NMA_s foram obtidos fixando $k_X = k_Y = 3.00$, isto é, com um NMA entre alarmes falsos de 370,4 ($NMA_0 = 370,4$).



3. Comparando os gráficos de controle

Nesta seção, os gráficos de Shewhart e de Hotelling serão comparados com base na rapidez com que eles detectam mudanças no vetor de médias. Com o gráfico de Hotelling em uso, amostras de tamanho (n) são retiradas do processo para a obtenção da seguinte estatística de monitoramento:

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu_{0x}, \bar{Y} - \mu_{0y}) \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}^{-1} (\bar{X} - \mu_{0x}, \bar{Y} - \mu_{0y}) \quad (5)$$

Com o processo em controle - $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{0x}, \mu_{0y})'$, a estatística de T^2 segue uma distribuição de Qui-quadrado com dois graus de liberdade (χ_2^2). O limite de controle do gráfico de T^2 é ajustado para um NMA_0 de 370,4, isto é, $CL = \chi_{2,1/NMA_0}^2$. Com o processo fora de controle - $\boldsymbol{\mu}_1 = (\mu_{1x}, \mu_{1y})'$, a estatística de T^2 passa a ser descrita por meio de uma distribuição de Qui-quadrado não central com dois graus de liberdade (χ_2^2), e com o seguinte parâmetro de não-centralidade:

$$\lambda = n\boldsymbol{\delta}' \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{\delta} \quad (6)$$

A expressão (7) é a expressão do número médio de amostras até o sinal do gráfico de T_2 :

$$NMA = \{1 - \Pr[\chi_2^2(\lambda) < CL]\}^{-1} \quad (7)$$

As Tabelas 1 e 2 comparam os NMA_s dos gráficos de Hotelling e de Shewhart. Elas foram estabelecidas para um NMA_0 de 370,4. De acordo com estas tabelas, o gráfico de Shewhart sempre tem uma melhor capacidade de sinalização, exceto quando as duas características de qualidade são altamente correlacionadas ($\rho=0,7$), e apenas uma das médias é afetada pela causa especial ($\delta_x = 0$ com $\delta_y \neq 0$) ou então ($\delta_y = 0$ com $\delta_x \neq 0$). Por exemplo, se as duas características de qualidade são altamente correlacionadas ($\rho=0,7$), e a causa especial afeta as duas médias ($\delta_x, \delta_y = (0,5, 1,0)$), a Tabela 1 mostra que o gráfico SB , com amostras de tamanho quatro, tem uma capacidade de sinalização superior (menor NMA) ao do gráfico de T^2 , com amostras de tamanho dois (10,74 contra 24,85). Entretanto, quando a causa especial altera somente uma das médias ($\delta_x, \delta_y = (0,0, 1,0)$), o gráfico de T^2 é o que apresenta menor NMA (9,72 contra 11,93).

O gráfico de Shewhart combinado com a estratégia de inspeção e amostragem proposta neste artigo não é apenas mais simples que o gráfico de Hotelling, é também mais eficiente. Em estudos recentes, os pontos percentuais da distribuição do número de amostras até o sinal - NA (%), tem sido utilizado na avaliação da capacidade de sinalização dos gráficos de controle, ver Khoo et al. (2011). Na Tabela 3, a seguinte relação é observada: NA (50%) < NMA < NA (95%). Além disso, a variância do NA diminui com o NMA .



Tabela 3. Pontos percentuais da distribuição do NA : gráficos de Shewhart (SB) e de T^2 ($\rho=0.5$).

δ_X	δ_Y	Tamanho da amostra	NMA	NA (%)			Tamanho da amostra	NMA	NA (%)				
				25	50	95			25	50	95		
0,0	0,0	SB	2	370,4	107	257	1109	SB	4	370,4	107	257	1109
		T^2	1	370,4	107	257	1109	T^2	2	370,4	107	257	1109
0,0	0,5		2	145,46	42	101,5	435		4	78,18	23,5	54	233,5
			1	172,24	50	120	515		2	101,63	30	71	303
0,0	1,5		2	9,92	3,5	7,5	29,5		4	3,49	1,5	2	9,5
			1	14,99	5	11	44		2	4,82	2	3	13
0,5	1,5		2	9,56	3,5	7,5	27,5		4	3,40	1,5	2	9,5
			1	22,11	7	15	65		2	7,29	2	5	21
1,0	1,0		2	17,73	5	12	52		4	6,30	2	5	18
			1	47,89	14	33	142		2	18,04	6	13	53
1,5	1,5		2	5,27	2	4	15		4	2,00	1	1	5
			1	14,99	5	11	44		2	4,82	2	3	13

4. Conclusões e sugestões de pesquisa

Neste artigo, mostramos que gráfico de Shewhart pode ser utilizado para controlar as médias de X e de Y , como uma alternativa ao uso do gráfico de Hotelling. De acordo com a estratégia proposta de inspeção e de amostragem, as observações de X são das amostras ímpares e as observações de Y são das amostras pares, conseqüentemente, a correlação de X e Y não afeta o desempenho do gráfico. Esta é uma vantagem adicional do gráfico proposto, pois só é possível utilizar o gráfico concorrente de T^2 quando o grau de dependência entre X e Y é conhecido. Em outras palavras, para o uso do gráfico de T^2 é necessário, além das variâncias, estimar a covariância de X e Y . A propósito, a avaliação do desempenho do gráfico proposto, na situação mais realística, em que se utiliza estimativas dos parâmetros do processo (μ_{0X} , μ_{0Y} , σ_X , e σ_Y), é uma proposta de pesquisa interessante.

5. Agradecimentos

Os autores agradecem os revisores pelas correções. Esta pesquisa tem o suporte do CNPq, Universal 402559/2016-9.

Referências

Leoni R.C., Machado M.A.G. e Costa AFB (2015) Simultaneous Univariate \bar{X} Charts to Control Bivariate Processes with Autocorrelated Data. Quality Reliability Engineering International 31:1641–1648

Leoni RC, Costa A.F.B., e Machado M.A.G (2015a) The effect of the autocorrelation on the performance of the T2 chart. European Journal of Operational Research 247:155–165



Leoni R.C., Costa A.F.B., Franco B.C., Machado M.A.G. (2015b) The skipping strategy to reduce the effect of the autocorrelation on the T2 chart's performance. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 80:1547–1559.

Leoni R.C., Machado M.A.G., e Costa A.F.B. (2016) The T2 chart with mixed samples to control bivariate autocorrelated processes. *International Journal of Production Research* 54:3294-3310.

Simões F.D., Leoni R.C., Machado M.A.G., Costa A.F.B. (2016) Synthetic charts to control bivariate processes with autocorrelated data. *Computer and Industrial Engineering* doi: 10.1016/j.cie.2016.04.005

Ho L. L., e Costa A. F. B. (2015) Attribute Charts for Monitoring the Mean Vector of Bivariate Processes. *Quality Reliability Engineering International* 31:683–693.

Melo M.S., Ho L.L., e Medeiros P.G. (2016) Max D: an attribute control chart to monitor a bivariate process mean. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* doi: 10.1007/s00170-016-9368-8

Alt FB (1985) Multivariate quality control. *Encyclopedia of Statistical Science*. vol. 6

Costa A.F.B., e Machado M.A.G. (2008) A New Chart for Monitoring the Covariance Matrix of Bivariate Processes. *Communications in Statistics – Simulation and Computation* 37:1453–1465.

Costa A.F.B, e Machado M.A.G. (2009) A new chart based on sample variances for monitoring the covariance matrix of multivariate processes. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 41:770–779

Costa A.F.B., e Machado M.A.G. (2011) A control chart based on sample ranges for monitoring the covariance matrix of the multivariate processes. *Journal of Applied Statistics* 38:233–245

Quinino R., Costa A.F.B., e Ho L. L. (2012) A Single Statistic for Monitoring the Covariance Matrix of Bivariate Processes. *Quality Engineering* 24:423–430

Machado M.A.G, Costa A.F.B., e Rahim M.A. (2009) The synthetic control chart based on two sample variances for monitoring the covariance matrix. *Quality Reliability Engineering International* 25:595–606.

Shewhart, W. A. (1931) *Statistical method from the viewpoint of quality control*, Dover

Hotelling, H. (1947) *Multivariate Quality Control, Techniques of Statistical Analysis*, Mc-Graw-Hill

Montgomery, D. (2009) *Introduction to Statistical Quality Control*, Wiley

Costa, A. F. B., Epprecht, E. e Carpinetti, L. C. R. (2005) *Controle Estatístico de Qualidade*, 2ª Edição, Editora Atlas.

Khoo MBC, Wong VH, Wu Z, Castagliola P (2011) Optimal designs of the multivariate synthetic chart for monitoring the process mean vector based on median run length. *Quality Reliability Engineering International* 27:981–997.