



RELAÇÕES ENTRE O AUMENTO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA E DA CONFIABILIDADE DE REDES UTILIZANDO O VETOR DE FIEDLER COMO ESTRATÉGIA DE INSERÇÃO DE ARESTAS

Bruno Soares Barreto

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca – CEFET- RJ
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas
Av. Maracanã, 229 - Maracanã – RJ
brunobarreto7@gmail.com

Carla Silva Oliveira

Escola Nacional de Ciências Estatísticas – ENCE/IBGE
Rua André Cavalcanti, 106 - Centro - RJ
carla.oliveira@ibge.gov.br

RESUMO

A conectividade algébrica é uma medida muito abordada na Teoria Espectral de Grafos, pois está relacionada com diversas invariantes do grafo como, por exemplo, corte maximal, conectividade de vértices, robustez da rede, entre outros. A confiabilidade de uma rede representa a capacidade da rede permanecer conexa após a falha de alguns de seus vértices e/ou arestas. Por isso, a confiabilidade é uma medida importante para diversos casos reais, como redes de transporte, transmissão de energia e comunicação. Embora a conectividade algébrica, um parâmetro determinístico, e a confiabilidade, que é um parâmetro probabilístico, tenham conceitos que se relacionam, a literatura carece de abordagens que associe ambos. Este trabalho tem como objetivo avaliar o incremento obtido na conectividade algébrica e na confiabilidade de redes a partir da inserção de arestas. Para isso, é avaliada a estratégia de inserção de arestas com base no vetor de Fiedler.

PALAVRAS CHAVE. Conectividade algébrica, confiabilidade de redes, vetor de Fiedler.

Tópicos: Teoria Espectral dos Grafos; Confiabilidade de Redes

ABSTRACT

Algebraic connectivity is a large discussed measure in Spectral Graph Theory, since it is related to several graph's invariants, such as maximal cut, vertex connectivity, network robustness and others. The network reliability represents the capability of the network to remain connected since its vertices and/or edges are subjected to failure. Therefore, the reliability is an important measure for many real cases, such as transport networks, energy transmission and communication. Although the algebraic connectivity, a deterministic parameter, and the reliability, which is a probabilistic parameter, have related definitions, the literature lacks studies when relating both. This paper aims to evaluate the increase in algebraic connectivity and reliability of network by the insertion of edges. In order to achieve this, we use the strategy of inserting edges based on the Fiedler vector.

KEYWORDS. Algebraic connectivity. Reliability of Networks. Fiedler vector.

Paper topics: Graph Spectral Theory; Reliability of Networks



1. Introdução

A Teoria Espectral dos Grafos (TEG) teve início com o trabalho de Huckel em 1931, relacionado com a química quântica e posteriormente com a tese de doutorado de Cvetkovic, no início da década de 1970. O recente crescimento deste tema se deve à ampla capacidade de grafos modelarem problemas reais relacionados às redes, sejam eles na área da biologia, física, engenharia, redes sociais, logística, entre outros. Um importante parâmetro estudado na TEG é a conectividade algébrica, relacionado por muitos autores com a robustez da rede, como pode ser visto em [Nagarajan et al. 2015], [Alenazi *et al.* 2014], [Oliveira et al. 2012], entre outros, uma vez que essa medida é relacionada com a conectividade de vértices e de arestas de um grafo, vide [Fiedler 1973]. Todos estes trabalhos citados buscam aumentar a conectividade algébrica de grafos de formas variadas, como por exemplo, através do desenvolvimento de heurísticas para inserção de arestas ou através de parâmetros topológicos do grafo, com o objetivo de tornar a rede mais robusta. No entanto, há uma escassez na literatura da definição e formalização do conceito de robustez, como invariante do grafo, bem como são encontrados poucos trabalhos que mostram uma relação matemática explícita entre robustez e conectividade algébrica, sendo essa relação muitas vezes tratada de forma intuitiva, porém pouco explorada do ponto de vista teórico. Em [Chvátal 1972], por exemplo, encontra-se a definição do parâmetro denominado pelo autor de *toughness*, porém a literatura ainda carece de referências sobre *robustness*. Por outro lado, existe um conceito que pode estar diretamente relacionado com a robustez da rede, mas cuja relação com a conectividade algébrica é pouco abordada na literatura. Este conceito é a confiabilidade da rede, definida como a capacidade de uma rede permanecer conexa após a falha de suas arestas e/ou vértices. Esta medida tem ampla aplicabilidade prática, uma vez que em diversas situações a capacidade de uma rede permanecer conexa é essencial para o funcionamento de um sistema, como por exemplo em redes logísticas ou redes de transmissão de energia elétrica. Por isso, de forma semelhante à conectividade algébrica, podem ser encontrados diversos trabalhos que visam o aumento da confiabilidade de redes, por exemplo, pela inserção de arestas no grafo, como pode ser visto em [Lyra e Oliveira 2011] e [Silva 2010]. Deste modo, uma vez que a conectividade algébrica é tratada por muitos autores como um parâmetro relacionado com a robustez da rede e como a literatura também apresenta o conceito de confiabilidade da rede, com ampla capacidade de aplicação prática, este trabalho tem como objetivo avaliar a variação que a confiabilidade da rede tem a partir do uso de estratégias que visam o aumento da conectividade algébrica do grafo que modela a rede. O desenvolvimento desta ideia se deve, em parte, ao trabalho de Jamakovic e Uhlig [Jamakovic e Uhlig 2007], no qual os autores mostram que conforme o número de vértices do grafo aumenta, a conectividade algébrica tende a ficar distante da conectividade de arestas, que também é uma medida relacionada com o quão robusta uma rede é, o que é detalhado na Seção 2. Nesse sentido, desenvolvemos esse trabalho que tem como objetivo analisar se as estratégias de aumento da conectividade algébrica também são boas estratégias para o incremento da confiabilidade de uma rede. A importância dessa análise se deve ao fato de que o cálculo da confiabilidade da rede é um problema *NP-Hard*, vide [Shpungin 2006]. Por isso, a obtenção de uma forma de aumento da confiabilidade da rede sem a necessidade de testar todas as possibilidades de inserção de aresta é importante para que o tomador de decisão tenha respostas rápidas e com baixo custo computacional. Este trabalho está organizado em três seções. A Seção 2 descreve conceitos básicos da teoria dos grafos, teoria espectral dos grafos e confiabilidade de redes. A Seção 3 descreve a metodologia utilizada e o algoritmo implementado. Os resultados computacionais são apresentados da Seção 4 e na Seção 5 as conclusões.

2. Preliminares

Nesta seção são apresentados os conceitos básicos para a compreensão deste trabalho que podem ser vistos em [Biggs 1993] e [Diestel 2000].



2.1. Teoria dos Grafos e Teoria Espectral dos Grafos

Um grafo é uma estrutura $G = (V, E)$, onde V é o conjunto discreto cujos elementos são denominados de vértices ou nós e E é o conjunto de arestas de G , que representam as inter-relações entre os vértices. O número de vértices do grafo é denotado por $n = |V|$ e o número de arestas por $m = e(G) = |E|$. O grafo G é denominado orientado se existe uma orientação indicando o sentido da aresta, caso contrário é denominado não-orientado. Se existirem duas ou mais arestas conectando o mesmo par de vértices dizemos que elas são paralelas e se uma aresta envolver um único vértice, ela é denominada laço. Um grafo não-orientado sem laços e sem arestas paralelas é denominado grafo *simples* e um grafo que possui pelo menos duas arestas paralelas é denominado *multigrafo*. Neste trabalho, quando não mencionada tal distinção consideramos G um grafo simples. Os vértices v_i e v_j são adjacentes se existe a aresta $v_i v_j \in E$. O grau de um vértice $v_i \in V$, denotado por $d(v_i)$ é o número de arestas ligadas diretamente a ele. A sequência de graus de um grafo é dada por $d(G) = (d(v_1), \dots, d(v_n))$, onde $d(v_1) \geq \dots \geq d(v_n)$. O grau mínimo de um grafo G , $\delta(G)$, é definido como $\delta(G) = d(v_n)$ e o grau máximo, $\Delta(G)$, como $\Delta(G) = d(v_1)$. Um caminho em um grafo é uma sequência de arestas distintas que conectam uma sequência de vértices distintos. O comprimento de um caminho é o número de arestas existente nele. Se existe um caminho ligando qualquer par de vértices em G , dizemos que G é conexo. Caso contrário, G é desconexo. Um vértice é denominado vértice de corte quando ao ser removido do grafo o torna desconexo. Um grafo conexo sem ciclo é denominado árvore. A conectividade de arestas de G , denotada por $\lambda(G)$, é o menor número de arestas que devem ser removidas para tornar o grafo desconexo. De forma similar, a conectividade de vértices de G , denotada por $k(G)$, é o menor número de vértices que ao serem removidos tornam G desconexo. Um conjunto de arestas corte de cardinalidade λ é um conjunto composto por λ arestas tais que a sua remoção torna o grafo desconexo. O número de todo os conjuntos de corte de arestas de cardinalidade λ de G é denotado por $m_\lambda(G)$.

Um grafo G pode ser representado por diversas matrizes como, por exemplo: matriz de adjacência, incidência, Laplaciana e Laplaciana sem sinal. A matriz de adjacência de um grafo G com n vértices, denotada por $A(G)$ é uma matriz quadrada de ordem n , cujas entradas são:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } ij \in E; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Uma propriedade da matriz de adjacência é que a soma das entradas de cada linha é igual ao grau do vértice correspondente à linha. A matriz Laplaciana de G , denotada por $L(G)$, é uma matriz simétrica definida por: $L(G) = D(G) - A(G)$, onde $D(G)$ é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os graus dos vértices de G e $A(G)$ sua matriz de adjacência. Os autovalores de $L(G)$ são denotados por $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n = 0$. Em [Merris 1994] e [Fiedler 1973] tem-se que $L(G)$ é semidefinida positiva e que $\mu_{n-1} = 0$ se, e somente se, G é desconexo. O segundo menor autovalor, μ_{n-1} é conhecido como *conectividade algébrica* do grafo e denotado por $a(G) = \mu_{n-1}$. A conectividade algébrica é um invariante que desempenha um papel importante na TEG e está associado a outros invariantes importantes, como por exemplo, conectividade de vértice e de aresta, número isoperimétrico e diâmetro, corte maximal, número independente, dentre outros, como por ser visto em [Abreu 2007]. O autovetor associado à conectividade algébrica é denominado vetor de Fiedler. O vetor de Fiedler é importante para a TEG e pode ser encontrado em diversas abordagens, tais como na clusterização de grafos e desenvolvimento de algoritmos para a criação de *clusters* e também em confiabilidade de redes, vide [Wang e Mieghem 2008]. A Figura 1 apresenta o grafo G , sua matriz Laplaciana, sua conectividade algébrica e o autovetor de Fiedler. O grafo G foi obtido da base de dados de redes *Topology Zoo* e denominado GetNet [Topology Zoo 2017].

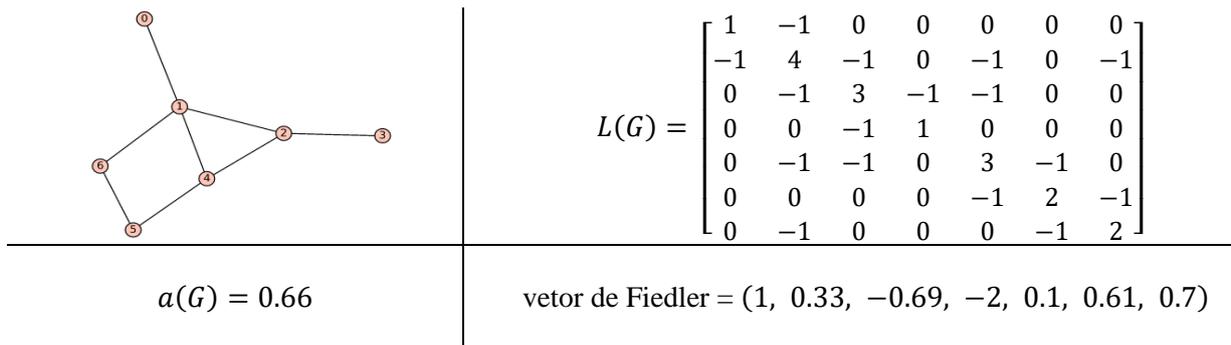


Figura 1 – Grafo G , sua matriz Laplaciana, conectividade algébrica e vetor de Fiedler.

Uma propriedade importante sobre $a(G)$ é sua relação com a conectividade de vértices e de arestas de um grafo. De acordo com Fiedler, em [Fiedler 1973], tem-se que $a(G) \leq k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$. Daí a importância que a conectividade algébrica possui para a conexidade de um grafo, uma vez que ela é limite inferior das conectividades de vértices e de arestas de G . Nesse sentido, podem ser encontrados diversos trabalhos na literatura que relacionam a conectividade algébrica com a robustez, como por exemplo [Chan e Akoglu 2015]. Um importante resultado relacionado à conectividade algébrica é o Teorema do Entrelaçamento, vide [Haemers 1995], que trata da variação de $a(G)$ a partir da inserção de uma aresta no grafo. O grafo $G + \{e\}$ é o grafo obtido de G pela inserção da aresta e .

Teorema 1: Seja G um grafo com n vértices e $e \in E$. Então:

$$\mu_1(G + e) \geq \mu_1(G) \geq \dots \geq \mu_{n-2}(G) \geq \mu_{n-1}(G + e) \geq \mu_{n-1}(G) \geq \mu_n(G + e) = \mu_n(G) = 0$$

A importância do Teorema 1 decorre que a partir dele tem-se um limite superior para o aumento da conectividade algébrica de um grafo a partir da inserção de uma aresta. De fato, após a inserção de uma aresta em um grafo G , pelo Teorema 1 tem-se que $\mu_{n-1}(G) \leq a(G + e) = \mu_{n-1}(G + e) \leq \mu_{n-2}(G)$. Por exemplo, considerando G da Figura 1 temos que seus autovalores são 5.3, 4.3, 2.6, 2.1, 0.88, 0.66, 0 e, portanto, a conectividade algébrica de G é $a(G) = 0.66$. Logo, $0.66 \leq a(G + e) \leq 0.88$. Ao inserirmos em G por exemplo, a aresta v_0v_3 , tem-se que $a(G + v_0v_3) = 0.82$.

2.2. Confiabilidade de Rede

A confiabilidade de uma rede é a probabilidade da rede permanecer conexa após a falha de vértices e/ou arestas do grafo que a modela. Neste trabalho focaremos apenas no caso em que as arestas são propensas a falha com a mesma probabilidade ρ e os vértices são perfeitamente confiáveis. As probabilidades de falha das arestas são consideradas independentes, isto é, a falha de uma aresta não altera a probabilidade de falha das demais arestas do grafo. Kelmans, em [Kelmans 1996], definiu a confiabilidade de uma rede pela seguinte expressão:

$$\hat{P}(G, \rho) = \sum_{i=\lambda}^{e(G)} m_i \rho^i (1 - \rho)^{e(G)-i}. \quad (1)$$

Observe que esta função probabilística envolve parâmetros determinísticos: a conectividade de aresta, $\lambda = \lambda(G)$, e o número de conjunto de cortes de arestas de cardinalidade i , $m_i(G)$. A função de não confiabilidade é dada pela seguinte expressão:

$$R(G, \rho) = 1 - P(G, \rho) = 1 - \sum_{i=\lambda}^{e(G)} m_i \rho^i (1 - \rho)^{e(G)-i}. \quad (2)$$

De acordo com Shpungin, [Shpungin 2006], o cálculo da confiabilidade é um problema da classe *NP-Hard*, uma vez que exige o cálculo de todos os m_i , para todo $\lambda \leq i \leq e(G)$. Para contornar esse problema é obtida uma aproximação de (2) através dos dois primeiros termos do somatório, para valores de $\rho \leq 1/2$, conforme mostrado em [Teixeira *et al.* 2014], dada pela expressão

$$\hat{R}(G, \rho) = 1 - \hat{P}(G, \rho) = 1 - m_\lambda \rho^\lambda (1 - \rho)^{e(G)-\lambda} + m_{\lambda+1} \rho^{\lambda+1} (1 - \rho)^{e(G)-\lambda-1}. \quad (3)$$



Dada a rede GetNet apresentada na Figura 1, sua confiabilidade através da equação (3), sabendo que para esta rede temos $m_\lambda = 2$ e $m_{\lambda+1} = 17$ e arbitrando $\rho = 0,1$ então $\hat{R}(G, 0,1) = 0.81$.

Como pode ser observado, o cálculo da confiabilidade leva em consideração o parâmetro da conectividade de aresta, λ , a qual é limitada inferiormente pela conectividade algébrica, vide [Fiedler 1973]. No entanto, de acordo com Jamakovic e Uhlig, [Jamakovic e Uhlig 2007], é mostrado que $a(G)$ tende a ficar significativamente distante de $\lambda(G)$, conforme $n \rightarrow \infty$. Por isso, a motivação do estudo em se analisar o quanto que a conectividade algébrica se distancia da conectividade de aresta conforme o número de vértices aumenta e sendo a conectividade de aresta um *input* para o cálculo da confiabilidade da rede. Nesta linha, analisamos se as estratégias de incremento de $a(G)$ proporcionam um bom aumento de $\hat{R}(G, \rho)$.

3. Metodologia

Na literatura existem algumas estratégias para o aumento da confiabilidade de uma rede através da inserção de arestas. Dentre elas podemos destacar a realizada por Silva, [Silva 2010], em sua tese de mestrado que fez alguns experimentos computacionais e observou que o melhor incremento na confiabilidade ocorria na inserção de uma aresta entre um vértice de menor grau e um vértice com menores medidas de centralidade. No entanto, estas estratégias possuem, em muitos casos reais, a desvantagem da necessidade de escolha entre diversas opções, uma vez que o grafo em estudo pode possuir mais de dois vértices com mesmo grau mínimo e/ou com menores medidas de centralidade. Por isso, optamos por introduzir nesse trabalho a estratégia do vetor de Fiedler, apresentada por Wang e Mieghem, [Wang e Mieghem 2008]. Essa estratégia consiste na inserção de uma aresta entre os pares de vértices com maior diferença em módulo de suas respectivas entradas do vetor de Fiedler, denotada por $\alpha = |u_i - u_j|$, onde u_i e u_j são as entradas do vetor de Fiedler correspondentes aos vértices v_i e v_j . Estes autores mostraram que dado um grafo G , a nova conectividade algébrica após a inserção de uma aresta e , $a(G + e)$, tem os seguintes limitantes:

$$\min \left\{ a(G) + \frac{\varepsilon \alpha^2}{\varepsilon + (2 - \alpha^2)}, \mu_{n-2}(G) - \varepsilon \right\} \leq a(G + e) \leq \min \{ \alpha^2 + a(G), \mu_{n-2}(G) \},$$

onde μ_{n-2} é o terceiro menor autovalor da matriz Laplaciana de G e o termo ε é obtido pela expressão $\varepsilon = \frac{\beta-2}{2} + \left(\frac{(\beta-2)^2}{4} + \beta(2 - \alpha^2) \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$, onde $\beta = \mu_{n-2}(G) - a(G) \geq 0$. Desta forma, quando maior for α , menor será ε , o que tende a aumentar o limite inferior de $a(G + e)$. Estas relações podem ser exemplificadas pela rede GetNet exibida na Figura 1 inserindo a aresta $e = v_1v_5$. Para esta rede, temos $a(G) = 0.66$, $\mu_{n-2}(G) = 0.88$, o vetor de Fiedler é $(1, 0.33, -0.69, -2.06, 0.10, 0.61, 0.70)$. Desta forma, temos que $\beta = 0.22$, $\alpha = 0.27$ e

$$\varepsilon = \frac{0.22 - 2}{2} + \left(\frac{(0.22 - 2)^2}{4} + 0.22(2 - 0.27^2) \right)^{\frac{1}{2}} = 0.21.$$

Portanto, $0.66 \leq a(G + v_1v_5) \leq 0.73$.

Chan e Akoglu [Chan e Akoglu 2015] também lançaram mão deste método com o objetivo de aumentar a conectividade algébrica de grafos através da metodologia de *edge rewiring*, isto é, remoção de uma aresta e inclusão de uma nova.

Definida a estratégia de inserção de arestas com o objetivo de aumentar a conectividade algébrica a ser avaliada, selecionamos 30 redes obtidas da base de dados *Topology Zoo*. O *Topology Zoo* é um projeto que visa levantar a topologia de redes ao redor do mundo e atualmente conta com 250 redes reais, apoiado pelo governo australiano e pela Universidade de Adelaide [Topology Zoo 2017]. Das 30 redes escolhidas tem-se 6 categorizadas como árvores e outras 24 não sendo árvore. Para todos estes casos realizamos todas as inserções possíveis de arestas e para cada uma destas novas redes geradas calculamos o valor da confiabilidade e da conectividade algébrica do novo



grafo, conforme o pseudocódigo exibido a seguir. Em todos os casos, a probabilidade de falha de arestas foi arbitrária e dada por $\rho = 0.1$.

Pseudocódigo 1: Rotina de inserção de arestas e cálculo da variação de parâmetros

Entrada: Grafo G , com n vértices e m arestas

1. Calcular a conectividade algébrica do grafo $G - a(G)$
2. Calcular o vetor de Fiedler do grafo G
3. Calcular a confiabilidade da rede modelada pelo grafo $G - \hat{R}(G, \rho)$
4. Identificar todas as w possibilidades de inserção de arestas (onde $|w| = C_{n,2} - m$)
5. Com k variando de 1 até w :
 - 5.1. Inserir a aresta e_k que liga os vértices v_i e v_j , tal que $i \neq j \forall i, j = 1, \dots, n$
 - 5.2. Calcular a conectividade algébrica $a(G + e_k)$
 - 5.3. Calcular a confiabilidade $\hat{R}((G + e_k), \rho)$
 - 5.4. Calcular o aumento percentual da conectividade algébrica e da confiabilidade de $(G + e_k)$ com relação à G
 - 5.5. Calcular $\alpha = |u_i - u_j|$
 - 5.6. Armazenar na matriz M o incremento percentual na conectividade algébrica, o aumento percentual na confiabilidade e o valor de α para a ligação entre os vértices v_i e v_j
 - 5.7. Remover a aresta e_k

Saída: Aumento percentual na conectividade algébrica e na confiabilidade da rede através da ligação entre os vértices v_i e v_j e respectivos $\alpha = |u_i - u_j|$

A rotina apresentada no Pseudocódigo 1 foi implementada em Python, utilizando o software matemático CoCalc, onde também foram realizados os cálculos de autovalores, autovetores e confiabilidade. O CoCalc pode ser acessado através do endereço www.cocalc.com. A Tabela 1 apresenta as 30 redes obtidas no *Topology Zoo*, com seus números de vértices, n , e arestas, m , e o número de conjuntos de corte de arestas de cardinalidade λ e $\lambda + 1$.

Tabela 1: Redes - Topology Zoo

Rede	n	m	m_λ	$m_{\lambda+1}$	Rede	n	m	m_λ	$m_{\lambda+1}$	Rede	n	m	m_λ	$m_{\lambda+1}$
Aarnet	19	22	6	131	EEnet	13	13	10	78	KAREN	25	28	13	290
Abilene	11	14	11	142	Epoc	6	7	6	35	KREONET	13	12	12	66
ATMnet	21	22	2	124	ERNET	30	31	24	450	MARWAN	16	15	15	105
BBNplanet	27	28	17	344	FUNET	25	30	3	134	NSF	13	14	3	56
BSONetwork	18	23	7	139	Gambia	28	28	17	361	PIONIER	36	39	13	497
BT Europe	23	37	7	242	GetNet	7	8	2	17	Restena	19	20	9	154



Claranet	15	18	6	97	GlobalNetRu	8	7	7	21	Rhnet	16	18	5	100
Compuserve	15	31	3	53	GRENA	16	15	15	105	RNP	31	34	15	429
DataXChange	6	11	1	10	ILAN	14	15	9	93	T-lex	12	13	8	70
EasyNet	19	24	6	134	JGN2plus-Japan	18	17	17	136	TWAREN	20	19	19	171

A fim de exemplificar a rotina apresentada no Pseudocódigo 1, tomemos como exemplo a rede GetNet, apresentada na Figura 1 da Seção 2 mostrando apenas a primeira iteração.

	<ol style="list-style-type: none"> 1) $a(G) = 0.66$ 2) Vetor de Fiedler = (1, 0.33, -0.69, 2.06, 0.1, 0.61, 0.7) 3) $\hat{R}(G, 0,1) = 0.81$ 4) Possibilidades de inserção de arestas: $v_0v_3, v_0v_2, v_0v_4, v_0v_5, v_0v_6, v_1v_3, v_1v_5, v_2v_5, v_2v_6, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_4v_6$
Entrada: Rede GetNet	Cálculos iniciais
	$a(G + e_1) = 0.82$ $\hat{R}((G + e_1), 0,1) = 0.95$ Aumento percentual em $a(G) = 25\%$ Aumento percentual em $\hat{R}(G, 0,1) = 16\%$ $\alpha = u_0 - u_3 = 3.06$
Iteração 1: Inserção da aresta $e_1 = v_0v_3$	Cálculos de parâmetros da Iteração 1
⋮	⋮

4. Resultados

Inicialmente nesta seção, apresentamos os resultados obtidos a partir da relação aumento da conectividade algébrica e o vetor de Fiedler. Das 30 redes analisadas, em apenas 7 casos o maior aumento da conectividade algébrica foi obtido através da inserção de uma aresta entre os vértices com maior diferença, em módulo, de suas respectivas entradas referentes ao vetor de Fiedler, ou seja, o maior valor de α . Esse resultado representa somente 23% dos casos. Em todas as outras redes o maior aumento de $a(G)$ não foi decorrente da inserção de uma aresta entre os vértices com maior valor de α , conforme mostra o Gráfico 1, denotado pela legenda “Sem relação”.

Relação entre aumento de $a(G)$ através de α máximo

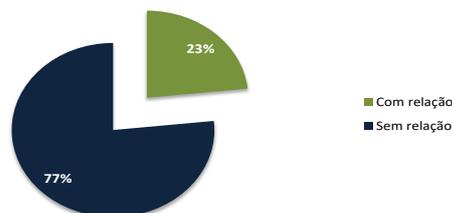


Gráfico 1: Relações entre aumento da conectividade algébrica e vetor de Fiedler.



É importante ressaltar que o número de apenas 23% dos casos nos quais o maior valor de α de fato acarretou o maior incremento de $a(G)$ não pode ser visto como contraditório com o esperado. Wang e Mieghem em [Wang e Mieghem 2008] mostram que existe uma correlação positiva entre α e $a(G)$ para grafos aleatórios, isto é, ao escolher o par de arestas com maior valor de α tem-se alta probabilidade de se obter um dos maiores aumentos na conectividade algébrica, porém não necessariamente é através dessa estratégia que se obtém o maior aumento. Este ponto pode ser mais bem explicado pelo Gráfico 2, no qual são levantadas para todas as 23 redes cujo maior aumento de $a(G)$ não foi o relacionado com o maior valor de α . Neste gráfico, o maior aumento percentual dentre todas as possibilidades de inserção de arestas realizadas é mostrado pela cor azul; o aumento percentual na conectividade algébrica obtido pela inserção de uma aresta no par de vértices com maior diferença do vetor de Fiedler pela cor vermelha e, por fim, o aumento percentual em $a(G)$ através da inserção de uma aresta aleatória, pela cor verde. É importante ressaltar que a escala do gráfico varia de 0 a 200%. Por exemplo, a rede MARWAN teve um aumento no valor de $a(G)$ de 0,075 para 0,22, o que representa um aumento percentual de quase 200% no valor da conectividade algébrica.

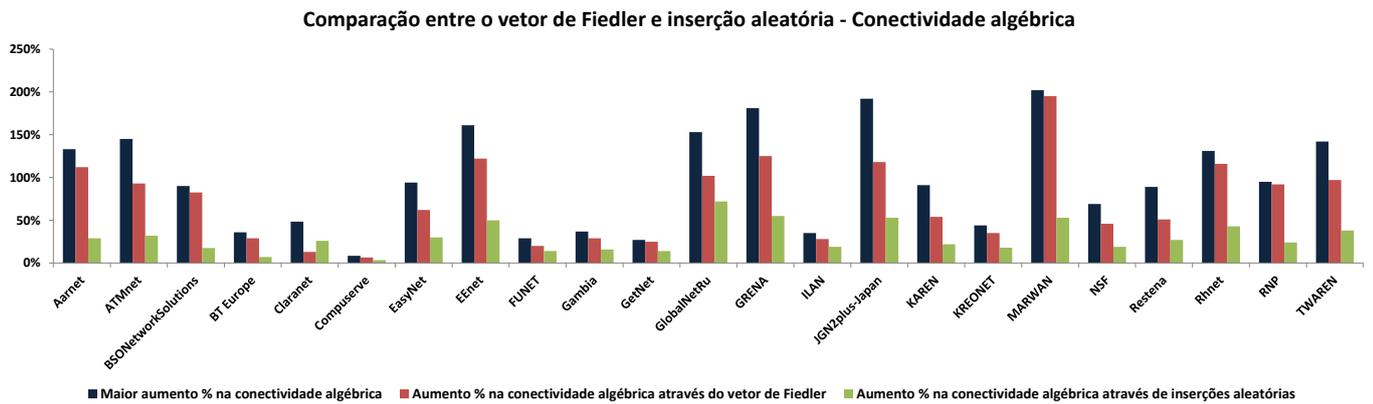


Gráfico 2: Comparação entre o maior aumento na conectividade algébrica, vetor de Fiedler e arestas aleatórias

Estes resultados podem ser exemplificados pela rede GetNet, conforme mostrado na Tabela 2 que está ordenada de forma não crescente pelo parâmetro α . Como pode ser visto, o maior incremento de $a(G)$ não foi obtido pelo maior valor de α , no entanto o resultado obtido através desta estratégia foi próximo ao maior possível quando comparado a outros. Vale ressaltar que os valores de u_i e u_j são referentes ao vetor de Fiedler da rede GetNet original, e não o vetor obtido após a inserção de uma aresta, pois o novo vetor não faz parte da estratégia de inserção.

Tabela 2: Relações de alfa e conectividade algébrica - Rede GetNet

v_i	v_j	$a(G + v_i v_j)$	u_i	u_j	α	Aumento em $a(G)$
0	3	0,829	1	-2,1	3,06	25%
3	6	0,845	-2,1	0,71	2,77	27%
3	5	0,824	-2,1	0,61	2,68	24%
1	3	0,889	0,34	-2,1	2,4	34%
3	4	0,847	-2,1	0,11	2,17	28%
0	2	0,741	1	-0,69	1,69	12%
2	6	0,763	-0,69	0,71	1,4	15%
2	5	0,739	-0,69	0,61	1,31	11%
0	4	0,683	1	0,11	0,9	3%
4	6	0,687	0,11	0,71	0,61	4%



0	5	0,666	1	0,61	0,39	0%
0	6	0,665	1	0,71	0,3	0%
1	5	0,667	0,34	0,61	0,28	1%

Como pode ser observado, a diferença entre o maior aumento obtido e a diferença obtida pela inserção indicada pelo vetor de Fiedler é significativamente menor que a diferença entre o maior aumento e o aumento através da inserção de uma aresta aleatória. Portanto, o método do vetor de Fiedler foi melhor, em todos os casos, do que a inserção de uma aresta aleatória, uma vez que em todos os testes esteve sempre mais próximo do maior incremento possível.

Agora, mostramos as relações entre o incremento na confiabilidade da rede e a estratégia de inserção de arestas através do vetor de Fiedler. Conforme mostra o Gráfico 3, das 30 redes analisadas, em 26 casos – 87% do total – o maior aumento da confiabilidade foi obtido através da inserção de uma aresta entre o par de vértices com maior valor de α , indicando boa relação entre essa estratégia e o aumento da confiabilidade da rede, $\hat{R}(G, \rho)$.

Relação entre aumento da confiabilidade através de α máximo

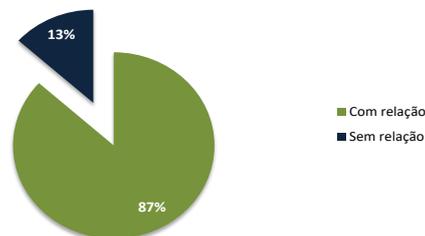


Gráfico 3: Relações entre aumento da confiabilidade e vetor de Fiedler

Tomemos novamente como exemplo a rede GetNet. Tem-se que a confiabilidade da rede é igual a 0.81, conforme calculado na Seção 2.2. A maior diferença em módulo das respectivas entradas do vetor de Fiedler da rede foi dada pelos vértices v_0 e v_3 e, conforme mostrado na Tabela 3 foi este mesmo par de vértices cuja inserção de uma aresta trouxe o maior aumento na confiabilidade, tal que $\hat{R}(G + v_0v_3, 0.1) = 0.95$, o que representa um aumento de 16% com relação à original.

Tabela 3: Relações de alfa e confiabilidade - Rede GetNet

v_i	v_j	$\hat{R}(G + v_i v_j, 0.1)$	u_i	u_j	α	Aumento em $\hat{R}(G, \rho)$
0	3	0,95	1	-2,1	3,06	16%
3	6	0,91	-2,1	0,71	2,77	12%
3	5	0,91	-2,1	0,61	2,68	12%
1	3	0,90	0,34	-2,1	2,4	11%
3	4	0,90	-2,1	0,11	2,17	11%
0	2	0,90	1	-0,69	1,69	11%
2	6	0,84	-0,69	0,71	1,4	3%
2	5	0,84	-0,69	0,61	1,31	3%
0	4	0,89	1	0,11	0,9	10%
4	6	0,83	0,11	0,71	0,61	2%
0	5	0,90	1	0,61	0,39	11%
0	6	0,90	1	0,71	0,3	11%
1	5	0,83	0,34	0,61	0,28	2%



As 4 redes que não seguiram a tendência foram: Compuserve, Gambia, PIONIER e T-lex. De forma similar, o Gráfico 4 apresenta, para estes casos, o maior aumento percentual obtido na confiabilidade, o aumento percentual obtido através da estratégia de inserção de aresta entre o par de vértices com maior valor de α e o aumento percentual na confiabilidade após a inserção aleatória de arestas. Como pode ser observado, embora este método não tenha trazido o maior aumento possível nestes casos, ele foi capaz de obter um incremento muito próximo do máximo obtido. Por exemplo, na rede Compuserve a diferença foi de 4.6 pontos percentuais e nas demais redes foi de apenas 1 ponto percentual quando comparamos o maior aumento possível da confiabilidade e o aumento da confiabilidade obtido por α . Novamente, o vetor de Fiedler obteve um resultado melhor em todos os casos quando comparado à uma inserção aleatória de aresta.

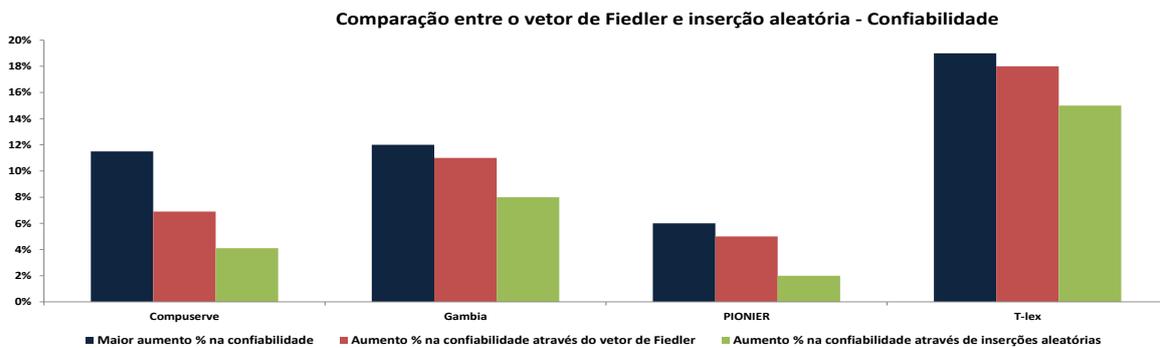


Gráfico 4: Comparação entre o maior aumento na confiabilidade, vetor de Fiedler e arestas aleatórias

Por fim, iremos avaliar a relação entre o aumento da conectividade algébrica e impacto deste aumento no incremento da confiabilidade da rede. Das 30 redes analisadas houve 4 casos nos quais a aresta inserida através da maior diferença entre o vetor de Fiedler, α , foi aquela que acarretou tanto no maior aumento da conectividade algébrica como também no maior aumento da confiabilidade da rede. Estas redes são: Abilene, BBNplanet, DataXChange e ERNET. A Tabela 4 mostra uma síntese dos resultados obtidos para a rede Abilene, mostrada na Figura 2, considerando os 10 primeiros maiores valores de α , dentre todas as 41 possibilidades de inserção de arestas para esta rede. Os valores de confiabilidade e conectividade algébrica são, para esta rede, respectivamente 0.92 e 0.32. Após a inserção de uma aresta entre os vértices v_0 e v_3 os aumentos de confiabilidade e conectividade algébrica foram, respectivamente, de 6% e 129%, sendo estes os maiores aumentos percentuais dentre todas as possibilidades de inserção de arestas.

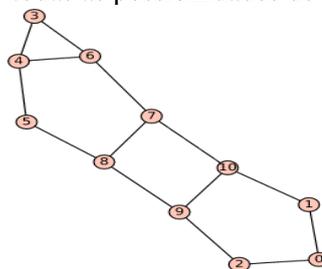


Figura 2: Rede Abilene

Tabela 4: Relações entre conectividade algébrica e confiabilidade - Rede Abilene

v_i	v_j	α	$a(G + v_i v_j)$	$\hat{R}(G + v_i v_j, 0, 1)$	Aumento em $\hat{R}(G, \rho)$	Aumento em $a(G)$
0	3	1,96	0,74	0,98	6%	129%
0	4	1,86	0,73	0,97	5%	126%
2	3	1,8	0,62	0,97	5%	93%
1	3	1,79	0,63	0,97	5%	95%



0	6	1,74	0,65	0,97	5%	102%
2	4	1,7	0,62	0,97	4%	94%
1	4	1,69	0,62	0,97	4%	92%
0	5	1,59	0,53	0,97	5%	64%
2	6	1,59	0,57	0,96	4%	77%
1	6	1,58	0,58	0,96	4%	80%

5. Conclusão

Embora muitos trabalhos na literatura apresentem uma relação da conectividade algébrica com a robustez da rede, tal que muitos destes buscam definir estratégias de inserções de arestas na rede com o objetivo de melhorar $\alpha(G)$, a literatura carece de definições formais tanto a respeito do conceito de robustez de uma rede, como também sobre a relação entre a robustez e a conectividade algébrica. Com o objetivo de tentar avaliar a relação entre estes dois conceitos, este trabalho trouxe para compor esta discussão o parâmetro de confiabilidade de uma rede. Com isso, buscamos avaliar os incrementos que a confiabilidade de uma rede tem a partir de estratégias abordadas na literatura cujo objetivo consiste em incrementar a conectividade algébrica utilizando o vetor de Fiedler. Para isso, foram escolhidas 30 redes reais da base de dados de redes *Topology Zoo*. Em todos estes casos foram realizadas todas as possíveis inserções de arestas e os respectivos cálculos de aumento percentual da conectividade algébrica e aumento percentual da confiabilidade da rede, quando comparado com o grafo original. Primeiramente, os resultados ratificaram a existência de uma relação entre o vetor de Fiedler e o aumento de $\alpha(G)$, conforme proposto por Wang e Mieghem [Wang e Mieghem 2008]. Neste sentido, é importante notar que a escolha da aresta a ser inserida, quando baseada no maior valor de α , não trouxe, na maioria dos casos, o maior incremento possível em $\alpha(G)$. Ainda assim, esta metodologia conseguiu, na maior parte dos testes, incrementos muito próximos do maior possível, indicando boa correlação positiva. No que tange à relação entre a estratégia do vetor de Fiedler e o incremento na confiabilidade da rede os resultados foram significativamente melhores: em 87% dos testes realizados a aresta inserida com a maior diferença α também foi a aresta que trouxe o maior aumento na confiabilidade da rede. Uma vez que o cálculo da confiabilidade da rede em todas as possíveis inserções de arestas é computacionalmente custoso, já que o cômputo de $\hat{R}(G, \rho)$ é da classe *NP-Hard*, a estratégia de inserção de arestas através da análise do vetor de Fiedler além de ser um bom método para a melhoria da conectividade algébrica também se mostrou um excelente método para o incremento da confiabilidade rede, permitindo ao tomador de decisões uma resposta rápida e computacionalmente menos custosa que o teste de todas as possíveis inserções. Este resultado também indica uma boa relação entre conectividade algébrica e confiabilidade da rede. Este trabalho se limitou à análise do método do vetor de Fiedler para inserção de arestas com o objetivo de se incrementar ao máximo $\alpha(G)$, porém a literatura também apresenta outros não explorados aqui, como: a análise entre os vértices mais distantes da rede, a verificação dos vértices com menores medidas de centralidade ou, simplesmente, a ligação entre vértices com menor grau. Cabe, portanto, para trabalhos futuros a verificação destes métodos e o impacto que eles trazem para o aumento da confiabilidade da rede, bem como a investigação dos motivos que fazem com que determinados grafos não tenham o maior incremento de $\hat{R}(G, \rho)$ obtido através da inserção de uma aresta entre os vértices com maiores valores de α .

6. Referências

- Abreu, N.M.M. (2007). Old and new results on algebraic connectivity of graphs. *Linear Algebra Appl.* 423. 53–73.
- Alenazi, M., Çetinkaya, E., Sterbenz, J. (2014). Cost-efficient algebraic connectivity optimization of backbone networks. *Optical Switching and Networking*. v.14, p.107 – 116.



- Biggs, N. (1993). Algebraic Graph Theory. Cambridge University Press, 2a. ed.
- Chan, H., Akoglu, L. (2015). Optimizing network robustness by edge rewiring: a general framework. Data Mining and Knowledge Discovery. p.1 – 31.
- Diestel, R. (2000). Graph Theory. Springer-Verlag, New York. Eletronic Edition.
- Haemers, W.H. (1995). Interlacing eigenvalues and graphs. Linear Algebra Appl. 226-228. p. 593-616.
- Kelmans, A. (1966). Connectivity of probabilistic networks. Automatic Telemekhanika, 3:98 – 116.
- Lyra, T.F., Oliveira, C.S. (2011). Um estudo sobre a confiabilidade de redes e medidas de centralidade em uma rede de coautoria. Revista Eletrônica Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento, v.3, n.2, p.160-172
- Merris, R. (1994). Laplacian matrices of graphs: a survey. Linear Algebra and its Applications, v. 197-198, p. 143 – 176.
- Nagarajan, H., Rathinam, S., Darbha, S. (2015). On maximizing algebraic connectivity of networks for various engineering applications. In: EuropeanControlConference, Austria.
- Oliveira, C.C., Justel, C.M. Rodrigues, S. (2012). Sobre o problema aumento máximo de conectividade algébrica. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2012. Rio de Janeiro. p. 4115 – 4125.
- Shpungin, Y. (2003). Combinatorial approach to reliability evaluation of network eith unreliable nodes and unreliable edges. International Journal of Computer Science, volume 1, 177-183, n. 3.
- Silva, T.S.A. (2010). Um estudo de medidas de centralidade e confiabilidade em redes. 54f. Dissertação (Mestrado em Tecnologia) – Programa de Pós-graduação em Tecnologia, Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca – CEFET/RJ. Rio de Janeiro.
- Topology Zoo. (2017). Disponível em: <<http://www.topology-zoo.org/>>. Acesso em 22 fev 2017.
- Wang, H., Mieghem, P.V. (2008). Algebraic connectivity optimization via link addition. Bionetics. n.22. Bruxelas, Bélgica.