Modelos de Programação Inteira para um Problema Integrado de Roteamento e Empacotamento

Lorrany Cristina da Silva[a] **e Thiago Alves de Queiroz**[a,b]
[a]Unidade de Matemática e Tecnologia, UFG-Regional Catalão,
Av. Dr. Lamartine P. Avelar, 1120, Setor Universitário, 75704-020, Catalão-GO.
cristina_lorrany@yahoo.com.br, taq@ufg.br

Franklina M. Bragion Toledo[b]
[b]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, ICMC-USP,
Av. Trabalhador São-Carlense, 400, Cx. Postal 668, 13560-970, São Carlos-SP.
fran@icmc.usp.br

RESUMO

Apresentam-se dois modelos de programação linear inteira para o problema que integra as decisões de roteamento e de empacotamento em duas dimensões. Para a versão do problema estudado, considera-se que o empacotamento dos itens não precisa ser sequencial, isto é, durante o empacotamento não é preciso obedecer a ordem dos clientes na rota de entrega, podendo haver o remanejamento da carga durante o descarregamento nos clientes. Ambos os modelos consideram o problema de forma completa, isto é, com todas as restrições inseridas logo no início da otimização, sendo que a resolução é feita pelo método *branch-and-cut*. O primeiro modelo é uma adaptação da literatura e envolve seis tipos diferentes de variáveis de decisão, enquanto o segundo modelo é mais compacto, com apenas três tipos de variáveis. A fim de validar os modelos, experimentos computacionais foram realizados sobre instâncias da literatura com número de clientes variando de 15 a 36 e itens de 15 até 114, mostrando que o modelo adaptado resulta em soluções com melhores gaps que o modelo compacto.

PALAVRAS CHAVE. Problema de Roteamento de Veículos. Problema de Empacotamento Ortogonal Bidimensional. Programação Linear Inteira.

Tópicos: L&T - Logística e Transportes, PM - Programação Matemática)

ABSTRACT

Two integer linear programming models are presented for the problem that integrates decisions of routing and packing in two dimensions. The version of the problem studied considers that the packing of the items does not need to be sequential, that is, the packing does not need to obey the order of the customers in the delivery route, so it is allowed to re-handle the cargo during the unloading at the customers. Both models consider the problem in its complete form, that is, with all constraints added at the beginning of the optimization, and these models are solved by a branch-and-cut method. The first model is an adaptation of the literature and it involves six different types of decision variables, while the second model is more compact, with only three types of variables. In order to validate the models, computational experiments were performed over instances from the literature with the number of customers ranging from 15 to 36 and items from 15 to 114, showing that the adapted model gives solutions with better gaps than the compact model.

KEYWORDS. Vehicle Routing Problem. Two-dimensional Orthogonal Packing Problem. Integer Linear Programmig.

Paper topics: L&T – Logistics and Transport, PM – Mathematical Programming)

1. Introdução

Incluir a restrição de carregamento no problema de roteamento de veículos resulta em um problema relevante para o ramo logístico, em especial, pela forte influência do carregamento na construção das rotas. Segundo Côté et al. [2017], a resolução destes problemas de forma hierárquica leva a resultados piores do que quando tratados de forma integrada, tanto em termos de valor da solução, quanto em número de veículos utilizados e ao aproveitamento da capacidade de carregamento. Ainda segundo tais autores, o aumento do custo da solução pode chegar, em média, a cerca de 7% entre as duas situações (resolver de forma integrada e não integrada).

No Brasil, a logística cresceu bastante e, assim, requer boas estratégias para melhorar o processo de tomada de decisão nos meios práticos. De acordo com uma pesquisa realizada pela Fundação Dom Cabral, o custo logístico estimado em relação à receita pode chegar a até 10%, sendo embutido geralmente no preço dos produtos [Resende e Sousa, 2012]. Desta forma, este trabalho considera dois problemas frequentes em sistemas logísticos, que são aqui tratados de forma integrada, ou seja, o problema de roteamento de veículos com restrições de empacotamento bidimensional. A sua representação por Iori et al. [2007] é dada como *Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading constraints* (2L-CVRP).

O 2L-CVRP consiste, de maneira geral, em obter rotas de custo total mínimo, as quais devem respeitar a capacidade de peso dos veículos e considerar a alocação de itens retangulares na base dos veículos sem que, para tanto, haja a sobreposição entre itens e os itens estejam inteiramente contidos nas bases. Ao considerar a versão bidimensional de carregamento, assume-se que não é permitido empilhar os itens, enquanto que ao considerar a versão irrestrita, pode-se ocorrer o remanejamento da carga durante a entrega dos itens nos clientes, isto é, não é preciso empacotar os itens conforme a ordem dos clientes visitados na rota [Hokama et al., 2016; Silva et al., 2016]. Além disso, o 2L-CVRP está na classe NP-difícil, pois integra dois problemas NP-difíceis [Garey e Johnson, 1979].

Zachariadis et al. [2013] desenvolveram um método de busca local para resolver o roteamento e uma heurística para resolver o empacotamento no 2L-CVRP. Os autores também propuseram um mecanismo de memória para melhorar a probabilidade de obter rotas com carregamentos viáveis. Já Abdal-Hammed et al. [2014] resolveram a versão irrestrita do 2L-CVRP usando uma heurística de busca em vizinhança larga. A heurística considera uma ordem de inserção de clientes e utiliza a *bottom left* para lidar com o empacotamento.

Dominguez et al. [2014] desenvolveram uma heurística denominada por *Multistart Biased-Randomized Algorithm* para resolver o 2L-CVRP irrestrito e que considera a rotação dos itens em 90 graus. Essa heurística usa a ideia de *multistart* para fugir de mínimos locais e a randomização durante a construção das soluções. Por outro lado, uma heurística de busca em vizinhança variável foi proposta por Wei et al. [2015] para resolver o 2L-CVRP nas versões irrestrita e sequencial, sendo que a versão sequencial pode ter uma solução de pior qualidade, pois exige um empacotamento dos itens respeitando a ordem dos clientes em cada rota. O empacotamento é resolvido por meio de uma heurística *skyline* com várias regras de posicionamento para os itens. Além disso, empacotamentos viáveis são guardados em uma estrutura chamada *trie* de forma a acelerar a resolução e evitar rotas repetidas.

Hokama et al. [2016] apresentaram um algoritmo *Branch-and-Cut* (B&C) para resolver o 2L-CVRP sequencial, em que foram usadas rotinas de separação da literatura para lidar com o roteamento, além de ter sido proposto algoritmos para lidar com o empacotamento sobre uma malha de pontos. Côté et al. [2017] discutiram a respeito da integração do roteamento com o empacotamento, em que apresentaram um modelo de programação linear inteira para o 2L-CVRP, além de algoritmos para resolver o problema de empacotamento, uma vez que um dos gargalos apontado está na checagem da rota quanto a viabilidade do empacotamento.

Neste trabalho, faz-se a comparação entre dois modelos de programação linear inteira para o 2L-CVRP. O primeiro modelo é uma adaptação da formulação de programação linear inteira proposta por Martinez e Amaya [2013] para resolver o 2L-CVRP irrestrito, com itens circulares, múltiplas viagens e janela de tempo. O segundo modelo é a proposta de uma formulação mais compacta, em que há a diminuição de duas para apenas uma variável associada ao roteamento, além de uma formulação mais simples para tratar as restrições de empacotamento, em que se usa a base do veículo discretizada em uma malha de pontos obtida de acordo com a proposta de Herz [1972].

A próxima seção apresenta uma definição formal do problema e os modelos desenvolvidos para o 2L-CVRP. Na Seção 4 são reportados como os experimentos computacionais foram realizados, bem como os resultados obtidos. E, por fim, as conclusões são apresentadas na última seção.

2. Definição do 2L-CVRP

O 2L-CVRP é definido sobre um grafo não direcionado completo $G = (V^+, E)$, em que $V^+ = \{0, 1, \ldots, n, n+1\}$ contém os vértices 0 e $n+1$ correspondendo ao depósito, ao passo que os clientes são os vértices $j = 1, 2, \ldots, n$. Além disso, E é o conjunto de arestas entre os vértices, definido por $E = \{(i, j) : i, j \in V^+\}$, tal que a cada aresta é associado um custo não negativo c_{ij}.

Seja K um conjunto de veículos idênticos, cada qual com capacidade de carga P e estando disponível no depósito. As dimensões da base retangular de cada veículo são L (largura) e A (comprimento), resultando em uma área total $At = LA$. Para cada cliente j há um conjunto M_j com os seus itens, tal que cada item $m \in M_j$ possui largura l_j^m, comprimento a_j^m e peso p_j^m, para $m = 1, 2, \ldots, |M_j|$. Segue que a área total dos itens de j é dada por $at_j = \sum_{m=1}^{|M_j|} l_j^m a_j^m$, ao passo que o peso total é dado por $pt_j = \sum_{m=1}^{|M_j|} p_j^m$. Assume-se que os valores associados as dimensões são todos inteiros positivos, sendo que uma mudança de escala pode ser aplicada caso haja valores reais.

O 2L-CVRP possui as seguintes restrições que devem ser atendidas: (i) o número de rotas pode ser menor ou igual ao número de veículos disponíveis; (ii) as rotas devem iniciar e terminar no depósito; (iii) a cada rota está associado um único veículo; (iv) a capacidade de peso e de área do veículo não podem ser excedidas ao considerar os clientes da rota; (v) permitem-se rotas que atendem um único cliente; (vi) um cliente deve ser visitado por somente um veículo e uma única vez, em que todos os seus itens são entregues por completo; e, (vii) os itens devem ser empacotados na base retangular do veículo sem que haja sobreposição e estejam inteiramente contidos dentro da base. O objetivo do 2L-CVRP é determinar um conjunto de até $|K|$ rotas cuja soma total do custo de cada rota seja mínima. O custo de uma rota é mensurado a partir da soma das arestas da rota que foram percorridas pelo veículo.

No empacotamento, a base do veículo pode ser discretizada em uma malha de pontos com distância unitária, pois os itens possuem dimensões inteiras. Porém, com essa distância, tem-se um número considerável de variáveis associadas às posições no empacotamento. Herz [1972] propôs o conceito de *canonical dissections* para cortes bidimensionais, assim tornando a resolução mais eficiente e sem perda da solução ótima. Os conjuntos em (1) a (2) correspondem às coordenadas dos pontos de Herz [1972] ao longo do eixo x (largura) e do eixo y (comprimento), respectivamente.

$$P_H = \{p \in \mathbb{Z} | p = \sum_{j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}} \sum_{m \in M_j} \rho_j^m l_j^m, 0 \le p \le L, \rho_j^m \in \{0, 1\}, j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, m \in M_j\}, \quad (1)$$

$$Q_H = \{q \in \mathbb{Z} | q = \sum_{j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}} \sum_{m \in M_j} \rho_j^m a_j^m, 0 \le p \le A, \rho_j^m \in \{0, 1\}, j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, m \in M_j\}. \quad (2)$$

A partir dos conjuntos em (1) a (2), obtêm-se os respectivos conjuntos P_j^m e Q_j^m de coordenadas válidas para cada item m do cliente j. Note que as coordenadas após $L - l_j^m$ e $A - a_j^m$ não são válidas para empacotar o item m de qualquer cliente j.

3. Modelos para o 2L-CVRP

Apresentam-se adiante dois modelos de programação linear inteira para resolver o 2L-CVRP irrestrito. Ambos os modelos consistem de formulações para o problema em que todas as restrições são inseridas antes de iniciar a otimização, não sendo preciso detectar desigualdades violadas durante a otimização. O primeiro modelo é uma formulação com variáveis de até três índices para as decisões de roteamento e até seis índices para as decisões de empacotamento. O segundo modelo consiste em uma formulação com variáveis de até três índices para o roteamento e cinco índices para o empacotamento.

3.1. Modelo Adaptado

Em Martinez e Amaya [2013] há um modelo de programação linear inteira para a versão do 2L-CVRP em que os itens são circulares, há múltiplas viagens e há janelas de tempo. Aqui, adapta-se o modelo de tais autores para lidar com a versão do 2L-CVRP irrestrito, em que se assume o uso de até (e não necessariamente todos os) K veículos disponíveis, não se considera janela de tempo e múltiplas viagens, e inserem-se restrições para eliminar sub-rotas adaptadas de Kara [2010].

Seja w_{ijk} a variável binária que recebe valor 1 se a aresta (i, j), com $i, j \in V^+$, for atravessada pelo o veículo $k \in K$, caso contrário recebe 0. Seja a variável z_{jk} recebendo o valor 1 se o cliente j é visitado pelo veículo k, caso contrário vale 0. A variável u_j indica a quantidade de carga acumulada, em peso, até visitar o cliente j na rota. As variáveis ${x'}_{jmk}$ e ${y'}_{jmk}$ são as coordenadas reais no eixo x e y, respectivamente, onde o item m do cliente j é empacotado na superfície do veículo k. Por fim, tem-se a variável binária auxiliar $\sigma_{bijmm'k}$ usada para evitar a sobreposição entre algum lado b do item m do cliente i com o item m' do cliente j, no veículo k. A formulação completa do modelo é dada na função objetivo (3) com as restrições (4) a (29).

Minimizar

$$\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E^+} c_{ij} w_{ijk} \tag{3}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in V^+} w_{ijk} = z_{ik}, \qquad \forall i \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, \forall k \in K \tag{4}$$

$$\sum_{k \in K} z_{jk} = 1, \qquad \forall j \in V^+ \backslash \{0, n+1\} \tag{5}$$

$$\sum_{\{i \in V^+ : i \neq h\}} w_{ihk} = \sum_{\{j \in V^+ : j \neq h\}} w_{hjk}, \qquad \forall h \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, \forall k \in K \tag{6}$$

$$\sum_{j \in V^+ \backslash \{0\}} w_{0jk} \leq 1, \qquad \forall k \in K \tag{7}$$

$$\sum_{i \in V^+ \backslash \{n+1\}} w_{i(n+1)k} = \sum_{j \in V^+ \backslash \{0\}} w_{0jk}, \qquad \forall k \in K \tag{8}$$

$$\sum_{k \in K} (w_{ijk} + w_{jik}) \leq 1, \qquad \forall (i, j) \in E^+ \tag{9}$$

$$\sum_{j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}} (w_{0jk} + w_{(n+1)jk}) \leq 1, \qquad \forall k \in K \tag{10}$$

$$\sum_{i \in V^+ \backslash \{0, n+1\}} (w_{i0k} + w_{i(n+1)k}) \leq 1, \qquad \forall k \in K \tag{11}$$

$$u_i - u_j + P w_{ijk} + (P - pt_i - pt_j) w_{jik} \leq P - pt_j, \qquad \forall i, j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, \forall k \in K \tag{12}$$

$$u_j \leq pt_j w_{0jk} + P(1 - w_{0jk}), \qquad \forall j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, \forall k \in K \tag{13}$$

$$u_i + \sum_{\{j \in V^+ \backslash \{0,n+1\} : j \neq i\}} pt_j w_{ijk} \leq P, \qquad \forall i \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, \forall k \in K \tag{14}$$

$$\sum_{j \in V^+ \backslash \{0,n+1\}} z_{jk} pt_j \leq P, \qquad \forall k \in K \tag{15}$$

$$\sum_{j \in V^+ \backslash \{0,n+1\}} z_{jk} at_j \leq At, \qquad \forall k \in K \tag{16}$$

$$x'_{jmk} \leq z_{jk}(L - l_j), \qquad \forall j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, \forall m \in M_j, \forall k \in K \tag{17}$$

$$y'_{jmk} \leq z_{jk}(A - a_j), \qquad \forall j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, \forall m \in M_j, \forall k \in K \tag{18}$$

$$x'_{imk} + l_{im} \leq x'_{jm'k} + \sigma_{1ijmm'k}\text{max}(L, C), \tag{19}$$
$$\forall i, j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, \forall m \in M_i, \forall m' \in M_j, \forall k \in K | i \leq j \text{ ou } (i = j \text{ e } m \neq m')$$

$$x'_{jm'k} + l_{jm'} \leq x'_{imk} + \sigma_{2ijmm'k}\text{max}(L, C), \tag{20}$$
$$\forall i, j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, \forall m \in M_i, \forall m' \in M_j, \forall k \in K | i \leq j \text{ ou } (i = j \text{ e } m \neq m')$$

$$y'_{imk} + a_{im} \leq y'_{jm'k} + \sigma_{3ijmm'k}\text{max}(L, C), \tag{21}$$
$$\forall i, j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, \forall m \in M_i, \forall m' \in M_j, \forall k \in K | i \leq j \text{ ou } (i = j \text{ e } m \neq m')$$

$$y'_{jm'k} + a_{jm'} \leq y'_{imk} + \sigma_{4ijmm'k}\text{max}(L, C), \tag{22}$$
$$\forall i, j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, \forall m \in M_i, \forall m' \in M_j, \forall k \in K | i \leq j \text{ ou } (i = j \text{ e } m \neq m')$$

$$\sum_{b=1}^{4} \sigma_{bijmm'k} \leq 3 + (1 - z_{ir}) + (1 - z_{jk}), \tag{23}$$
$$\forall i, j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, \forall m \in M_i, \forall m' \in M_j, \forall k \in K | i \leq j \text{ ou } (i = j \text{ e } m \neq m')$$

$$w_{ijk} \in \{0, 1\}, \qquad \forall (i, j) \in E^+, \forall k \in K \tag{24}$$

$$z_{jk} \in \{0, 1\}, \qquad \forall j \in V^+, \forall k \in K \tag{25}$$

$$pt_j \leq u_j \leq P, \qquad \forall j \in V^+ \backslash \{0, n+1\} \tag{26}$$

$$0 \leq x'_{jm'k} \leq L, \qquad \forall j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, \forall m' \in M_j, \forall k \in K \tag{27}$$

$$0 \leq y'_{jm'k} \leq A, \qquad \forall j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, \forall m' \in M_j, \forall k \in K \tag{28}$$

$$\sigma_{bijmm'k} \in \{0, 1\}, \tag{29}$$
$$b = 1, \ldots, 4, \forall i, j \in V^+ \backslash \{0, n+1\}, m \in M_i, m' \in M_j, k \in K | i \leq j \text{ ou } (i = j \text{ e } m \neq m')$$

A função objetivo (3) representa o custo total associado as rotas, que deve ser mínimo. As restrições (4) garantem que o cliente i é atendido pelo veículo k quando existe uma aresta saindo de i para algum cliente usando o veículo k, já as restrições em (5) asseguram que o cliente seja visitado uma única vez, isto é, esteja em uma única rota. As restrições de (6) a (8) estão relacionadas a conservação de fluxo para cada rota de forma que o número de arestas que chegam em um cliente h é igual ao número de arestas que partem de h, além disso permitem a utilização de um número menor ou igual ao de veículos disponíveis. As restrições (9) impõem que no máximo um veículo vai atravessar a aresta de i para j ou a aresta de j para i, mas não ambas. Já as restrições em (10) e (11) garantem que cada veículo k só pode executar apenas uma rota partindo do depósito, visitando um ou mais clientes, e retornando ao depósito.

As restrições em (12) a (14) servem para eliminar sub-rotas e foram obtidas de Kara [2010]. Essas restrições consistem em melhorias sobre as restrições originais propostas por Miller et al. [1960] e representam a carga acumulada, em peso, para visitar os clientes. As restrições (15) e (16) asseguram, respectivamente, que o peso e a área total de carga do veículo não sejam extrapolados. As restrições (17) e (18) garantem que os itens não devem ser empacotados em posições que os façam exceder as dimensões do veículo, enquanto as restrições em (19) a (23) são para evitar a sobreposição entre os itens indicando que um dos itens deve ser posicionado ou abaixo, ou acima, ou a esquerda, ou a direita do outro item. Por fim, as restrições de (24) a (29) expressam o domínio das variáveis.

3.2. Modelo Proposto

O modelo proposto surge a partir de uma mudança no modelo adaptado buscando diminuir os tipos e o número de variáveis de decisão. Dessa forma, ele faz uso das variáveis w_{ijk} e u_j para o lidar com o roteamento. Para a parte do empacotamento, definem-se as variáveis a_{jkmpq}, que são binárias e recebem o valor 1 se o item m, do cliente j e levado pelo veículo k, é empacotado com seu canto inferior esquerdo no ponto de coordenadas $p \in P_j^m$ e $q \in Q_j^m$ da malha de pontos associada a base do veículo, e 0 caso contrário. A formulação do modelo proposto possui a função objetivo em (30) e as restrições em (31) a (47).

Minimizar

$$\sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in E^+} c_{ij}w_{ijk} \tag{30}$$

Sujeito a:

$$\sum_{k\in K}\sum_{j\in V^+} w_{ijk} = 1, \qquad \forall i \in V^+\backslash\{0, n+1\} \tag{31}$$

$$\sum_{\{i\in V^+:i\neq h\}} w_{ihk} = \sum_{\{j\in V^+:j\neq h\}} w_{hjk}, \qquad \forall h \in V^+\backslash\{0, n+1\}, \forall k \in K \tag{32}$$

$$\sum_{j\in V^+\backslash\{0\}} w_{0jk} \leq 1, \qquad \forall k \in K \tag{33}$$

$$\sum_{i\in V^+\backslash\{n+1\}} w_{i(n+1)k} = \sum_{j\in V^+\backslash\{0\}} w_{0jk}, \qquad \forall k \in K \tag{34}$$

$$\sum_{k\in K}(w_{ijk} + w_{jik}) \leq 1, \qquad \forall (i,j) \in E^+ \tag{35}$$

$$\sum_{j\in V^+\backslash\{0,n+1\}} (w_{0jk} + w_{(n+1)jk}) \leq 1, \qquad \forall k \in K \tag{36}$$

$$\sum_{i\in V^+\backslash\{0,n+1\}} (w_{i0k} + w_{i(n+1)k}) \leq 1, \qquad \forall k \in K \tag{37}$$

$$u_i - u_j + Pw_{ijk} + (P - pt_i - pt_j)w_{jik} \leq P - pt_j, \qquad \forall i,j \in V^+\backslash\{0, n+1\}, \forall k \in K \tag{38}$$

$$u_j \leq pt_j w_{0jk} + P(1 - w_{0jk}), \qquad \forall j \in V^+\backslash\{0, n+1\}, \forall k \in K \tag{39}$$

$$u_i + \sum_{\{j\in V^+\backslash\{0,n+1\}:j\neq i\}} pt_j w_{ijk} \leq P, \qquad \forall i \in V^+\backslash\{0, n+1\}, \forall k \in K \tag{40}$$

$$\sum_{i \in V^+ \setminus \{0,n+1\}} \sum_{j \in V^+} w_{ijk} pt_i \leq P, \qquad \forall k \in K \tag{41}$$

$$\sum_{i \in V^+ \setminus \{0,n+1\}} \sum_{j \in V^+} w_{ijk} at_i \leq At, \qquad \forall k \in K \tag{42}$$

$$\sum_{p \in P_j^m} \sum_{q \in Q_j^m} a_{jkmpq} = \sum_{i \in V^+} w_{ijk}, \qquad \forall j \in V^+ \setminus \{0, n+1\}, \forall m \in M_j, \forall k \in K \tag{43}$$

$$\sum_{j \in V^+ \setminus \{0,n+1\}} \sum_{m \in M_j} \sum_{\{p \in P_j^m : s - l_j^m + 1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Q_j^m : t - a_j^m + 1 \leq q \leq t\}} a_{jkmpq} \leq 1, \tag{44}$$
$$\forall s \in P_H, \forall t \in Q_H, \forall k \in K$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P_j^m} \sum_{q \in Q_j^m} a_{jkmpq} = 1, \qquad \forall j \in V^+ \setminus \{0, n+1\}, \forall m \in M_j \tag{45}$$

$$w_{ijk} \in \{0, 1\}, \qquad \forall (i, j) \in V^+, \forall k \in K \tag{46}$$

$$pt_j \leq u_j \leq P, \qquad \forall j \in V \setminus \{0\} \tag{47}$$

$$a_{jkmpq} \in \{0, 1\}, \qquad \forall j \in V^+ \setminus \{0, n+1\}, \forall k \in K, \forall m \in M_j, \forall p \in P_j^m, \forall q \in Q_j^m \tag{48}$$

A função objetivo (30) representa o custo total das rotas, que deve ser mínimo. As restrições (31) garantem que o cliente i é atendido pelo veículo k se, e somente se, existe uma aresta saindo de i para algum outro cliente j também usando o veículo k. As restrições (32) a (42) são iguais a do modelo adaptado.

As restrições (43) a (45) referem-se ao empacotamento, seguindo a ideia de alocar os itens do cliente j, atendido pelo veículo k, sobre os pontos de Herz [1972]. As restrições em (43) acoplam as variáveis de roteamento com as de empacotamento, dizendo que o item m do cliente j é empacotado na base do veículo k se, e somente se, o veículo k passa por esse cliente a partir de algum vértice i. Já as restrições em (44) são para evitar a sobreposição entre os itens, assim impondo que cada ponto da malha $P_H \times Q_H$ da base de cada veículo k seja coberto por no máximo um item m de algum cliente j que é atendido por esse mesmo veículo. As restrições em (45) são para assegurar que todos os itens sejam empacotados, enquanto que as restrições (46) a (48) indicam o domínio das variáveis.

4. Experimentos Computacionais

Apresentam-se os resultados computacionais para a resolução de instâncias do 2L-CVRP propostas na literatura, sendo que os resultados são comparados entre os dois modelos desenvolvidos. Os modelos foram codificados na linguagem C++ utilizando o *framework* para *branch-and-cut* presente no pacote de otimização *Gurobi Optimizer* versão 7.0. Os testes foram realizados em um computador com processador Intel Core i5-3570K de 3,40 GHz, 4 GB de memória RAM e sistema operacional Linux Ubuntu 14.04 LTS. Além disso, atribuiu-se um tempo limite de 7.200,00 segundos para a resolução de cada instância.

Os testes consideram 60 instâncias[1] com número de clientes n entre 15 a 36 e o número total de itens M de 15 a 114, todas derivadas por Iori et al. [2007] a partir do problema de roteamento de veículos. As instâncias estão organizadas em 12 conjuntos, com diferentes classes, e cada qual fornecem: o número de clientes, a quantidade de veículos disponíveis, o número total de itens, a capacidade do veículo, o comprimento e a largura da base do veículo, as coordenadas dos clientes e do depósito, e as dimensões dos itens de cada cliente. Nas instâncias, o custo c_{ij} de cada aresta é dado pela distância euclidiana entre os vértices pegando apenas o valor inteiro.

[1]http://www.or.deis.unibo.it/

As Tabelas 1 e 2 trazem informações como o nome de cada instância, a classe, a quantidade de clientes (n), a quantidade total de itens (M), a quantidade de veículos usados (K); os resultados do modelo adaptado, contendo o tempo total gasto em segundos, o valor da solução e o GAP (em porcentagem) retornado pelo *Gurobi*; e, igualmente, os resultados encontrados pelo modelo proposto. As tabelas contêm ainda uma última coluna com a diferença percentual do valor da solução, sendo calculada como $(100 \times (\text{Modelo Proposto})/(\text{Modelo Adaptado}) - 100)$. Os melhores resultados se encontram em negrito nas tabelas para melhor vizualização.

Observando os resultados nas tabelas, tem-se que os dois modelos encontraram para apenas 4 das 60 instâncias o valor ótimo (GAP igual a 0%). Para as demais instâncias foram encontradas soluções viáveis com o GAP percentual médio de 35,76% e 36,73% para o modelo adaptado e o modelo proposto, respectivamente. Para algumas instâncias (veja E026-08m e E036-11h), o modelo proposto não conseguiu retornar qualquer solução viável dentro do tempo de 7.200,00 segundos, sendo que o modelo adpatado não consegue encontrar solução apenas de uma instância (veja E026-08m.5).

Destaca-se que o modelo adaptado encontrou solução para 59 instâncias, enquanto o modelo proposto não encontrou solução para 10 das 60 instâncias. O tempo computacional gasto pelo modelo adaptado foi, em média, de 6.811,53 segundos, enquanto o modelo proposto precisou de 7.006,04 segundos, em média. Por fim, observa-se pela diferença percentual que os dois modelos encontraram 7 soluções iguais, ao passo que o modelo proposto encontrou 12 soluções com valores menores (melhores, pois teve diferença negativa), mas no geral o modelo proposto teve comportamento inferior.

5. Conclusões Finais

Neste trabalho foi abordado o problema de roteamento de veículos capacitado com restrições de empacotamento bidimensional (2L-CVRP), o qual surge a partir da integração de dois problemas de otimização combinatória e que busca por um conjunto de rotas de custo total mínimo em que o empacotamento bidimensional dos itens dos clientes em cada rota deve ser viável.

Dois modelos foram apresentados para resolver o 2L-CVRP na sua versão irrestrita, porém diferindo no tipo e quantidade das variáveis de decisão consideradas. O primeiro modelo é uma adaptação da literatura, ao passo que o modelo proposto possui variáveis de até três índices para o roteamento e até cinco índices para o empacotamento, sendo mais compacto do que o modelo adaptado.

Os experimentos computacionais foram realizados para 12 classes de instâncias da literatura, cada classe contendo cinco diferentes instâncias, que variam na quantidade e tipo de itens por cliente. Na comparação entre os modelos, tem-se que o modelo adaptado e o modelo proposto conseguiram encontrar a solução ótima para 4 das 60 instâncias tratadas, sendo perceptível que a dificuldade computacional aumenta de acordo com o aumento no número de clientes e itens. Por outro lado, o modelo adaptado teve um comportamento melhor, com um GAP inferior ao do modelo proposto para 38 das 60 instâncias.

Trabalhos futuros devem investigar a inserção de novas restrições e cortes visando acelerar a convergência do modelo proposto, bem como buscar por outros modelos envolvendo menos variáveis de decisão. Busca-se também pela proposta de métodos heurísticos para lidar com instâncias envolvendo mais clientes e itens.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq - processos 165896/2015-9, 308312/2016-3 e 306918/2014-5) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG).

Tabela 1: Comparação dos resultados entre o modelo adaptado o modelo proposto (continua...).

Instâncias	Classe	n	M	K	Modelo Adaptado			Modelo Proposto			Diferença (%)
					Tempo(s)	Valor da Solução	GAP (%)	Tempo(s)	Valor da Solução	GAP (%)	
E016-03m	1	15	15	3	309,46	**273**	0,00	582,53	**273**	0,00	0,00
	2	15	24	3	944,03	**273**	0,00	7.200,00	338	34,91	23,81
	3	15	31	3	7.200,00	280	2,50	7.200,00	-	-	-
	4	15	37	4	7.200,00	**277**	9,38	7.200,00	280	27,78	1,08
	5	15	45	4	7.200,00	**273**	13,18	7.200,00	279	21,51	2,20
E016-05m	1	15	15	5	7.200,00	**329**	6,68	3.668,00	**329**	0,00	0,00
	2	15	25	5	7.200,00	**329**	11,85	7.200,00	**329**	12,16	0,00
	3	15	31	5	7.200,00	**347**	19,02	7.200,00	351	27,35	1,15
	4	15	40	5	7.200,00	**329**	21,58	7.200,00	**329**	22,79	0,00
	5	15	48	5	7.200,00	339	27,73	7.200,00	**329**	19,76	-2,95
E021-04m	1	20	20	4	7.200,00	**352**	17,89	7.200,00	**352**	19,32	0,00
	2	20	29	5	7.200,00	**389**	28,79	7.200,00	430	40,46	10,54
	3	20	46	5	7.200,00	**497**	48,69	7.200,00	510	50,98	2,62
	4	20	44	5	7.200,00	390	32,05	7.200,00	**384**	34,37	-1,54
	5	20	49	5	7.200,00	382	32,46	7.200,00	**369**	31,43	-3,40
E021-06m	1	20	20	6	7.200,00	441	27,22	7.200,00	**423**	17,26	-4,08
	2	20	32	6	7.200,00	**423**	28,36	7.200,00	471	39,49	11,35
	3	20	43	6	7.200,00	**465**	36,55	7.200,00	467	39,18	0,43
	4	20	50	6	7.200,00	**465**	36,77	7.200,00	510	45,09	9,68
	5	20	62	6	7.200,00	**473**	40,59	7.200,00	520	45,77	9,94
E022-04g	1	21	21	4	7.200,00	368	15,48	7.200,00	**367**	12,81	-0,27
	2	21	31	4	7.200,00	**377**	25,73	7.200,00	402	33,83	6,63
	3	21	37	4	7.200,00	**376**	27,39	7.200,00	441	40,13	17,29
	4	21	41	4	7.200,00	**424**	36,32	7.200,00	425	38,82	0,24
	5	21	57	5	7.200,00	385	32,46	7.200,00	**377**	28,38	-2,08
E022-06m	1	21	21	6	7.200,00	494	43,81	7.200,00	**489**	30,06	-1,01
	2	21	33	6	7.200,00	**489**	38,65	7.200,00	507	44,77	3,68
	3	21	40	6	7.200,00	**524**	42,93	7.200,00	529	46,88	0,95
	4	21	57	6	7.200,00	**537**	46,18	7.200,00	607	56,84	13,04
	5	21	56	6	7.200,00	**501**	43,51	7.200,00	532	50,18	6,19

Tabela 2: Comparação dos resultados entre o modelo adaptado e o modelo proposto (continuação...).

Instâncias	Classe	n	M	K	Modelo Adaptado			Modelo Proposto			Diferença (%)
					Tempo(s)	Valor da Solução	GAP (%)	Tempo(s)	Valor da Solução	GAP (%)	
E023-03g	1	22	22	3	2.134,67	**558**	0,00	6.455,86	**558**	0,00	0,00
	2	22	32	5	7.200,00	**797**	36,63	7.200,00	912	49,78	14,43
	3	22	41	5	7.200,00	**715**	32,03	7.200,00	778	41,64	8,81
	4	22	51	5	7.200,00	802	40,15	7.200,00	**768**	40,36	-4,24
	5	22	55	6	7.200,00	**717**	35,00	7.200,00	808	42,69	12,69
E023-05s	1	22	22	5	2.103,93	**558**	0,00	6.456,00	**558**	0,00	0,00
	2	22	29	5	7.200,00	**732**	30,74	7.200,00	755	39,34	3,14
	3	22	42	5	7.200,00	**746**	35,39	7.200,00	1.006	53,43	34,85
	4	22	48	5	7.200,00	**733**	34,24	7.200,00	766	41,39	4,50
	5	22	52	6	7.200,00	**690**	31,73	7.200,00	740	37,97	7,25
E026-08m	1	25	25	8	7.200,00	821	38,64	7.200,00	**638**	40,75	-22,29
	2	25	40	8	7.200,00	**648**	41,20	7.200,00	699	49,92	7,87
	3	25	61	8	7.200,00	692	50,28	7.200,00	-	-	-
	4	25	63	8	7.200,00	726	52,47	7.200,00	-	-	-
	5	25	91	8	7.200,00	715	57,21	7.200,00	-	-	-
E030-03g	1	29	29	3	7.200,00	**532**	42,29	7.200,00	546	41,57	2,63
	2	29	43	6	7.200,00	**943**	68,72	7.200,00	1.085	72,72	15,06
	3	29	49	6	7.200,00	745	60,40	7.200,00	**744**	59,67	-0,13
	4	29	72	7	7.200,00	1.063	72,24	7.200,00	-	-	-
	5	29	86	7	7.200,00	**873**	66,21	7.200,00	887	66,85	1,60
E033-03n	1	32	32	3	7.200,00	2.074	29,07	7.200,00	**1.991**	12,71	-4,00
	2	32	44	7	7.200,00	**3.222**	56,83	7.200,00	3.905	64,12	21,20
	3	32	56	7	7.200,00	**2.957**	53,13	7.200,00	3.191	56,44	7,91
	4	32	78	7	7.200,00	3.035	54,53	7.200,00	-	-	-
	5	32	102	8	7.200,00	3.926	64,52	7.200,00	**2.921**	52,79	-25,60
E036-11h	1	35	35	11	7.200,00	**737**	50,47	7.200,00	861	60,28	16,82
	2	35	56	11	7.200,00	912	59,98	7.200,00	-	-	-
	3	35	74	11	7.200,00	814	57,98	7.200,00	-	-	-
	4	35	93	11	7.200,00	945	64,02	7.200,00	-	-	-
	5	35	114	11	7.200,00	-	-	7.200,00	-	-	-
				Média	6.811,53		35,76	7.006,04		36,73	

Referências

Abdal-Hammed, M. K., Hifi, M., e Wu, L. (2014). Large neighborhood search for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. In *Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), 2014 International Conference on*, p. 054–059.

Côté, J. F., Guastarofa, G., e Speranza, M. G. (2017). The value of integrating loading and routing. *European Journal of Operational Research*, 257(1):89 – 105.

Dominguez, O., Juan, A. A., e Faulin, J. (2014). A biased-randomized algorithm for the two-dimensional vehicle routing problem with and without item rotations. *International Transactions in Operational Research*, 21(3):375–398.

Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. Freeman, San Francisco.

Herz, J. C. (1972). Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. *Journal of Research and Development*, 16(5):462–469.

Hokama, P., Miyazawa, F. K., e Xavier, E. C. (2016). A branch-and-cut approach for the vehicle routing problem with loading constraints. *Expert Systems with Applications*, 47:1 – 13.

Iori, M., Salazar-González, J., e Vigo, D. (2007). An exact approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *Transportation Science*, 41(2):253–264.

Kara, I. (2010). Tightening bounding constraints of the miller-tucker-zemlin based formulation of the capacitated vehicle routing problems and some extensions. In *Proceeding of the 2nd International Conference on Manufacturing Engineering, Quality and Production Systems*, p. 137–142.

Martinez, L. e Amaya, C. A. (2013). A vehicle routing problem with multi-trips and time windows for circular items. *Journal of the Operational Research Society*, 64(11):1630–1643.

Miller, C. E., Tucker, A. W., e Zemlin, R. A. (1960). Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Journal of the ACM*, 7(4):326–329.

Resende, P. e Sousa, P. R. (2012). Pesquisa de custos logísticos no brasil. URL `http://www.fdc.org.br/professoresepesquisa/publicacoes/Paginas/publicacao-detalhe.aspx?publicacao=18217`. Acesso em: 08/12/2016.

Silva, L. C., Queiroz, T. A., e Toledo, F. M. B. (2016). Abordagem para o problema de roteamento de veículos com empacotamento bidimensional. In *Anais do XLVIII SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, p. 1364–1375, Vitória, ES, Brasil.

Wei, L., Zhang, Z., Zhang, D., e Lim, A. (2015). A variable neighborhood search for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 243(3):798–814.

Zachariadis, E. E., Tarantilis, C. D., e Kiranoudis, C. T. (2013). Integrated distribution and loading planning via a compact metaheuristic algorithm. *European Journal of Operational Research*, 228 (1):56 – 71.