



ABORDAGEM MATHEURÍSTICA PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE ESTOQUES COM MÚLTIPLOS FORNECEDORES E MÚLTIPLAS PLANTAS FABRIS

Thiago André Guimarães

Centro Universitário Franciscano do Paraná (FAE)
thiago.guimaraes@fae.edu

Leonardo Nudelman Rosenberg

Grupo de Tecnologia Aplicada à Otimização – Universidade Federal do Paraná (GTAO-UFPR)

Cleder Marcos Schenekemberg

Grupo de Tecnologia Aplicada à Otimização – Universidade Federal do Paraná (GTAO-UFPR)

Cassius Tadeu Scarpin

Grupo de Tecnologia Aplicada à Otimização – Universidade Federal do Paraná (GTAO-UFPR)

RESUMO

Aborda-se neste estudo a operação de um sistema do tipo *Vendor Managed Inventory* (VMI) em problema de distribuição em uma cadeia de suprimentos em três níveis, composto por um conjunto de fornecedores de insumo, um conjunto de plantas produtoras e um conjunto de clientes consumidores de um único produto final. Para tal, as plantas precisam decidir quando, quanto e de qual fornecedor devem coletar um insumo, bem como determinar quando, quanto e de que forma atender aos clientes que demandam um certo produto fabricado a partir desse insumo, minimizando os custos logísticos tangentes ao transporte, estocagem e dimensionamento da frota de veículos ao longo de um horizonte de planejamento. Propõe-se uma abordagem matheurística, que combina técnicas exatas com procedimentos heurísticos para resolver o problema. Por meio de um conjunto de instâncias geradas a partir de dados da literatura, avalia-se quatro diferentes combinações de políticas de reposição de estoque de insumo e de produto final. Os resultados obtidos indicam onde está localizado o maior percentual de custo no sistema VMI e quais políticas de reabastecimento de estoque acarretam aumento de custos.

PALAVRAS CHAVE. Roteamento de Estoques, Matheurística, Cadeia de Suprimentos com Três Níveis.

Tópicos. Logística e Transportes.

ABSTRACT

This paper studies a distribution problem in a vendor managed inventory system (VMI) in which the supplier chain has three echelons, made by the set of suppliers that provide the product's primary input, a set of production plants and a set of customers of a single final product. Hence, the plants must decide when, how much and from which supplier they must collect the input as well as determine when, how much and in which route the clients' demands will be met. The proposed model aims to reduce total logistical cost, which involves transportation, inventory and fleet sizing costs. We propose a matheuristic approach, which combines exact techniques with heuristics procedures, to solve the problem. Using instances adapted from the literature, we analyze four different combinations of replenishment policies for both input and final product. The obtained results demonstrate where the highest cost is located in VMI systems such as the one proposed and which replenishment policies entail higher costs.

KEYWORDS. Inventory Routing. Matheuristic. Three-echelon supply chain.

Paper topics. Logistics and Transportations.



1. Introdução

Vendor Managed Inventory system (VMI) é uma estratégia amplamente reconhecida pela redução de custos e melhoria do nível de serviço em cadeias de suprimentos. Operacionalmente, o VMI transfere ao fornecedor a gestão dos estoques dos clientes, com a garantia de que não ocorram rupturas ao longo de um horizonte de planejamento. O *Inventory Routing Problem* (IRP) integra os problemas de gerenciamento de estoque e roteirização de veículos capacitados que surgem no contexto operacional do VMI. De tal maneira, o fornecedor precisa decidir: quando atender um cliente, quanto entregar por ocasião da entrega e qual o melhor roteiro para a frota de veículos programada [Bertazzi e Speranza 2012].

Neste artigo abordou-se uma cadeia de suprimentos em três níveis, com fornecedores, plantas produtoras e clientes. Estudos sobre IRP em três níveis, ao melhor de nosso conhecimento, estão limitados a poucos trabalhos e todos eles consideram apenas um fornecedor-decisor, posicionado no primeiro nível da cadeia. Recentemente, [Rahim et al. 2014] considera um sistema VMI contendo um fornecedor, um depósito e múltiplos clientes, embora os autores classifiquem a cadeia como dois níveis. O trabalho compara a estratégia de entregas diretas com a possibilidade de entregas agrupadas e roteirizadas por grupo. A decisão também está centrada no fornecedor, que deve enviar o produto para o depósito e, a partir deste, programar as entregas aos clientes.

Assume-se geralmente que uma certa quantidade de produto está sempre disponível ao início de cada período de planejamento e que este montante é suficiente para atender à demanda dos clientes para este período [Bertazzi et al. 2002], [Archetti et al. 2007], [Coelho et al. 2012a], [Archetti et al. 2012]. Usualmente, as plantas são livres para determinar a quantidade de produto entregue a cada cliente, onde as restrições são exclusivas à capacidade de estocagem e de carregamento da frota. Estas características definem a política de estoque *maximum level* (ML) e esta é dominante nos estudos sobre IRP com múltiplos depósitos [Coelho et al. 2013]. Métodos heurísticos [Archetti et al. 2012], [Cordeau et al. 2014], algoritmos exatos [Archetti et al. 2007], [Coelho e Laporte 2013], [Desaulniers et al. 2015] e estratégias matheurísticas [Coelho et al. 2012a], [Coelho et al. 2012b] foram propostos para a resolução do IRP sob esta política. Já a política *order-up to level* (OU) impõe à planta fabril entregar a quantidade necessária ao cliente, para que seu nível de estoque se iguale ao nível máximo permitido. Embora seja bastante comum em problemas com um depósito ([Bertazzi et al. 2002], [Coelho et al. 2012b], [Coelho e Laporte 2014], [Coelho et al. 2014], não encontramos estudos que apliquem a política OU ao IRP com múltiplos depósitos.

Diante desta lacuna, propõe-se o *Inventory Routing Problem* com múltiplos depósitos em um sistema logístico em três níveis, o qual denominamos MDIRP-3L, integrando o processo de reabastecimento do estoque de insumo das plantas. As contribuições científicas do trabalho são: 1) O processo decisório está localizado no segundo nível da cadeia. As plantas precisam gerenciar seus estoques de insumo em conjunto com os estoques de produto dos clientes, ambos sujeitos à restrição de capacidade. Tanto a distribuição do produto aos clientes quanto a coleta de insumo nos fornecedores é realizada pela frota de veículo das plantas. A designação da planta produtora que atende um certo cliente pode variar ao longo do horizonte de planejamento. A mesma flexibilidade se aplica à coleta de insumo junto aos fornecedores. 2) Compara-se as políticas ML e OU, tanto para o estoque de insumo nas plantas, quanto para o estoque de produtos nos clientes, gerando quatro combinações distintas. Analisa-se a performance dessas políticas em cada componente do custo total do sistema VMI. 3) Propõe-se uma matheurística robusta, que combina *Large Neighborhood Search* (LNS) com *Mix Integer Programming* (MIP) para o MDIRP-3L. Os algoritmos foram implementados em linguagem *Visual Basic for Applications*TM (VBA) em conjunto com plataforma *Open Solver*TM [Mason 2012]. 4) Produziu-se um conjunto de problemas-teste para o MDIRP-3L a partir de instâncias clássicas da literatura. Conduziu-se um amplo experimento computacional e avaliou-se o comportamento das quatro diferentes políticas de estoque.

O restante do trabalho está organizado como segue: na segunda seção, formaliza-se o MDIRP-3L e discute-se seus detalhes constitutivos. A seção 3 apresenta o método que se



desenvolveu para resolver o problema. Os problemas-testes gerados e os resultados obtidos são apresentados na seção 4. A seção 5 tece as conclusões do trabalho.

2. Definição do Problema

O MDIRP-3L é definido sobre um grafo incompleto e não orientado $G=(V,A)$, onde V representa os vértices, formados pela união do conjunto de fornecedores S , de plantas P e de consumidores C , enquanto A representa o conjunto de arcos. Em cada período de tempo t ao longo de um horizonte de planejamento T ($t \in T$), uma planta j ($j \in P$) pode coletar uma certa quantidade de insumo r_{ij}^t de um fornecedor i , utilizando um único veículo de capacidade L , a partir de uma frota disponível v_j^t , com um custo fixo por veículo utilizado f_v .

Cada unidade de produto final requer uma certa quantidade φ de insumo em sua mistura. As plantas precisam definir a quantidade q_{jk}^t entregue ao cliente k , que possui uma demanda de produto final D_k^t no período t , conhecida *a priori*. Uma frota de veículos v_j^t precisa ser dimensionada e roteirizada. Cada planta produtora pode estocar insumo até o limite W_j e incorre em um custo h_j^w por unidade de insumo estocada. Cada cliente possui uma capacidade de estoque de produto final C_k e incorre em um custo por unidade de produto estocado h_k . Assume-se que as plantas dispõem de quantidade suficiente de produto final para misturá-lo ao insumo e atender à demanda dos clientes.

Em $t=0$, as plantas conhecem seus respectivos níveis de estoque de insumo $I_j^{w,0}$, além do nível de estoque de produto final I_k^0 de cada cliente. Cada fornecedor i estabelece um contrato de fornecimento com as plantas, disponibilizando um montante de insumo F_i , que pode ser consumido por todo conjunto P ao longo de T . Assume-se, também, que o insumo coletado no início de t pode ser adicionado ao produto final no mesmo período. Busca-se determinar a programação das coletas de insumos, bem como a programação das entregas de produto final aos clientes, de forma que a demanda desses clientes seja plenamente atendida ao menor custo logístico possível.

A restrições do MDIRP-3L são dadas por: 1) Tanto o nível de estoque dos clientes quanto o nível de insumo nas plantas não podem ser negativos, tampouco podem exceder o limite máximo de estocagem. 2) Cada cliente pode ser atendido por apenas um veículo alocado em uma única planta no período. Não são permitidas entregas fracionadas, ainda que o cliente possa ser servido por plantas distintas em períodos distintos. 3) Cada planta fabril pode coletar insumo de até um fornecedor em um dado período. Não são permitidas coletas fracionadas, embora uma planta possa coletar de diferentes fornecedores em diferentes períodos. 4) A quantidade de insumo coletada por um veículo e/ou a quantidade total de produto final entregue aos clientes não pode ser maior que a capacidade nominal de carregamento. 5) Todas as rotas de entrega de produto final aos clientes terminam na mesma planta de partida. 6) Todas as coletas de insumo nos fornecedores são diretas, iniciando e terminando na mesma planta produtora. 7) Um mesmo veículo pode coletar e distribuir em um mesmo período, contanto que retorne à planta de origem após a coleta de insumo no fornecedor. A restrição se justifica pela limpeza necessária do veículo em função da troca de insumo por produto final.

3. Abordagem matheurística para o MDIRP-3L

Apresenta-se uma abordagem capaz de resolver o MDIRP-3L sob qualquer política de estoque combinada para insumo e produto final e pode ser flexibilizada de veículo único para múltiplos veículos por planta, com ou sem dimensionamento de frota para o segundo caso. Combina-se MIP com um esquema de LNS, resolvendo o MDIRP-3L em três fases: programação das entregas, roteirização e ajuste final. Por hibridizar técnicas heurísticas com programação matemática, o método pode ser caracterizado como *matheuristic* ou matheurística [Maniezzo et al. 2009].

3.1. Fase 1: Programação Inicial das Entregas aos Clientes e Dimensionamento Inicial da Frota



Essa fase gera uma solução inicial aproximada, simplificando a roteirização de entrega de produto final aos clientes por uma regra adaptada de múltiplas entregas diretas. De tal forma, a formulação impõe que o veículo deve retornar à sua planta de origem após realizar um atendimento a um cliente. A quantidade total entregue ao subconjunto de clientes atendidos por este veículo não pode exceder a capacidade de carregamento. Reduz-se, assim, a complexidade combinatória do modelo. Então, a ideia central é realizar uma programação inicial focada na quantidade. O modelo da fase 1 resolve previamente os seguintes pontos: 1) A quantidade que cada planta produtora irá coletar de cada fornecedor em cada período de tempo; 2) A quantidade que cada planta irá entregar para cada cliente em cada período de tempo; 3) A frota necessária para realizar as coletas e entregas. Formulou-se um modelo de programação linear inteira mista como um problema de transbordo adaptado para tal. Ressalta-se que as fases 2 (roteirização) e 3 (ajuste) podem modificar a solução gerada na fase 1. O modelo é parametrizado conforme a tabela 1.

Tabela 1: Modelo parametrizado para a Fase 1

Variáveis de decisão	Parâmetros e condicionantes
$X_{ij}^t = 1$, se a planta j coleta insumo no fornecedor i no período t . 0, caso contrário.	$C_k =$ Capacidade de estocagem de produto do cliente k
$Y_{jk}^t = 1$, se a planta j entrega algum produto para o cliente k no período t . 0, caso contrário.	$I_k =$ Estoque mínimo do cliente k
$r_{ij}^t =$ Quantidade de insumo coletada pela planta j no fornecedor i no período t .	$I_k^t =$ Nível de estoque de produto do cliente k ao final do período t
$q_{jk}^t =$ Quantidade de produto entregue pela planta j para o cliente k no período t .	$I_k^0 =$ Estoque inicial de produto do cliente k
$v_j^t =$ Número de veículos alocados na planta j no período t (variável inteira)	$D_k^t =$ Demanda do cliente k para o período t
	$h_k =$ Custo de estocagem do cliente k
	$W_j =$ Capacidade de estocagem de insumo da planta j
	$h_j^W =$ Custo de estocagem de insumo na planta j
	$I_j^{w,t} =$ Nível de estoque de insumo do depósito j ao final do período t
	$I_j^{w,0} =$ Estoque inicial de insumo do depósito j
	$F_i =$ Quantidade de insumo disponível no fornecedor i para todo o horizonte T
	$\varphi =$ Percentual de insumo necessário para cada unidade de produto
	$f_v =$ Custo fixo de alocação de um veículo
	$L =$ Capacidade de carregamento de cada veículo
	$c_{ij} =$ Distância entre o fornecedor i e a planta j
	$d_{jk} =$ Distância entre a planta j e o cliente k

O modelo M1 pode ser formulado como segue:

$$\text{Min } Z_1 \sum_{t \in T} \sum_{j \in P} h_j^W I_j^{w,t} + \sum_{t \in T} \sum_{k \in C} h_k I_k^t + \sum_{t \in T} \sum_{i \in S} \sum_{j \in P} 2c_{ij} X_{ij}^t + \sum_{t \in T} \sum_{j \in P} \sum_{k \in C} 2d_{jk} Y_{jk}^t + \sum_{t \in T} \sum_{j \in P} f_v v_j^t \quad (1)$$

Sujeito à

$$\sum_{t \in T} \sum_{j \in P} r_{ij}^t \leq F_i \quad i \in S \quad (2)$$

$$I_j^{w,t} = I_j^{w,t-1} + \sum_{i \in S} r_{ij}^t - \sum_{k \in C} (\varphi) q_{jk}^t \quad j \in P, t \in T \quad (3)$$

$$I_j^{w,t} \leq W_j \quad j \in P, t \in T \quad (4)$$

$$I_k^t = I_k^{t-1} + \sum_{j \in P} q_{jk}^t - D_k^t \quad k \in C, t \in T \quad (5)$$

$$I_k^t \leq C_k \quad k \in C, t \in T \quad (6)$$

$$I_k^t \geq I_k \quad k \in C, t \in T \quad (7)$$

$$r_{ij}^t \leq W_j X_{ij}^t \quad i \in S, j \in P, t \in T \quad (8)$$

$$r_{ij}^t \leq L \quad i \in S, j \in P, t \in T \quad (9)$$

$$r_{ij}^t \leq L v_j^t \quad i \in S, j \in P, t \in T \quad (10)$$

$$\sum_{i \in S} r_{ij}^t \leq W_j - I_j^{w,t-1} \quad j \in P, t \in T \quad (11)$$

$$\sum_{i \in S} X_{ij}^t \leq 1 \quad j \in P, t \in T \quad (12)$$

$$q_{jk}^t \leq C_k Y_{jk}^t \quad k \in C, j \in P, t \in T \quad (13)$$

$$q_{jk}^t \leq L \quad k \in C, j \in P, t \in T \quad (14)$$



$$\sum_{j \in P} q_{jk}^t \leq C_k - I_k^{t-1} \quad k \in C, t \in T \quad (15)$$

$$\sum_{k \in C} (\varphi) q_{jk}^t \leq I_j^{w,t-1} + \sum_{i \in S} r_{ij}^t \quad j \in P, t \in T \quad (16)$$

$$\sum_{k \in C} q_{jk}^t \leq L v_j^t \quad j \in P, t \in T \quad (17)$$

$$\sum_{j \in P} Y_{jk}^t \leq 1 \quad k \in C, t \in T \quad (18)$$

$$I_j^{w,t} \geq 0 \quad j \in P, t \in T \quad (19)$$

$$q_{jk}^t \geq 0 \quad k \in C, j \in P, t \in T \quad (20)$$

$$r_{ij}^t \geq 0 \quad i \in S, j \in P, t \in T \quad (21)$$

$$v_j^t \geq 0 \text{ e inteiro} \quad j \in P, t \in T \quad (22)$$

$$X_{ij}^t \in \{0,1\} \quad i \in S, j \in P, t \in T \quad (23)$$

$$Y_{jk}^t \in \{0,1\} \quad k \in C, j \in P, t \in T \quad (24)$$

A função objetivo (1) minimiza a soma do custo total de estocagem de insumo nas plantas, com o custo total de estocagem de produto final nos clientes, juntamente com os custos de transporte para a coleta de insumo no fornecedor e de entrega do produto final ao cliente. A última parcela computa o custo de alocação da frota. As restrições (2) limitam a quantidade de insumo coletada no depósito i durante todo o horizonte T ao montante fixo previamente acordado com as plantas. As restrições (3) definem a conservação de fluxo para o estoque de insumo das plantas, dada pelo estoque no período anterior, somada ao montante coletado, subtraído do montante de produto final entregue aos clientes. Este componente está ponderado pela taxa de mistura φ , calculando a quantidade de insumo em função da quantidade de produto entregue.

As restrições (4) se referem ao estoque máximo de insumo permitido nas plantas. Em (5) a conservação de fluxo para o estoque de produto final nos clientes. As restrições (6) e (7) definem os limites máximo e mínimo (podendo ser diferente de zero) do estoque de cada cliente. A quantidade de insumo coletada é definida pelo conjunto de restrições (8)-(10), sendo diferente de zero somente se houver algum veículo alocado na planta e se a coleta for autorizada. As restrições (11) garantem que, se a quantidade de insumo coletada por uma planta for maior que zero, esta não irá exceder a disponibilidade de estoque no período.

Em (12) fica garantido que a planta não pode coletar insumo de mais de um fornecedor em um mesmo período. As restrições (13)-(15) definem a quantidade de produto final recebida por um cliente. Já as restrições (16) garantem que se alguma quantidade de insumo for coletada no período, esta poderá ser adicionada ao produto final e entregue aos clientes no mesmo período. As restrições (17) definem a quantidade de veículos que será dimensionada para cada planta a fim de atender às coletas de insumo e entrega de produto final. As restrições (18) impedem a ocorrência de entregas fracionadas aos clientes. As restrições de (19)-(24) definem o domínio das variáveis de decisão.

Sob a política OU, sempre que uma planta visitar um fornecedor, a quantidade de insumo coletada deverá elevar o estoque ao seu nível máximo.

$$\sum_{i \in S} r_{ij}^t \geq W_j \sum_{i \in S} X_{ij}^t - I_j^{w,t-1} \quad j \in P, t \in T \quad (25)$$

$$\sum_{j \in P} q_{jk}^t \geq C_k \sum_{j \in P} Y_{jk}^t - I_k^{t-1} \quad k \in C, t \in T \quad (26)$$

A política OU para coleta de insumos é garantida pela adição das restrições (25) ao modelo M1. De forma equivalente, a adição das restrições (26) ao modelo M1 garantem a política OU para o estoque de produto final nos clientes.

3.2. Fase 2: Roteirização para o Atendimento dos Clientes

A roteirização das entregas aos clientes é realizada para cada $t \in T$ a partir das quantidades q_{jk}^t e da máxima frota v_j^t disponível em cada planta produtora, calculadas pelo modelo M1. A



designação da planta j que atende o cliente k no período t definida pelo modelo pode ser alterada nesta fase.

A técnica LNS foi proposta por [Shaw 1998] e aplicada com sucesso por [Pisinger e Ropke 2007] na resolução de cinco variantes do *vehicle routing problems* (VRP), entre eles o *multi-depot vehicle routing problem* (MDVRP). Nesta fase, o MDIRP-3L é redesenhado como um MDVRP periódico e o algoritmo proposto é aplicado para cada período t . Uma solução inicial (SI) é obtida, adaptando a heurística apresentada por [Altnel e Öncan 2005] para o caso de múltiplos depósitos, onde o roteiro inicial é construído baseado no clássico método das economias de Clarke & Wright, de acordo com a equação (27).

Nela, o cliente ι é adicionado à rota atendida pela planta j que passa pelo cliente k , conforme a economia $S_{k\iota}$, desde que haja disponibilidade para atender à quantidade programada para ι . O parâmetro c representa a distância entre os índices, enquanto q indica a quantidade programada para ser entregue ao cliente no período indicado. Já \bar{q}^t é a quantidade média a ser entregue aos clientes em t . O parâmetro λ é chamado de *route shape* e objetiva evitar a formação de rotas circulares. O termo μ recebe o nome de *assimetria*. Busca evitar, em uma mesma rota, clientes com distâncias simétricas. Por último, o parâmetro ω , denominado *big order*, prioriza os clientes com maior quantidade de entrega programada.

$$S_{k\iota} = c_{kj} + c_{j\iota} - \lambda c_{k\iota} + \mu |c_{jk} - c_{ij}| + \omega \frac{q_k^t + q_\iota^t}{\bar{q}^t} \quad t \in T \quad (27)$$

A cada iteração da LNS, um percentual α dos clientes atendidos no período é removida da SI de aleatoriamente, formando o conjunto R . Para cada $k \in R$, calcula-se o menor custo de inserção em relação à solução atual. Constrói-se uma lista β , contendo os s clientes ($s < \alpha C^t$) com o menor custo de inserção dentre todos aqueles que foram removidos. Um elemento de β é selecionado aleatoriamente e inserido na solução incumbente. A cada inserção, os custos são recalculados a lista β é atualizada, repetindo o processo até que todos os elementos de R tenham sido reinseridos na solução incumbente.

Posteriormente, um operador de refinamento em um conjunto com h operadores é selecionado e aplicado à solução reparada. Cada operador $i \in h$ possui um peso associado w_i , que vai sendo ajustado à medida em que o operador é aplicado. A probabilidade de um operador i ser selecionado é $w_i / \sum_{i=1}^h w_i$, sendo que inicialmente todos recebem peso igual a 1. A cada iteração, o peso do operador selecionado é atualizado por um fator σ_1 se uma nova melhor solução for encontrada, σ_2 se a solução encontrada não for a melhor, mas ainda puder ser aceita e σ_3 se a solução não for aceita. Utilizamos o critério de *simulated annealing* para a aceitação de uma solução vizinha com custo Z' em relação ao custo da solução atual Z , se $Z' < Z$ ou se $e^{-(Z'-Z)/\tau}$, onde τ é a temperatura atual não negativa. A temperatura inicia-se com τ_{start} e decresce a cada iteração por um fator de resfriamento ϕ que varia entre 0 e 1.

3.2.1. Operadores de Melhoria

Os operadores de melhoria seguem conforme tabela 2.

Tabela 2: Operadores de melhoria

1. <i>Plant Relocation</i>	2. <i>Swap ρ customers from plants</i>	3. <i>Swap ρ customers from vehicles</i>
Um cliente k atendido por um veículo v alocado em uma planta j é aleatoriamente selecionado e realocado em um outro veículo v' de uma outra planta j' pelo método de inserção mais barata. O operador é repetido ρ vezes.	Dois clientes atendidos por plantas diferentes são selecionados e trocam as plantas de atendimento, conforme o procedimento de inserção mais barata em um dado veículo da nova planta. É também repetido ρ vezes.	Dois clientes atendidos por veículos diferentes em uma mesma planta são selecionados e trocam os veículos de atendimento, conforme o procedimento de inserção mais barata. É também repetido ρ vezes.



Antes da verificação de aceite da solução vizinha, a iteração é finalizada com a aplicação da melhoria *2-opt* [Lin e Kernighan 1973], em cada um dos roteiros formados no período.

3.3. Ajuste Final nas Quantidades

O método LNS pode alterar qual planta fabril será designada, apesar de a fase 2 ter balizado as quantidades que cada cliente recebe em t . Da mesma forma, a frota de veículos v_j^t previamente definida por M1 pode não ser completamente empregada para realizar as entregas aos clientes, ensejando a revisão da política de ressuprimento de estoque de insumo nas plantas. Consequentemente, as quantidades entregues aos clientes podem divergir dos valores gerados pelo modelo M1 e considerados na fase 2 para a roteirização. A saída da fase 2 limita-se, portanto, as rotas de entrega de produto aos clientes e o custo de transporte para atendimento aos clientes ao longo de T , calculado como $\sum_{t \in T} \text{MDVRP}_{\text{cost}}^t$.

Propõe-se um novo modelo MIP, chamado M2, para ajustar ao menor custo possível: a quantidade de insumo coletada por cada planta, a programação de entrega aos clientes em uma rota já definida e o dimensionamento da frota de veículos. Seja $V_j^t = \{0, \dots, v_{ij}^t\}$ o conjunto que define a frota efetivamente utilizada por uma planta j no período t para realizar as entregas aos clientes, onde v_{ij}^t representa o tamanho da frota ($v_{ij}^t \leq v_j^t$) e $\zeta_{\ell jk}^t$ um novo parâmetro binário igual à 1, se o veículo $\ell \in V_j^t$ serve o cliente k no período t e 0, caso contrário. Embora M2 modifique a função objetivo de M1, ele está igualmente sujeito ao conjunto de restrições de (2)-(24), exceto pela retirada das restrições (17) e pela adição dos conjuntos (9) e (30). O modelo M2 é formulado como segue:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z_2 = & \sum_{t \in T} \sum_{j \in P} h_j^w I_j^{w,t} + \sum_{t \in T} \sum_{k \in C} h_k I_k^t + 2 \left(\sum_{t \in T} \sum_{i \in S} \sum_{j \in P} c_{ij} X_{ij}^t \right) \\ & + \sum_{t \in T} \sum_{j \in P} f_v \text{MAX}[v_j^t; v_j^t] + \sum_{t \in T} \text{MDVRP}_{\text{cost}}^t \end{aligned} \quad (28)$$

Sujeito à

Equações (2)-(24)\(17)

$$\sum_{k \in C} (\zeta_{\ell jk}^t q_{jk}^t) \leq L \quad j \in P, t \in T, \ell \in V_j^t \quad (29)$$

$$\sum_{j \in P} Y_{jk}^t \leq Y_{jk}^{*t} \quad k \in C, j \in P, t \in T \quad (30)$$

O quinto componente da função objetivo representada pela equação (28) é constante e já foi previamente definido na fase 2 (roteirização). O quarto componente computa o custo da frota efetivamente utilizada na fase 2, juntamente com o custo da planta coletar insumo junto a um fornecedor em um certo período onde não houve entrega de produto aos clientes. Nossa pesquisa mostra que esse acontecimento é pouco frequente, mas pode ocorrer. Como a estrutura do modelo define até uma coleta de insumo por período por planta produtora, só haverá incremento no custo de alocação da frota se uma planta programar uma coleta de insumo, mantendo-o em estoque por ao menos um período. Os três primeiros componentes são idênticos à equação (1).

O conjunto de restrições (29) recalcula a quantidade que o veículo ℓ entrega ao conjunto de clientes que será servido por ele, limitando-a à capacidade nominal de carregamento. O conjunto (30) garante que a designação de clientes às plantas realizada na fase 2 seja respeitada, pois Y_{jk}^{*t} é igual à 1 se o cliente k foi de fato designado à planta j no período t e zero caso contrário. A formulação para a política OU segue as equações (25) e (26).

4. Experimentos Computacionais

Adaptou-se um conjunto de *benchmarks* proposto por [Archetti et al. 2007] para o MDIRP-3L. Utilizou-se 25 instâncias das classes absH3high (alto custo de estocagem) e 25 da classe absH3low (baixo custo de estocagem), que dispõem de cinco instâncias para cada grupo de clientes.



Pela dimensão do MDIRP-3L, consideramos as instâncias com 30, 35, 40, 45 e 50 clientes, mantendo: as coordenadas X e Y, a demanda, o número de períodos no horizonte de planejamento, o estoque inicial, os custos e a capacidade de estocagem. Utilizou-se em todas as instâncias 5 fornecedores, 4 depósitos e a proporção ϕ de insumo na mistura do produto final igual à 0,1. As distâncias entre dois pontos i, j é definido por $NINT \left[\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right]$, que calcula o maior valor inteiro da distância euclidiana. Os demais parâmetros foram gerados conforme a tabela 3.

Conduziu-se os testes preliminares para a determinação dos parâmetros da heurística LNS, para identificar o melhor desempenho do algoritmo. Especialmente na obtenção da solução inicial, a definição dos parâmetros não se mostrou robusta de acordo com o número de clientes. Logo, diferenciou-se os valores conforme a dimensão da instância. Com base nos testes, definiu-se os parâmetros conforme a tabela 4.

Tabela 3: Parâmetros para geração de dados

	Fornecedores	Plantas	Veículos
Coord. X	Distribuição uniforme discreta, U[500;1000]	Distribuição uniforme discreta, U[0;500]	
Coord. Y	Distribuição uniforme discreta, entre U[0;1000]	Distribuição uniforme discreta, U[0;500]	
Capacidade	$(F_i): U[2; 3] * \left(\frac{r^t \phi}{ S } \right)$	$(W_j): U[0,2; 0,3] * \left(\frac{\sum_{k \in C} C_k}{ P } \right)$	$(L): 2 * \text{MAX}\{W_j; F_i \forall j \in P, i \in S\}$
Est. Inicial		$(I_j^{w,0}): U[0,2; 0,3] * (W_j)$ $(h_j^w): U[0,2; 0,3]$ para as instâncias da classe absH3high e $U[0,02; 0,03]$ para as instâncias da classe absH3low.	
Custo		Distribuição uniforme discreta, U[0;500]	$(f_v): U[0,2; 0,3] * (L)$

Tabela 4: Parâmetros da heurística de roteirização

Route Shape: Baseado em [Altnel e Öncan 2005]	Assimetria	Big order
$\lambda = 1,3$, para $ C = 30$	$\mu = 0,10$, para $ C = 30$	$\omega = 1,10$, para $ C = 30$
$\lambda = 1,1$, para $ C = 35$	$\mu = 0,15$, para $ C = 35$	$\omega = 1,30$, para $ C = 35$
$\lambda = 1,1$, para $ C = 40$	$\mu = 0,20$, para $ C = 40$	$\omega = 1,33$, para $ C = 40$
$\lambda = 1,0$, para $ C = 45$	$\mu = 0,23$, para $ C = 45$	$\omega = 1,28$, para $ C = 45$
$\lambda = 1,4$, para $ C = 50$	$\mu = 0,25$, para $ C = 50$	$\omega = 1,22$, para $ C = 50$

Os parâmetros da LNS apresentaram mais estabilidade nos testes preliminares. Embora o tempo de processamento depender do número de clientes, não verificou-se grandes melhorias a partir de um certo limite. Da mesma forma, as diferentes políticas de estoque não apresentaram grandes dispersões quanto ao tempo computacional. O tempo de processamento para a roteirização em cada período t em segundos foi limitado a $\text{MIN} \left\{ 30; |C^t| \left[\frac{|CC^t|^3}{10000} \right] \right\}$, onde $|C^t|$ é o número de clientes com entregas programadas no período t .

Limitou-se a 80% desse valor o tempo máximo sem melhoria da solução incumbente. Como a demanda dos clientes representa 50% da capacidade de estocagem em todas as instâncias testadas, um cliente dificilmente é atendido em dois períodos consecutivos. Observou-se que pelo fato do número de períodos do horizonte de planejamento ser igual a três, a programação de todos os clientes para um mesmo período acontece com pouca frequência e, quando ocorre, não há atendimento em outros períodos para nenhum deles.

Definiu-se a temperatura inicial τ_{start} em 10000 e o fator de resfriamento ϕ em 0.9995. A taxa de remoção de clientes da heurística LNS α segue uma distribuição uniforme U[0.15;0.35], modificada a cada iteração. Para limitar o número de combinações no processo de reinserção dos



clientes na rota, a lista β tem dimensão máxima de 3 candidatos. O fator de atualização dos pesos dos operadores de melhoria são $\sigma_1 = 1.10$, $\sigma_{12} = 1.05$ e $\sigma_3 = 1.03$.

Implementou-se todos os algoritmos em linguagem VBA, com execução e interface pelo Microsoft Excel 2016. Os modelos de programação inteira foram construídos na mesma linguagem e resolvidos pelo Gurobi 6.5.2, com suporte de interface executado pelo *Open Solver* [Mason 2012]. Os testes computacionais foram realizados em um processador Intel® Core™ I5-6200U, 2.30 GHz com memória RAM de 8 GB, sistema Windows™ 10, 64 bits.

Testou-se 50 instâncias para cada uma das políticas de estoque, sendo 25 do grupo absH3high e 25 do grupo absH3low. Em cada grupo, foram resolvidas 5 instâncias com 30 clientes, 5 instâncias com 35 clientes, 5 com 40 clientes, 5 com 45 clientes e 5 com 50 clientes. As tabelas 5, 6, 7 e 8 reportam o desempenho para cada política de estoque avaliada. Tem-se: a coluna **Customers** indica o número de clientes da instância, **InvP** o custo médio de estocagem do insumo na planta, **InvC** representa o custo médio de estocagem de produto nos clientes, **S-P** o custo de transporte pela coleta de insumo junto aos fornecedores, **P-C** é o custo médio de transporte para realizar as entregas aos clientes, **Fleet** é o custo fixo médio pelo dimensionamento da frota, **TC** é o custo médio total e **CPU** o tempo médio de processamento em segundos.

O resultado obtido por cada política de estoque não compartilha de um mesmo roteiro de entrega aos clientes. Isso se deve ao modelo M1, que gera diferentes quantidades e diferentes subconjuntos de clientes que deverão ser atendidos em cada período, de acordo com a política de estoque considerada. Tal abordagem é mais flexível do que estratégias governadas pela roteirização, como em [Coelho et al. 2012a], onde a política de estoque ML e OU são definidas para um mesmo conjunto de rotas ao longo do horizonte de planejamento. As comparações das tabelas 5-8 indicam que a política ML-ML produz os melhores resultados. Isto já era esperado, contudo, não pode ser constatado para todos os casos.

Tabela 5: Resultados - ML como política de estoque de insumo e ML como política de estoque de produto

Instância	Customers	InvP	InvC	S-P	P-C	Fleet	TC	CPU
absH3high	30	61.2	638.9	1460.0	3420.0	810.6	6390.7	148
	35	64.2	633.3	1563.6	3870.0	770.4	6901.5	120
	40	68.1	769.9	1756.4	3997.6	964.0	7556.0	147
	45	95.9	766.4	1578.0	4376.0	1226.0	8042.4	161
	50	94.5	901.1	1681.6	5016.6	1259.2	8953.1	231
absH3low	30	5.6	70.1	1656.0	3340.8	731.4	5803.9	121
	35	7.2	72.4	852.8	3580.4	789.8	5302.6	151
	40	7.4	82.1	1503.2	4159.4	1080.2	6832.3	115
	45	7.9	95.6	1079.2	4092.6	1068.2	6343.5	150
	50	9.2	101.1	1854.8	4593.2	1287.4	7845.7	188

Tabela 6: Resultados - OU como política de estoque de insumo e OU como política de estoque de produto

Instância	Customers	InvP	InvC	S-P	P-C	Fleet	TC	CPU
absH3high	30	151.6	1115.7	1464.0	3753.0	905.2	7389.5	190
	35	194.5	1147.4	1829.2	4180.4	843.4	8194.8	147
	40	202.1	1305.3	2343.2	4601.2	999.4	9451.3	144
	45	255.3	1490.0	1925.6	4657.2	1189.4	9517.5	192
	50	247.7	1629.8	2025.2	5370.2	1333.0	10605.9	212
absH3low	30	20.5	114.4	1949.2	3746.8	783.8	6614.7	152
	35	20.4	114.7	1364.8	4142.2	815.0	6457.1	127
	40	18.5	138.0	1446.8	4570.0	1218.6	7391.9	191
	45	19.8	151.0	1555.6	4592.2	1144.0	7462.6	182
	50	25.4	164.8	2632.8	5040.8	1321.2	9185.0	210

Tabela 7: Resultados - ML como política de estoque de insumo e OU como política de estoque de produto

Instância	Customers	InvP	InvC	S-P	P-C	Fleet	TC	CPU
absH3high	30	49.7	1124.3	1502.8	3706.4	872.8	7256.0	132
	35	52.4	1154.8	1298.4	4135.6	903.4	7544.6	213
	40	58.9	1325.6	1810.8	4568.4	1028.4	8792.1	170
	45	64.5	1469.2	1613.2	4683.2	1193.0	9023.2	162
	50	59.3	1643.0	1543.6	5323.4	1415.8	9985.2	189
absH3low	30	5.3	114.4	1505.2	3797.2	861.6	6283.7	155
	35	5.4	119.7	1088.4	3995.4	899.4	6108.3	141
	40	4.8	140.9	1349.6	4474.6	1290.6	7260.5	155
	45	5.6	148.3	1118.4	4672.8	1175.6	7120.7	218
	50	7.7	166.1	2089.2	4947.0	1326.2	8536.2	171



Tabela 8: Resultados - OU como política de estoque de insumo e ML como política de estoque de produto

Instância	Customers	InvP	InvC	S-P	P-C	Fleet	Total	CPU
absH3high	30	148.1	611.7	1773.2	3405.4	788.2	6726.6	140
	35	209.8	671.0	2048.4	3626.6	795.0	7350.7	130
	40	158.6	804.8	1882.8	3895.2	902.2	7643.6	177
	45	227.0	854.3	1840.8	4234.8	1151.4	8308.3	169
	50	237.5	918.6	1883.2	5042.2	1302.6	9384.1	236
absH3low	30	15.1	78.3	1575.2	3313.8	731.4	5713.8	147
	35	16.4	73.4	1057.6	3472.0	764.4	5383.8	141
	40	20.5	75.5	1628.0	4259.6	1078.0	7061.7	196
	45	20.2	104.8	1498.0	4008.4	1032.0	6663.4	202
	50	22.1	102.9	2416.8	4423.8	1248.8	8214.3	237

Destaca-se que os tempos de processamento são baixos e estáveis em virtude da padronização adotada, não tendo ocorrido grandes variações entre as políticas de estoque testadas.

As tabelas 9-12 reportam o peso relativo de cada componente da função objetivo no custo total obtido por cada política de estoque. Pela tabela 9 observou-se que o peso médio do custo de estocagem de insumo nas plantas acaba sendo mais elevado na política OU-ML, tanto para o grupo absH3high quanto para o grupo absH3low, enquanto a menor proporção está na política ML-OU.

Como a política ML atenua os custos totais, tanto para o estoque de insumo nas plantas, quanto para o estoque de produto final nos clientes, a política OU-OU acaba tendo sua parcela de **InvP** minorada em relação ao custo total. A diferença proporcional entre esses dois grupos se alinha à natureza dos dados das instâncias, que geram valores, em média, dez vezes maiores para o custo de estocagem no grupo absH3high. O mesmo raciocínio pode ser estendido ao componente **InvC**.

Tabela 9: Parcela do custo médio total no custo médio de estocagem de insumo nas plantas

Instância	Customers	ML-ML	OU-OU	ML-OU	OU-ML
absH3high	30	0.96%	2.05%	0.68%	2.20%
	35	0.93%	2.37%	0.69%	2.85%
	40	0.90%	2.14%	0.67%	2.08%
	45	1.19%	2.68%	0.72%	2.73%
	50	1.06%	2.34%	0.59%	2.53%
Média		1.01%	2.32%	0.67%	2.48%
absH3low	30	0.10%	0.31%	0.08%	0.26%
	35	0.14%	0.32%	0.09%	0.30%
	40	0.11%	0.25%	0.07%	0.29%
	45	0.12%	0.27%	0.08%	0.30%
	50	0.12%	0.28%	0.09%	0.27%
Média		0.12%	0.28%	0.08%	0.29%

Tabela 10: Parcela do custo médio total correspondente ao custo médio de produto nos clientes

Instância	Customer	ML-ML	OU-OU	ML-OU	OU-ML
absH3high	30	10.00%	15.10%	15.50%	9.09%
	35	9.18%	14.00%	15.31%	9.13%
	40	10.19%	13.81%	15.08%	10.53%
	45	9.53%	15.66%	16.28%	10.28%
	50	10.07%	15.37%	16.45%	9.79%
Média		9.79%	14.79%	15.72%	9.76%
absH3low	30	1.21%	1.73%	1.82%	1.37%
	35	1.37%	1.78%	1.96%	1.36%
	40	1.20%	1.87%	1.94%	1.07%
	45	1.51%	2.02%	2.08%	1.57%
	50	1.29%	1.79%	1.95%	1.25%
Média		1.31%	1.84%	1.95%	1.33%

Tabela 11: Parcela do custo médio total no custo médio de transporte (coleta de insumo nos fornecedores)

Instância	Customer	ML-ML	OU-OU	ML-OU	OU-ML
absH3high	30	22.85%	19.81%	20.71%	26.36%
	35	22.66%	22.32%	17.21%	27.87%
	40	23.25%	24.79%	20.60%	24.63%
	45	19.62%	20.23%	17.88%	22.16%
	50	18.78%	19.10%	15.46%	20.07%
Média		21.43%	21.25%	18.37%	24.22%
absH3low	30	28.53%	29.47%	23.95%	27.57%
	35	16.08%	21.14%	17.82%	19.64%
	40	22.00%	19.57%	18.59%	23.05%
	45	17.01%	20.85%	15.71%	22.48%
	50	23.64%	28.66%	24.47%	29.42%
Média		21.45%	23.94%	20.11%	24.43%



Tabela 12: Parcela do custo médio total no custo médio de transporte (distribuição de produto aos clientes)

Instância	Customer	ML-ML	OU-OU	ML-OU	OU-ML
absH3high	30	53.52%	50.79%	51.08%	50.63%
	35	56.07%	51.01%	54.82%	49.34%
	40	52.91%	48.68%	51.96%	50.96%
	45	54.41%	48.93%	51.90%	50.97%
	50	56.03%	50.63%	53.31%	53.73%
Média		54.59%	50.01%	52.61%	51.12%
absH3low	30	57.56%	56.64%	60.43%	58.00%
	35	67.52%	64.15%	65.41%	64.49%
	40	60.88%	61.82%	61.63%	60.32%
	45	64.52%	61.54%	65.62%	60.16%
	50	58.54%	54.88%	57.95%	53.85%
Média		61.80%	59.81%	62.21%	59.36%

A tabela 11 reforça a importância de se considerar o processo de reabastecimento de insumo das plantas no âmbito do IRP. Mesmo que dependente da natureza dos dados gerados, esse componente respondeu por cerca de 20% dos custos totais do sistema VMI, independente do custo de estocagem. A tabela 12 mostra a relevância da roteirização na entrega de produto aos clientes para o IRP, haja vista que o componente **P-C** representa entre 50% e 60% dos custos totais, sendo mais representativo para o caso em que os produtos estocados são de baixo custo. Pela natureza dos dados gerados, o custo de transporte que envolve o dimensionamento da frota, coleta de insumo e entrega de produtos corresponde entre 80% e 90% dos custos totais.

5. Conclusões

Introduzimos neste estudo o MDIRP-3L, que expande o IRP clássico para o caso com múltiplos depósitos e incorpora o processo de reabastecimento do estoque de insumo das plantas, considerado o elo tomador de decisão na cadeia de suprimentos. Foi proposto uma matheurística para a resolução do MDIRP-3L, que atua em três fases hierárquicas, combinando modelos MIP com a heurística LNS. A primeira delas, aproxima o MDIRP-3L a um problema de transbordo e determinando o conjunto de clientes que será atendido e a máxima frota de veículos em cada planta, ao longo do horizonte de planejamento. Na segunda fase, uma heurística LNS constrói roteiros para os clientes programados e um novo modelo MIP redimensiona a política de coleta de insumo e entrega de produtos, considerando os roteiros predefinidos. Avaliou-se quatro diferentes políticas de estocagem, tanto para o insumo nas plantas quanto para o estoque de produto final nos clientes.

Por meio de experimentos computacionais com instâncias adaptadas da literatura, constatou-se que a abordagem ML-ML, mais flexível, domina as demais políticas na grande maioria das situações. A adoção da regra OU para os estoques de insumos, mantendo a política ML para o estoque de produto nos clientes, tende a elevar os custos totais médios entre 3 e 4%. Já a manutenção da política ML para os estoques de insumo, combinada com a política OU para o estoque de produtos dos clientes aumenta os custos, em média, entre 10 e 13%. Por fim, fixação da política OU para insumo e produto final incrementa os custos entre 16 e 19%. Observa-se que o processo de reabastecimento do estoque de insumo nas plantas corresponde a cerca de 20% dos custos totais do sistema VMI.

Referências

- Altinel, Í. K. e Öncan, T. (2005). A new enhancement of the Clarke and Wright savings heuristic for the capacitated vehicle routing problem. *J. Oper. Res. Soc.*, 56:954–961.
- Archetti, C., Bertazzi, L., Hertz, A. e Speranza, M. G. (2012). A Hybrid Heuristic for an Inventory Routing Problem. *INFORMS J. Comput.*, 24:101–116.
- Archetti, C., Bertazzi, L., Laporte, G. e Speranza, M. G. (2007). A Branch-and-Cut Algorithm for a Vendor-Managed Inventory-Routing Problem. *Transportation Science*, 41:382–391.



- Bertazzi, L. e Speranza M. G. Speranza. (2012). Inventory routing problems: an introduction, *EURO J. Transp. Logist.*, 1:307–326.
- Bertazzi, L., Paletta, G. e Speranza, M. G. (2002). Deterministic Order-Up-To Level Policies in an Inventory Routing Problem. *Transportation Science*, 36:119–132.
- Coelho, L. C. e Laporte, G. (2014). An optimised target-level inventory replenishment policy for vendor-managed inventory systems. *Int. J. Prod. Res.*, December:37–41.
- Coelho, L. C. e Laporte, G. A branch-and-cut algorithm for the multi-product multi-vehicle inventory-routing problem. *Int. J. Prod. Res.*, 51:7156–7169.
- Coelho, L. C., Cordeau, J. e Laporte, G. (2012a). Consistency in multi-vehicle inventory-routing, *Transp. Res. Part C Emerg. Technol.*, 24:270–287.
- Coelho, L. C., Cordeau, J. e Laporte, G. (2012b). The inventory-routing problem with transshipment. *Comput. Oper. Res.*, 39:2537–2548.
- Coelho, L. C., Cordeau, J. e Laporte, G. (2014), Heuristics for dynamic and stochastic inventory-routing. *Comput. Oper. Res.*, 52:55–67.
- Cordeau, J. F., Laganà, D., Musmanno, R. e Vocaturro, F. (2014). A decomposition-based heuristic for the multiple-product inventory-routing problem. *Comput. Oper. Res.*, 55:153–166.
- Desaulniers, G., Rakke, J. G. e Coelho, L. C. A Branch-Price-and-Cut Algorithm for the Inventory-Routing Problem. *Transp. Sci.*, 1655:1–17.
- Lin, S. e Kernighan, B. W. An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem. *Operations Research*, 21:498–516.
- Maniezzo, V., Stutzle, T. e Voß, S. (2009). *Matheuristics: Hybridizing Metaheuristics and Mathematical Programming*. Springer, New York.
- Mason, A. J. (2012) OpenSolver – An Open Source Add-in to Solve Linear and Integer Programmes in Excel, em Klatte D., Lüthi HJ., Schmedders K. (eds.). In *Operations Research Proceedings 2011*, Coletânea de Artigos. Springer.
- Pisinger, D. e Ropke, S. (2007). A general heuristic for vehicle routing problems. *Comput. Oper. Res.*, 34:2403–2435.
- Rahim, M. K. I. A., Aghezzaf, E., Limère, V. e Raa, B. (2014). Analysing the effectiveness of vendor-managed inventory in a single-warehouse, multiple-retailer system. *Int. J. Syst. Sci.*, July 2015:1–13.
- Shaw, P. (1998). Using constraint programming and local search methods to solve vehicle routing problems. *Princ. Pract. Constraint Program*, 1520:417–431.