



## OTIMIZAÇÃO DO PROCESSO DE PRODUÇÃO DE JUMBOS, BOBINAS E FORMATOS DE PAPEL

**Amanda Ortega de Castro Ayres**

Faculdade de Ciências Aplicadas - Unicamp  
R. Pedro Zaccaria, 1300 - Limeira  
amanda.ayres@fca.unicamp.br

**Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini**

Faculdade de Ciências Aplicadas - Unicamp  
R. Pedro Zaccaria, 1300 - Limeira  
carla.ghidini@fca.unicamp.br

**Washington Alves de Oliveira**

Faculdade de Ciências Aplicadas - Unicamp  
R. Pedro Zaccaria, 1300 - Limeira  
washington.oliveira@fca.unicamp.br

**Betania Silva Carneiro Campello**

Faculdade de Ciências Aplicadas - Unicamp  
R. Pedro Zaccaria, 1300 - Limeira  
betania.campello@fca.unicamp.br

### RESUMO

Neste trabalho, propomos um método de resolução para o modelo matemático de otimização linear inteiro bi-integrado, que trata o processo de produção de papel, composto basicamente por três fases: produção de jumbos, corte de jumbos em bobinas e corte de bobinas em formatos. Esta abordagem utiliza o Método Simplex com Geração de Colunas para obter, inicialmente, uma solução ótima contínua para o modelo relaxado, no qual os melhores padrões de corte, que serão usados para cortar os jumbos e as bobinas, são determinados de forma implícita dentre todos os possíveis padrões. Finalmente, uma heurística de arredondamento é aplicada para determinar uma solução inteira para o problema.

**PALAVRAS CHAVE.** Problema de Dimensionamento de Lotes, Problema de Corte de Estoque, Problema Integrado.

**PM - Programação Matemática**

### ABSTRACT

In this work, we propose a resolution method for the bi-integrated integer linear optimization mathematical model, which addresses the paper production, basically composed of three phases: production of big rolls, cutting of these rolls in smaller ones and cutting of the last ones in formats. This approach uses the Simplex Method with Column Generation to obtain, initially, an optimal-continuous solution for the relaxed model, where the best cutting patterns, which are used to cut both types of rolls, are implicitly defined among all the possible patterns. Finally, a rounding heuristic is applied to determine an integer solution to the problem.

**KEYWORDS.** Lot Sizing Problem, Cutting Stock Problem, Integrated Problem.

**PM - Mathematical Programming**



## 1. Introdução

De modo geral, podemos descrever o processo de fabricação de papel por meio de três fases: 1- produção de jumbos, grandes cilindros provenientes de pastas de celulose enroladas; 2- produção de bobinas, cilindros menores cortados a partir dos jumbos; 3- produção de formatos, folhas de papel cortadas das bobinas. Há diversos trabalhos na literatura que abordam essa temática. [Kallrath et al., 2014] apresentam várias abordagens para resolver problemas de corte unidimensional e bidimensional, inclusive uma nova abordagem de geração de colunas para tratar problemas com diferentes larguras de jumbos, estoque limitado de jumbos e problemas em que a sub-produção é permitida, mas deve ser evitada. No trabalho de [Chauhan et al., 2008], é proposto um modelo de decisão para determinar a melhor escolha de bobinas a serem estocadas e suas respectivas atribuições em formatos com demandas específicas, gerando uma menor perda de material. [Poltroniere et al., 2008] integram os problemas de dimensionamento de lotes de jumbos e de corte unidimensional de jumbos em bobinas. No trabalho de [Respício, 2003], o escopo do problema é parecido, porém a capacidade de produção não é suficiente para atender a demanda, levando a prazos de entrega grandes; [Keskinocak et al., 2002] consideram, além da programação da produção de jumbos e bobinas, a distribuição dos produtos finais, por meio de uma abordagem multi-critério. [Correia et al., 2004] enumeram as combinações de larguras de bobinas e determinam as quantidades a serem produzidas e os padrões de corte a serem utilizados, por meio de um modelo matemático para o problema de corte de estoque em 1,5 dimensão.

Analisando esses trabalhos, percebemos uma tendência em integrar as fases de produção citadas, com o objetivo de obter custos globais menores do que a soma dos custos das fases abordadas separadamente. Entretanto, só encontramos trabalhos que integram duas dessas fases. Neste trabalho, propomos um método de resolução para um modelo matemático que integra as três fases. Ele utiliza o Método Simplex com Geração de Colunas para gerar os melhores padrões de corte para as fases 2 e 3 do processo.

O restante do texto está organizado da seguinte forma: na Seção 2, descrevemos o processo de produção de papel; na Seção 3, apresentamos o modelo matemático; na Seção 4, propomos o método de resolução para esse modelo; na Seção 5, detalhamos os experimentos computacionais desenvolvidos; por fim, na Seção 6, enunciamos nossas conclusões provenientes desse estudo.

## 2. Processo de produção de papel

A Figura 1 representa o processo de produção de papel abordado neste trabalho. A coluna do meio é a principal, onde estão mapeadas as fases do processo. As colunas da esquerda e da direita ilustram o produto resultante de cada uma dessas fases: a da esquerda, produto para estoque, e a da direita produto para entrega.

A primeira fase é a de fabricação de jumbos. Nessa etapa as quantidades de jumbos a serem fabricadas em cada período do horizonte de planejamento devem ser decididas, de modo a atender a demanda de jumbos da fase atual e de bobinas e formatos das fases seguintes, minimizando os custos de produção, estoque e *setup* de máquina. Trata-se, portanto, de um problema de dimensionamento de lotes.

A segunda fase é a do corte unidimensional de jumbos em bobinas, que podem ser tanto o produto final requerido pelo cliente quanto um produto intermediário necessário para a fabricação de formatos. Portanto, temos, ao mesmo tempo, um problema de corte de estoque, cujo objetivo é minimizar o desperdício de material, e um novo problema de dimensionamento de lotes, já que as quantidades a serem cortadas devem ser decididas, de modo a atender a demanda de bobinas da fase atual e de formatos da fase seguinte, minimizando os custos de estoque e *setup* de máquina.

A terceira fase é o corte bidimensional de bobinas em formatos. Essa etapa constitui um problema de corte de estoque, cujo objetivo é atender à demanda de formatos, minimizando o desperdício de material e os custos de estoque e *setup* de máquina.

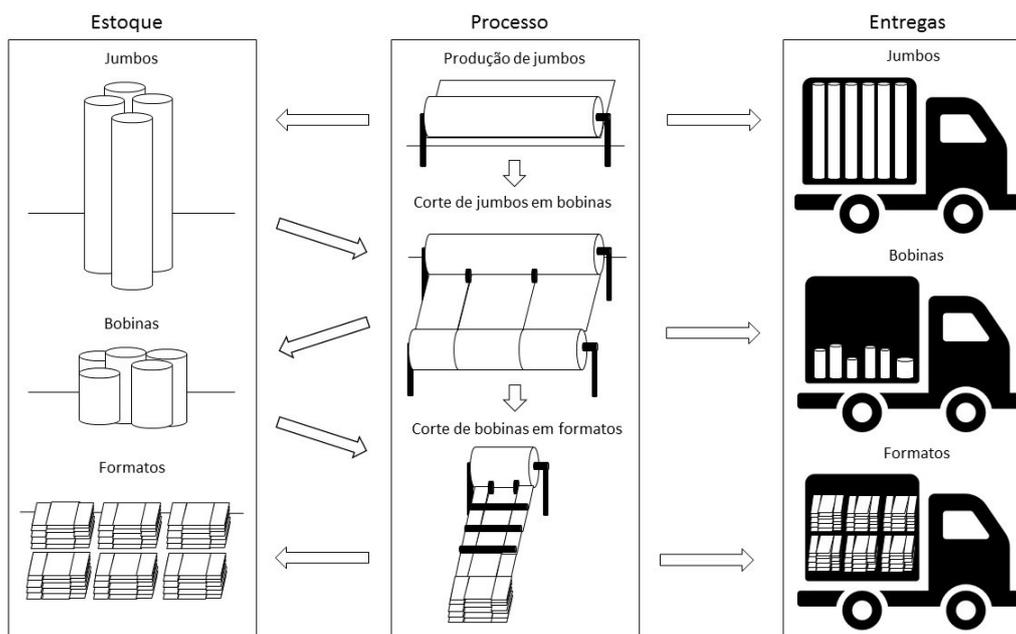


Figura 1: Processo de produção de jumbos, bobinas e formatos

Pelo fato de o modelo matemático proposto envolver dois problemas integrados de dimensionamento de lotes e corte de estoque, um entre as duas primeiras fases e outro entre a segunda e a terceira, o denominamos como modelo bi-integrado, conforme apresentado em Ayres et al. [2017].

### 3. Modelagem Matemática

Nesta seção, apresentamos o modelo matemático de otimização linear inteiro do processo de produção de papel. Para diferenciar as fases correspondentes aos parâmetros e variáveis, acrescentamos o índice correspondente a ela. Por exemplo, os parâmetros  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  referem-se aos custos de produção das fases 1, 2 e 3, respectivamente. Neste modelo, utilizamos a técnica de horizonte rolante (Sethi e Sorger [1991]): a primeira e a segunda fases são resolvidas para todos os períodos do horizonte de planejamento, e a terceira para os sub-períodos dentro do primeiro período.

A seguir, apresentamos os índices, parâmetros e variáveis usados no modelo.

#### 3.1. Índices

$k = 1, \dots, K$ : número de gramaturas de papel;

$m_1 = 1, \dots, M_1$ : número de tipos de máquina de produção de jumbos;

$m_2 = 1, \dots, M_2$ : número de rebobinadeiras (máquinas de produção de bobinas);

$m_3 = 1, \dots, M_3$ : número de cortadeiras (máquinas de produção de formatos);

$t = 1, \dots, T$ : número de períodos no horizonte de planejamento;

$\tau = 1, \dots, \theta$ : número de sub-períodos dentro do primeiro período;

$i_2 = 1, \dots, N f_2$ : número de tipos de bobinas cortadas;

$i_3 = 1, \dots, N f_3$ : número de tipos de formatos demandados;

$j_2 = 1, \dots, N m_1$ : número de padrões de corte unidimensionais para os jumbos de largura  $L_{m_1}$ ;

$j_3 = 1, \dots, N i_2$ : número de padrões de corte bidimensionais para as bobinas de largura  $l_{i_2}$ ;

$\{1, \dots, N f_2\} = S_2(1) \cup S_2(2) \cup \dots \cup S_2(K)$ , sendo  $S_2(k) = \{i_2 \text{ tal que a bobina } i_2 \text{ é de gramatura } k\}$ .

$\{1, \dots, N f_3\} = S_3(1) \cup S_3(2) \cup \dots \cup S_3(K)$ , sendo  $S_3(k) = \{i_3 \text{ tal que o item } i_3 \text{ é de gramatura } k\}$ .



### 3.2. Fase 1

#### 3.2.1. Parâmetros

- $c_{1k,m_1,t}$ : custo de produção do jumbo de gramatura  $k$  na máquina  $m_1$  no período  $t$ ;  
 $s_{1k,m_1,t}$ : custo de preparação para produzir jumbos de gramatura  $k$  na máquina  $m_1$  no período  $t$ ;  
 $h_{1k,t}$ : custo/kg de estocar jumbos de gramatura  $k$  no final do período  $t$ ;  
 $L_{m_1}$ : comprimento do jumbo produzido pela máquina  $m_1$ ;  
 $b_{1k,m_1}$ : peso do jumbo de gramatura  $k$  produzido na máquina  $m_1$ ;  
 $d_{1k,m_1,t}$ : demanda de jumbos de gramatura  $k$  e largura  $L_{m_1}$  para serem entregues como produto final no período  $t$ ;  
 $\delta_{1k,m_1,t}$ : demanda extra de jumbos de gramatura  $k$  e largura  $L_{m_1}$  no período  $t$ , que serão convertidos em bobinas;  
 $f_{1k,m_1}$ : tempo gasto para produzir um jumbo de gramatura  $k$  na máquina  $m_1$ ;  
 $g_{1k,m_1}$ : tempo de preparação para produzir um jumbo de gramatura  $k$  na máquina  $m_1$ ;  
 $C_{1t}$ : tempo disponível para produção de jumbos no período  $t$ ;

#### 3.2.2. Variáveis de decisão

- $x_{1k,m_1,t}$ : quantidade de jumbos de gramatura  $k$  produzidos na máquina  $m_1$  no período  $t$ ;  
 $z_{1k,m_1,t}$ : variáveis binárias que indicam se houve ou não produção do jumbo de gramatura  $k$  na máquina  $m_1$  no período  $t$ ;  
 $e_{1k,m_1,t}$ : quantidade de jumbos de gramatura  $k$  produzidos na máquina  $m_1$  estocados no final do período  $t$ .

### 3.3. Fase 2

#### 3.3.1. Parâmetros

- $c_{2k,t}$ : custo de perda de papel de gramatura  $k$  durante o processo de corte, no período  $t$ ;  
 $p_{2m_1}^{j_2}$ : perda de papel no padrão de corte  $j_2$  usado para cortar um jumbo de comprimento  $L_{m_1}$ ;  
 $s_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2}$ : custo de preparação para cortar jumbos de gramatura  $k$  e comprimento  $L_{m_1}$  na máquina  $m_2$  no período  $t$  segundo o padrão de corte  $j_2$ ;  
 $h_{2i_2,t}$ : custo/kg de estocar bobinas do tipo  $i_2$  no final do período  $t$ ;  
 $l_{i_2}$ : comprimento da bobina de tipo  $i_2$ ;  
 $b_{2i_2}$ : peso da bobina do tipo  $i_2$ ;  
 $d_{2i_2,t}$ : demanda de bobinas de tipo  $i_2$  para serem entregues como produto final no período  $t$ ;  
 $\delta_{2i_2,t}$ : demanda extra de bobinas de tipo  $i_2$  no período  $t$ , que serão convertidas em formatos;  
 $f_{2k,m_1,m_2}^{j_2}$ : tempo gasto para cortar um jumbo de gramatura  $k$  e comprimento  $L_{m_1}$  na máquina  $m_2$ , segundo o padrão  $j_2$ ;  
 $g_{2k,m_1,m_2}^{j_2}$ : tempo de preparação para cortar jumbos de gramatura  $k$  e comprimento  $L_{m_1}$  na máquina  $m_2$ , segundo o padrão  $j_2$ ;  
 $C_{2t}$ : tempo disponível para corte de jumbos no período  $t$ ;  
 $a_{2i_2,m_1}^{j_2}$ : quantidade de itens do tipo  $i_2$  cortados no jumbo de comprimento  $L_{m_1}$  segundo o padrão  $j_2$ .

#### 3.3.2. Variáveis de decisão

- $y_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2}$ : quantidade de jumbos de gramatura  $k$  produzidos na máquina  $m_1$ , que são cortados unidimensionalmente na rebobinadeira  $m_2$  no período  $t$  usando o padrão de corte  $j_2$ ;  
 $z_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2}$ : variáveis binárias que indicam se houve ou não corte de jumbo de gramatura  $k$  produzido na máquina  $m_1$  na máquina  $m_2$  no período  $t$  usando o padrão de corte  $j_2$ ;  
 $e_{2i_2,t}$ : quantidade de bobinas do tipo  $i_2$  em estoque no final do período  $t$ .



### 3.4. Fase 3

#### 3.4.1. Parâmetros

- $c_{3k,\tau}$ : custo por perda de papel de gramatura  $k$  durante o processo de corte no sub-período  $\tau$ ;  
 $p_{3i_2}^{j_3}$ : perda de papel no corte da bobina de tipo  $i_2$  segundo o padrão  $j_3$ ;  
 $s_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3}$ : custo de preparação para corte da bobina de tipo  $i_2$  na máquina  $m_3$  no sub-período  $\tau$  segundo o padrão  $j_3$ ;  
 $h_{3i_3,\tau}$ : custo/kg de estocar formatos do tipo  $i_3$  no sub-período  $\tau$ ;  
 $l_{i_3}$ : comprimento do formato de tipo  $i_3$ ;  
 $w_{i_3}$ : largura do formato de tipo  $i_3$ ;  
 $b_{2i_3}$ : peso do formato de tipo  $i_3$ ;  
 $d_{2i_3,\tau}$ : demanda de formatos do tipo  $i_3$  no sub-período  $\tau$ ;  
 $f_{3i_2,m_3}^{j_3}$ : tempo gasto para cortar uma bobina do tipo  $i_2$  de comprimento  $l_{2i_2}$  na máquina  $m_3$  segundo o padrão  $j_3$ ;  
 $g_{3i_2,m_3}^{j_3}$ : tempo de preparação para cortar bobinas do tipo  $i_2$  de comprimento  $l_{2i_2}$  na máquina  $m_3$  segundo o padrão  $j_3$ ;  
 $C_{3,\tau}$ : tempo disponível para corte de bobinas no sub-período  $\tau$ ;  
 $a_{3i_3,i_2}^{j_3}$ : quantidade de itens do tipo  $i_3$  cortados na bobina do tipo  $i_2$  segundo o padrão  $j_3$ ;

#### 3.4.2. Variáveis de decisão

- $y_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3}$ : quantidade de bobinas  $i_2$  que são cortadas segundo o padrão de corte guilhotinado dois estágios  $j_3$  na cortadeira  $m_3$  no sub-período  $\tau$ ;  
 $z_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3}$ : variáveis binárias que indicam se houve corte na máquina  $m_3$  da bobina  $i_2$  no sub-período  $\tau$ , usando o padrão de corte  $j_3$ ;  
 $e_{3i_3,\tau}$ : quantidade de formatos de tipo  $i_3$  em estoque no final do sub-período  $\tau$ .

### 3.5. Modelo Matemático

O modelo matemático que representa o processo descrito é dado por:

minimizar

$$\sum_{t=1}^T \sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{k=1}^K (c_{1k,m_1,t} x_{1k,m_1,t} + s_{1k,m_1,t} z_{1k,m_1,t} + h_{1k,t} b_{1k,m_1} e_{1k,m_1,t}) + \quad (1a)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{m_2=1}^{M_2} \sum_{k=1}^K \sum_{j_2=1}^{N_{m_1}} (c_{2k,t} p_{2m_1}^{j_2} y_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2} + s_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2} z_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \sum_{i_2 \in S_2(k)} h_{2i_2,t} b_{2i_2} e_{2i_2,t} + \quad (1b)$$

$$\sum_{\tau=1}^{\Theta} \sum_{m_3=1}^{M_3} \sum_{k=1}^K \sum_{j_3=1}^{N_{i_2}} \sum_{i_2 \in S_2(k)} (c_{3k,\tau} p_{3i_2}^{j_3} y_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3} + s_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3} z_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3}) + \sum_{\tau=1}^{\Theta} \sum_{k=1}^K \sum_{i_3 \in S_3(k)} h_{3i_3,\tau} b_{2i_3} e_{3i_3,\tau} \quad (1c)$$

sujeito a

$$x_{1k,m_1,t} + e_{1k,m_1,t-1} - e_{1k,m_1,t} = d_{1k,m_1,t} + \sum_{m_2=1}^{M_2} \sum_{j_2=1}^{N_{m_1}} y_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2}, \quad k = 1, \dots, K, \\ m_1 = 1, \dots, M_1, \quad t = 1, \dots, T; \quad (1d)$$

$$\sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{k=1}^K (f_{1k,m_1} x_{1k,m_1,t} + g_{1k,m_1} z_{1k,m_1,t}) \leq C_{1t}, \quad t = 1, \dots, T; \quad (1e)$$



$$x_{1k,m_1,t} \leq Qz_{1k,m_1,t}, \quad k = 1, \dots, K, \quad m_1 = 1, \dots, M_1, \quad t = 1, \dots, T; \quad (1f)$$

$$\sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{m_2=1}^{M_2} \sum_{j_2=1}^{Nm_1} a_{2i_2,m_1}^{j_2} y_{2k,m_1,m_2,1}^{j_2} - e_{2i_2,1} = d_{2i_2,1} + \sum_{\tau=1}^{\Theta} \sum_{m_3=1}^{M_3} \sum_{j_3=1}^{Ni_2} y_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3},$$

$$i_2 \in S_2(k), \quad k = 1, \dots, K; \quad (1g)$$

$$\sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{m_2=1}^{M_2} \sum_{j_2=1}^{Nm_1} \sum_{i_2 \in S_2(k)} (a_{2i_2,m_1}^{j_2} y_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2} + e_{2i_2,t-1} - e_{2i_2,t}) = d_{2i_2,t},$$

$$k = 1, \dots, K, \quad i_2 \in S_2(k), \quad t = 2, \dots, T; \quad (1h)$$

$$\sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{m_2=1}^{M_2} \sum_{k=1}^K \sum_{j_2=1}^{Nm_1} (f_{2k,m_1,m_2}^{j_2} y_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2} + g_{2k,m_1,m_2}^{j_2} z_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2}) \leq C_{2t}, \quad t = 1, \dots, T; \quad (1i)$$

$$y_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2} \leq Qz_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2}, \quad k = 1, \dots, K, \quad m_1 = 1, \dots, M_1, \quad m_2 = 1, \dots, M_2,$$

$$t = 1, \dots, T, \quad j_2 = 1, \dots, Nm_1; \quad (1j)$$

$$\sum_{m_3=1}^{M_3} \sum_{j_3=1}^{Ni_2} \sum_{i_2 \in S(k)} (a_{3i_3,i_2}^{j_3} y_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3} + e_{3i_3,\tau-1} - e_{3i_3,\tau}) = d_{3i_3,\tau}, \quad i_3 \in S_3(k),$$

$$k = 1, \dots, K, \quad \tau = 1, \dots, \Theta; \quad (1k)$$

$$\sum_{m_3=1}^{M_3} \sum_{k=1}^K \sum_{j_3=1}^{Ni_2} \sum_{i_2 \in S(k)} (f_{3i_2,m_3}^{j_3} y_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3} + g_{3i_2,m_3}^{j_3} z_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3}) \leq C_{3\tau}, \quad \tau = 1, \dots, \Theta; \quad (1l)$$

$$y_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3} \leq Qz_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3}, \quad j_3 = 1, \dots, Ni_2, \quad i_2 \in S_2(k), \quad k = 1, \dots, K, \quad m_3 = 1, \dots, M_3,$$

$$\tau = 1, \dots, \Theta; \quad (1m)$$

$$x_{1k,m_1,t}, e_{1k,m_1,t} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad z_{1k,m_1,t} \in \{0, 1\}, \quad e_{1k,m_1,0} = 0 \quad k = 1, \dots, K,$$

$$m_1 = 1, \dots, M_1, \quad t = 1, \dots, T; \quad (1n)$$

$$y_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2}, e_{2i_2,t} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad z_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2} \in \{0, 1\}, \quad e_{2i_2,0} = 0 \quad k = 1, \dots, K,$$

$$i_2 \in S_2(k), \quad m_1 = 1, \dots, M_1, \quad m_2 = 1, \dots, M_2, \quad t = 1, \dots, T, \quad j_2 = 1, \dots, Nm_1; \quad (1o)$$

$$y_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3}, e_{3i_3,\tau} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad z_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3} \in \{0, 1\}, \quad e_{3i_3,0} = 0; \quad k = 1, \dots, K,$$

$$i_3 \in S_3(k), \quad i_2 \in S_2(k), \quad m_3 = 1, \dots, M_3, \quad \tau = 1, \dots, \Theta, \quad j_3 = 1, \dots, Ni_2. \quad (1p)$$

A função objetivo é composta pelos custos (1a) da Fase 1, que são referentes à produção de jumbos, preparação de máquina e estoque de jumbos, pelos custos (1b) da Fase 2, referentes ao desperdício de material, preparação de máquina e estoque de bobinas, e pelos custos (1c) da Fase 3, de desperdício de material, preparação de máquina e estoque de formatos.

As restrições (1d) garantem que o total de jumbos disponível em cada período do horizonte de planejamento atenda a demanda a ser entregue ao cliente e a quantidade que será cortada para abastecer as fases 2 e 3.

As restrições de limitação da capacidade de máquina para a fase 1 aparecem em (1e).

As restrições (1f) são de preparação de máquina para a fase 1 e garantem a incidência de custos se houver produção.

Em (1g), o total de bobinas disponível no primeiro período deve ser suficiente para atender a demanda de bobinas a serem entregues ao cliente mais o total de bobinas que serão cortadas em formatos em todos os sub-períodos da Fase 3.

Nas restrições (1h), fazemos com que a demanda de bobinas seja atendida para os períodos posteriores ao primeiro.

A utilização das rebobinadeiras está restrita a capacidade disponível em (1i).

As restrições (1j) são de preparação de máquina para a Fase 2.

As restrições (1k) são de atendimento à demanda de formatos.



O conjunto de restrições (1l) são de atendimento à capacidade das cortadeiras e em (1m) estão as restrições de preparação de máquina para a Fase 3.

Por fim, as restrições de (1n) a (1p) delimitam o escopo das variáveis: as de tipo  $x$ ,  $y$  e  $e$  como inteiras e não negativas e as de tipo  $z$  como binárias. Além disso, consideramos os estoques iniciais nulos.

#### 4. Método de Solução

Para resolver o modelo matemático proposto, nos deparamos com algumas dificuldades que nos impedem de encontrar soluções ótimas com variáveis inteiras para instâncias de dimensões significativas. Dessa forma, propomos um método heurístico de resolução que apresentamos a seguir.

A primeira dificuldade é a existência das variáveis binárias de preparação de máquina, provenientes do problema de dimensionamento de lotes do modelo. A estratégia adotada para contornar tal dificuldade foi não considerar explicitamente os custos e tempos de preparação no modelo, mas acrescentá-los nos custos e tempos de produção. Assim, as variáveis  $z_{1k,m_1,t}^{j_2}$ ,  $z_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2}$  e  $z_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3}$ , e os parâmetros que as acompanham, não aparecem no modelo modificado. Por esse motivo, as restrições 1f, 1j e 1m são desconsideradas.

As outras duas dificuldades se referem ao problema de corte de estoque: a integralidade das variáveis e o grande número de padrões de corte. Para tratá-las, a integralidade das variáveis é relaxada, ou seja, resolvemos o modelo matemático (1) sem essa imposição, obtendo um modelo matemático relaxado, cujo valor da solução ótima é real, e depois aplicamos uma heurística de arredondamento para determinar uma solução com valores inteiros. Já o imenso número de colunas presentes no modelo referentes aos padrões de corte é evitado utilizando o Método Simplex com Geração de Colunas.

O fluxograma da Figura 2 esquematiza o método de resolução proposto. Ele está dividido em três etapas: adaptações, problema mestre e geração de padrões de corte. A etapa de adaptações serve para remover as variáveis de preparação e relaxar a integralidade das variáveis, além de gerar os padrões de corte homogêneos para a Fase 2 (corte unidimensional de jumbos em bobinas) e Fase 3 (corte bidimensional de bobinas em formatos). Com isso, temos um problema mestre inicial e podemos passar para a Etapa 2, onde esse problema é resolvido e os valores das variáveis duais ótimos passados para a Etapa 3, de geração de padrões de corte. Esta, por sua vez, é dividida em duas partes, uma para gerar padrões de corte unidimensionais para os jumbos e outra para gerar padrões de corte bidimensionais para as bobinas.

Na terceira etapa, resolvemos diversos subproblemas, um para cada combinação de gramatura, máquina e período, para obter os melhores padrões de corte unidimensionais. Se o custo relativo da nova coluna do problema mestre referente a cada padrão de corte gerado for negativo, a coluna é construída e inserida no problema mestre. Em seguida, resolvemos vários subproblemas para obter os melhores padrões de corte bidimensionais, um para cada combinação de sub-período e tipo de bobina. Novamente, se o custo relativo da nova coluna para cada padrão gerado for negativo, ela é construída e adicionada ao problema mestre. Se foi adicionada alguma nova coluna durante essa etapa de subproblema, resolvemos novamente o problema mestre e recomeçamos uma nova iteração do subproblema. Caso contrário, significa que a solução relaxada obtida não pode mais ser melhorada. Resta, então, voltar para a etapa de adaptações para arredondá-la para valores inteiros com auxílio de heurísticas.

#### 5. Experimentos Computacionais

Nos experimentos computacionais, para implementar o gerador de instâncias e a heurística para resolução do modelo matemático bi-integrado foi usada a linguagem de programação Matlab.

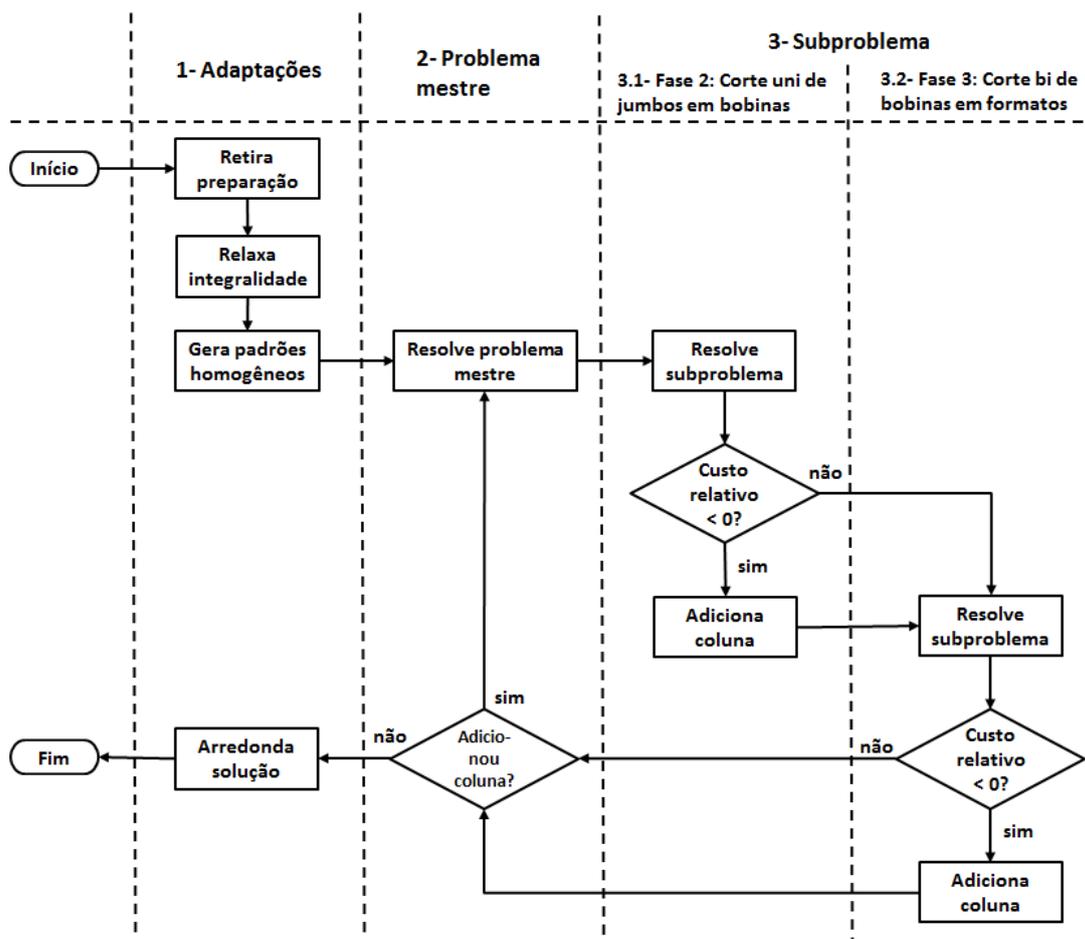


Figura 2: Fluxograma do método de resolução

Para resolver os problemas de otimização que surgem a cada iteração do método de resolução proposto (problema mestre e sub-problemas), foi utilizado o *solver* CPLEX v. 12.6.1, da IBM.

A fim de avaliar o desempenho do método heurístico proposto também resolvemos o modelo (1) relaxado composto por todos os possíveis padrões de corte das fases 2 e 3, o qual chamaremos a partir de agora de modelo completo. Assim, quanto mais a solução heurística se aproximar da solução ótima do modelo completo melhor é. Realizamos testes com 8 classes diferentes, detalhadas a seguir, usando 50 instâncias em cada. Para uma das classes, um outro tipo de experimento foi realizado, comparando o resultado ao resolver o modelo (1) completo com o resultado ao resolver cada uma das fases separadamente, de maneira sequencial. É de se esperar que resolver o modelo bi-integrado traga redução do custo global.

Para comparar o desempenho do método heurístico com o modelo completo, precisamos de instâncias dimensionalmente pequenas, para que seja possível gerar todos os padrões de corte. Sendo assim, testamos instâncias com as seguintes configurações:  $T = 4$ ;  $\theta = 5$ ,  $K = 1$ ,  $Nf_2 = 3$ ,  $Nf_3 = 2$  e  $M_1 = M_2 = M_3 = 2$ .

As oito classes que utilizamos são caracterizadas por três tipos de configurações: o primeiro é se, na Fase 3, é ou não permitida aparas; a segunda é se é ou não permitida bobina intermediária, um tipo de bobina que não tem demanda em carteira, sendo formada apenas para gerar formatos; por fim, se a demanda deve ou não ser exata, ou seja, se é necessário produzir exatamente o requisitado, ou se é permitido produzir além do requisitado, em cada uma das fases. A Tabela 1 resume as classes de problemas testadas. Para cada classe, testamos 50 instâncias cujos parâmetros



foram gerados aleatoriamente dos intervalos especificados na Tabela 2.

Tabela 1: Classes de problemas

Classe	Apara permitida?	Qte de bobina intermediária	Demanda
1	Sim	1	Exata
2	Sim	1	Inexata
3	Sim	0	Exata
4	Sim	0	Inexata
5	Não	1	Exata
6	Não	1	Inexata
7	Não	0	Exata
8	Não	0	Inexata

A medida que utilizamos para comparar o desempenho das estratégias de resolução é a de diferença percentual entre os custos totais, que chamaremos de *gap*. Seja o custo calculado pelo modelo completo,  $C_{\text{todos-padroes}}$ , e o custo calculado pela estratégia heurística,  $C_{\text{heuristica}}$ . Calculamos o *gap* por meio da seguinte relação:

$$gap = \frac{C_{\text{heuristica}}}{C_{\text{completo}}} - 1 \quad (2a)$$

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 3. Analisando os gráficos *boxplot* notamos que, para todas as classes, o primeiro *quartil* é 0%, o que quer dizer que, para 25% das instâncias, o resultado do modelo resolvido pela heurística bi-integrada equivale ao resultado do modelo resolvido usando todos os padrões de corte.

A mediana ficou no intervalo entre 2% (Classe 8) e 14% (Classe 3). Já o terceiro *quartil*, se não considerarmos a Classe 3, ficou no intervalo entre 19,3% (Classe 6) e 28,5% (Classe 1). Consideramos tais valores como aceitáveis, dada a complexidade do modelo em questão. O último *quartil* apresenta *gaps* acima do ideal e têm sido objeto de investigação para melhora da heurística.

Como a Classe 5 obteve bons resultados no teste anterior, escolhemos a mesma para fazer uma comparação entre duas estratégias de resolução do modelo. Na primeira, que denominamos, nesse trabalho, de (1+2+3) (integrada), consideramos o modelo bi-integrado (1) relaxado e resolvemos por meio do método de resolução proposto. Na segunda, que denominamos de 1-2-3 (sequencial) e que é a que melhor representa o processo geral de fabricação escolhido na indústria, resolvemos as três fases de maneira sequencial e heurística, conforme esquematizado na Figura 4: primeiro, resolvemos o modelo da Fase 3, composto por (1c), (1k) e (1l); com as quantidades de bobinas necessárias para essa fase, alimentamos a Fase 2, composta por (1b), (1h), (1i) e (1g); por

Tabela 2: Intervalos de valores para geração dos parâmetros

Fase 1		Fase 2		Fase 3	
Parâm.	Valores	Parâm.	Valores	Parâm.	Valores
$c_{1k,m_1,t}$	R\$ [7,5; 12,5]	$c_{2k,t}$	R\$ $\frac{\sum_{m_1=1}^{M_1} c_{1k,m_1,t}}{100M_1cm^2}$	$c_{3k,\tau}$	R\$ $\frac{\sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{t=1}^T c_{1k,m_1,t}}{2500M_1Tcm^2}$
$s_{1k,m_1,t}$	R\$ [15; 25]	$s_{2k,m_1,m_2,t}^{j2}$	R\$ [3; 5]	$s_{3i_2,m_3,\tau}^{j3}$	R\$ [0,075; 0,125]
$h_{1k,t}$	R\$ [3,75; 6,25] / kg	$h_{2i_2,t}$	R\$ [0,75; 1,25] / kg	$h_{3i_3,\tau}$	R\$ [0,05; 0,08] / kg
$L_{m_1}$	[800; 2000] cm	$l_{2i_2}$	[50; 150] cm	$l_{i_3} / w_{i_3}$	[30; 100] cm
$b_{1k,m_1}$	$vol. \times \frac{gramat.}{esp.}$	$b_{2i_2}$	$vol. \times \frac{gramat.}{esp.}$	$b_{3i_3}$	$larg. \times compr. \times gramat.$
$d_{1k,m_1,t}$	[0; 30]	$d_{2i_2,t}$	[0; 300]	$d_{3i_3,\tau}$	[0; 30000]
$f_{1k,m_1}$	[110,8; 166,7] min	$f_{2k,m_1,m_2}^{j2}$	[30; 83,3] min	$f_{3i_2,m_3}^{j3}$	[50; 200] min
$g_{1k,m_1}$	[1; 2] min	$g_{2k,m_1,m_2}^{j2}$	[25; 50] min	$g_{3i_2,m_3}^{j3}$	[25; 50] min
$C_{1t}$	[8; 24] h/dia $\times M_1$	$C_{2t}$	[8; 24] h/dia $\times M_2$	$C_{3\tau}$	[8; 24] h/dia $\times M_3$

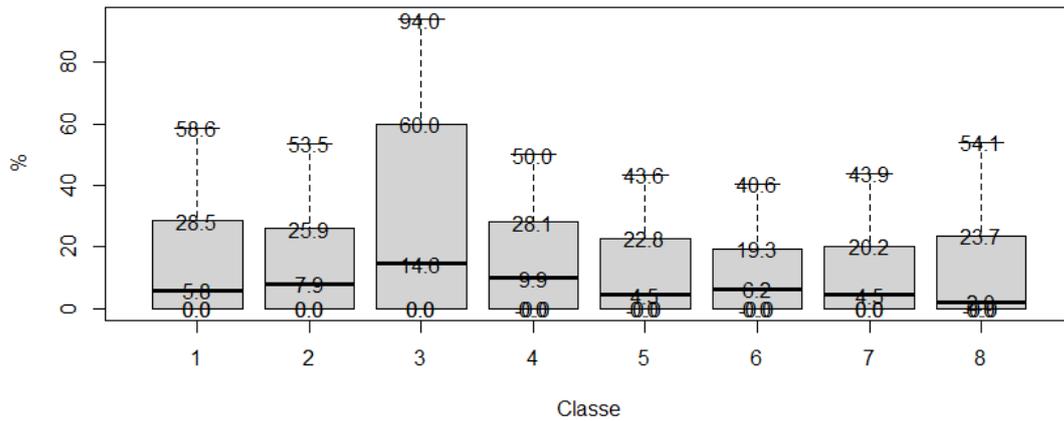


Figura 3: Gap em Relação ao Modelo Completo

fim, com as quantidades necessárias de jumbos, alimentamos a Fase 1, constituída por (1a), (1k), (1l) e (1d). Esse tipo de abordagem resulta da combinação dos trabalhos de Gilmore e Gomory [1965] e Gilmore e Gomory [1961]. Essas duas estratégias, integrada e sequencial, são comparadas com a resolução do modelo completo.

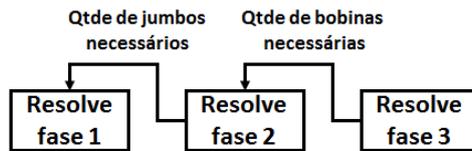


Figura 4: Resolução por meio de 3 Fases Sequenciais

A Figura 5 compara os gaps obtidos. Enquanto a estratégia 1-2-3 apresenta um gap de mediana 97% em relação ao modelo completo, resolvendo o modelo por meio de (1+2+3) obtém um desvio de mediana 4%, o que gera uma redução de 93%.

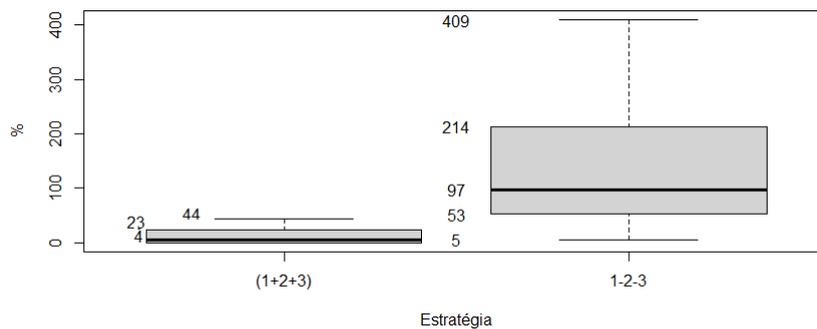


Figura 5: Gap das Estratégias (1+2+3) e 1-2-3 - Classe 5

Essas duas estratégias de resolução são comparadas com a resolução do modelo completo. A Figura 6 explica essa diferença entre as estratégias. Enquanto 1-2-3 obtém o menor custo para a Fase 3, menor até que o obtido resolvendo o modelo completo, seu custo na Fase 2 é o mais elevado entre as estratégias. Isso se deve ao fato de que a escolha das bobinas a serem cortadas é ótima para a Fase 3, mas não para o processo completo. Uma solução um pouco pior para uma determinada fase pode beneficiar as soluções das outras, melhorando o custo total do processo.

A Figura 7 mostra o desempenho computacional dessas estratégias. O modelo completo

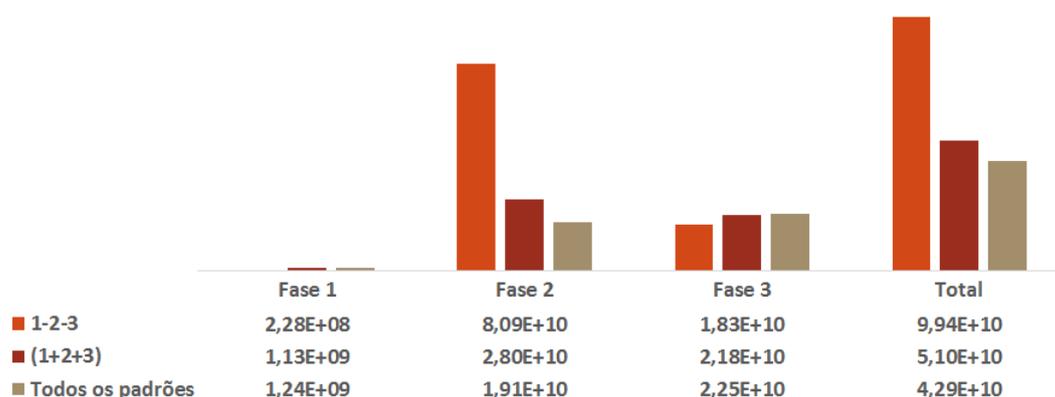


Figura 6: Comparação de Custos por Fase - Classe 5

é o que obtém o menor tempo de execução, entre 0,3 e 6,3 segundos, pois é resolvido relaxado. Por outro lado, utiliza uma quantidade extremamente alta de colunas, chegando até à casa dos milhões, mesmo para um problema dimensionalmente pequeno. Para dimensões um pouco maiores, essa quantidade extrapola, tornando inviável resolver o modelo por essa maneira.

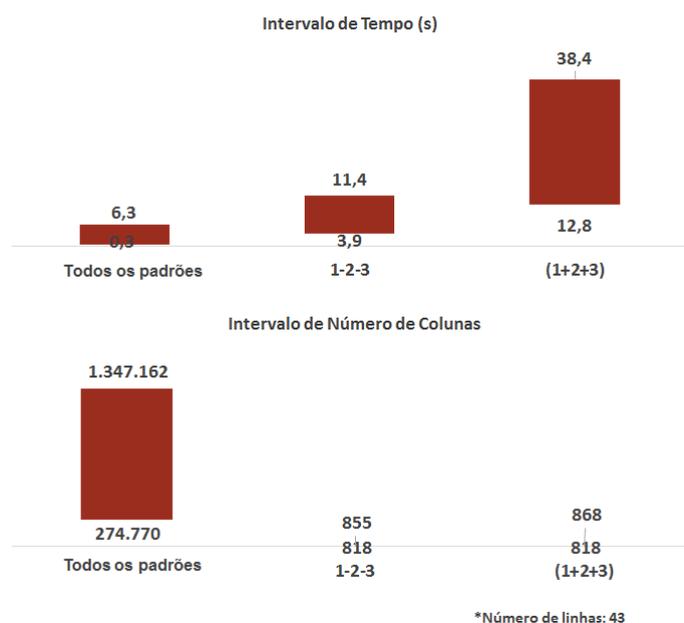


Figura 7: Desempenho Computacional - Classe 5

Já as heurísticas segundo as estratégias (1-2-3) e (1+2+3), por conta do algoritmo iterativo de escolha das colunas, apresentam um tempo computacional maior. Em compensação, elas utilizam uma quantidade de colunas na casa das centenas, já que selecionam apenas os melhores padrões de corte, e se mostram mais viáveis para problemas reais da indústria. Apesar do tempo computacional maior, (1+2+3) se justifica como a melhor escolha por obter os resultados mais próximos do modelo completo.

## 6. Conclusões e Perspectivas de Trabalho

Neste trabalho, propusemos um método para resolver o modelo matemático (1) que integra as três fases do processo produtivo com o objetivo de obter custos globais melhores do que a



soma dos custos de cada fase e que é baseada no método Simplex com Geração de Coluna. A fim de testar o desempenho desse método, testamos algumas classes com exemplares pequenos, de modo a ser possível gerar todos os padrões de corte, para as duas fases de corte existentes. Concluímos que o desempenho do método proposto tem se mostrado satisfatório para a maior parte das amostras testadas. De fato, para todas as classes, em 25% das instâncias o resultado obtido pela estratégia heurística foi o mesmo que o obtido do modelo completo. Em 75% das amostras, consideramos os *gaps* obtidos como aceitáveis, dada a complexidade do modelo resolvido.

Quando comparamos a estratégia integrada, que resolve as três fases em um mesmo modelo, com a que as resolve sequencialmente, obtivemos uma diminuição de 93% no *gap*. Esse resultado confirma que atingimos o nosso objetivo inicial.

Como perspectiva de continuação do trabalho, investigaremos as causas e executaremos as melhorias necessárias no método de resolução para as amostras com *gaps* distantes do ideal. Além disso, desenvolveremos uma heurística de arredondamento da solução para valores inteiros.

## 7. Agradecimentos

Agradecemos à FAEPEX - Unicamp, FAPESP e CAPES pelo apoio financeiro.

## Referências

- Ayres, A. O. C., Ghidini, C. T. L. S., Oliveira, W. A., e Campello, B. S. C. (2017). Um modelo bi-integrado do processo de produção de papel. In *Caderno de trabalhos completos e resumos do IV ERMAC - Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - Unesp, Bauru/SP, 2017*, p. 393–400.
- Chauhan, S. S., Martel, A., e D'Amour, S. (2008). Roll assortment optimization in a paper mill: An integer programming approach. *Computers and Operations Research*, 35(2):614–627. ISSN 03050548.
- Correia, M. H., Oliveira, J. F., e Ferreira, S. S. (2004). Reel and sheet cutting at a paper mill. *Computers and Operations Research*, 31(8):1223–1243. ISSN 03050548.
- Gilmore, P. C. e Gomory, R. E. (1961). A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem. *Operations Research*, 9(6):849–859.
- Gilmore, P. C. e Gomory, R. E. (1965). Multistage Cutting Stock Problems of Two and More Dimensions. *Operations Research*, 13(1):94–120.
- Kallrath, J., Rebennack, S., Kallrath, J., e Kusche, R. (2014). Solving real-world cutting stock-problems in the paper industry: Mathematical approaches, experience and challenges. *European Journal of Operational Research*, 238(1):374–389. ISSN 03772217.
- Keskinocak, P., Wu, F., Goodwin, R., Murthy, S., Akkiraju, R., Kumaran, S., e Derebail, A. (2002). Scheduling Solutions for the Paper Industry. *Operations Research*, 50(2):249–259. ISSN 0030-364X.
- Poltroniere, S. C., Poldi, K. C., Toledo, F. M. B., e Arenales, M. N. (2008). A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry. *Annals of Operations Research*, 157(1):91–104. ISSN 02545330.
- Respício, A. L. d. C. C. (2003). Apoio à Tomada de Decisão no Planejamento e Escalonamento da Produção.
- Sethi, S. e Sorger, G. (1991). A theory of rolling horizon decision making. *Annals of Operations Research*, 29(1):387–415. ISSN 1572-9338. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02283607>.