



GERAÇÃO DE COLUNAS APLICADA AO PROBLEMA DE ANÁLISE DE NÍVEL DE REPARO COM DECISÃO CONJUNTA DE LOCALIZAÇÃO DE INSTALAÇÕES E NÍVEIS DE ESTOQUE

Verônica Prottes Fecher, Artur Alves Pessoa, Eduardo Siqueira Brick
Departamento de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, Bloco E, 4o andar, sala 440, São Domingos, Niterói, RJ
veronicaprottes@hotmail.com, artur@producao.uff.br, brick@producao.uff.br

RESUMO

Este trabalho trata uma variante do problema LORA – análise de nível de reparo – que permite otimizar conjuntamente a localização das instalações de reparo e os níveis de estoque nas bases operacionais. São consideradas apenas operações de reparo de um único componente. O objetivo é maximizar a disponibilidade do sistema, respeitando um dado limite imposto ao orçamento total gasto com a estrutura de manutenção. Para este problema, foi proposto um algoritmo que gera um limitante inferior por Geração de Colunas, que permite isolar a não-linearidade da função objetivo nos subproblemas, e uma solução viável através da resolução do problema restrito às colunas geradas. O algoritmo proposto foi testado em 20 instâncias com 50 e 100 bases operacionais geradas a partir de uma adaptação de instâncias da literatura do problema de p -medianas. Os resultados revelaram-se promissores pela estabilidade dos tempos de execução e dos desvios entre os limites superior e inferior encontrados.

PALAVRAS CHAVE. LORA, Localização de Instalações, Geração de Colunas.

Otimização Combinatória, Programação Matemática.

ABSTRACT

This paper deals with a variant of the LORA – Level of Repair Analysis – problem that allows to jointly optimize repair facility locations and operational base inventory levels. Only repair operations applied to a single component are considered. The objective is to maximize the system's availability, subject a constraint imposed on the total budget spent on the maintenance structure. For this problem, we propose an algorithm based on Column Generation, which allows to isolate the non-linearity of the objective function in the subproblems. It generates both a lower bound and a feasible solution obtained through the resolution of the problem restricted to the generated columns. The proposed algorithm was tested in 20 instances with 50 and 100 operational bases generated by adapting literature instances of the p -median problem. The results were considered promising due to the stability of the obtained run times and deviations between the upper and lower bounds.

KEYWORDS. LORA, Facility Location, Column Generation.

Combinatorial Optimization, Mathematical Programming.



1. Introdução

LORA – *Level of Repair Analysis* – é uma metodologia de análise que objetiva definir uma dada estrutura de manutenção e reparo, a localização ótima de instalações, a quantidade de recursos requeridos em cada instalação e as políticas de reparo, ou seja, se um dado componente com uma pane deve ser descartado ou reparado e onde este reparo deve ocorrer. Geralmente aplicada a sistemas técnicos dispersos geograficamente ou mesmo a indústrias de alta tecnologia, LORA possui o objetivo de, através deste conjunto de decisões, alcançar uma disponibilidade máxima dos ativos operacionais, limitado a um determinado orçamento, ou minimizar os custos, dada uma disponibilidade alvo.

Um sistema técnico pode ser representado por uma estrutura de árvore em que há diversos níveis de endentação (relação pai-filho) dos itens. Dependendo dos recursos presentes nos locais de operação, é possível que somente alguns componentes, denominados LRU – *line replaceable unit*, possam ser substituídos no local. Os componentes que não podem ser substituídos no local de operação e são filhos de LRU, são chamados de SRU – *shop replaceable unit*, uma vez que para serem reparados devem ser retirados do LRU pai em outro local.

A estrutura de manutenção também pode possuir vários níveis, ou escalões de manutenção. O escalão operacional, ou base, compreende os locais onde os ativos estão instalados e operando, e os *depots* são normalmente instalações com características industriais, capazes de efetuar reparos mais complexos, que exigem recursos mais eficazes e mais caros. É usual uma estrutura multi-escalão com até 4 níveis.

Quando ocorre uma falha em um componente do sistema técnico, deve-se realizar a substituição deste item por um outro em funcionamento, e decidir pelo reparo ou descarte do item defeituoso. Em uma estrutura de manutenção com apenas dois escalões, base e *depot*, caso não haja uma peça de reposição disponível na base, haverá uma indisponibilidade do ativo, que durará até que o *depot* efetue o reparo, ou envie um sobressalente existente no seu estoque para a base. Se não houver um sobressalente disponível no *depot*, o pedido se torna pendente, ou seja, um “*backorder*” e o sistema fica não-operacional. Os estoques nas bases e nos *depots* devem ser dimensionados de maneira a minimizar o número de *backorders*.

Há muitas maneiras de se tratar LORA, considerando as diversas variações na estrutura dos sistemas técnicos e de escalões de manutenção. [Alfredsson 1997] propôs um modelo cuja função objetivo maximizava a disponibilidade dos ativos operacionais, trabalhando com uma estrutura de manutenção com três escalões: um *depot* apoiando vários níveis regionais, os quais, por sua vez, apoiam várias bases locais. Em seu trabalho, ele considera apenas um tipo de LRU com o mesmo conjunto de recursos para realização da análise de falha e reparo. Para a resolução do problema, utilizou a análise marginal, fazendo para isso diversas premissas simplificadoras para lidar com problemas de convexidade.

[Barros 1998] insere em seu modelo a capacidade de lidar com o descarte de componentes além do reparo. Seu modelo é não capacitado, ou seja, considera não haver limite de recursos para a execução das atividades, e que LRU's de mesmo nível de endentação necessitam dos mesmos recursos para reparo. Inclui SRU's em seu modelo, trabalhando com mais de um nível de endentação. Seu modelo minimiza o custo de manutenção ao longo do ciclo de vida dos ativos em função de parâmetros de confiabilidade e manutenibilidade. Já [Barros e Riley 2001] estendem o modelo anterior com uma formulação de programação inteira e utilização de branch-and-bound para encontrar soluções exatas. Porém, tanto o primeiro quanto sua extensão ainda utilizam hipóteses simplificadoras que podem não ser aplicáveis em situações reais.

[Saranga e Kumar 2006] em seu modelo buscam a minimização dos custos de manutenção por horas de vô associado com diferentes opções de reparo em uma estrutura multi-escalão. Para o cálculo do nível do escalão em que cada reparo/substituição devem ocorrer, bem como o tipo de ação a ser realizada, o trabalho faz uma aplicação de algoritmo genético. [Basten et. al. 2009]



utilizam um modelo de minimização dos custos de manutenção ao longo do ciclo de vida dos ativos, trabalhando tanto com LRU's quanto SRU's, com uma estrutura de produto com mais de um nível de endentação e com a movimentação das peças entre os escalões considerada de maneira independente do reparo e do descarte. Também propõem melhorias no modelo matemático de LORA conhecido na literatura através de um modelo de programação inteira mista. Já [Brick e Uchoa 2009] propõem um modelo de programação inteira mista para localização de facilidades e instalação de recursos que também leva em conta LRU's e SRU's, bem como ações de reparo e descarte destes componentes em vários níveis de endentação.

Até o momento não foram encontrados trabalhos na literatura que abordaram LORA com decisões de localização de instalações e atribuição de demandas de bases simultaneamente ao cálculo de níveis de estoque. Este trabalho, no entanto, propõe-se a fazer isso, utilizando o método de geração de colunas, o qual é um método adequado ao modelo proposto dada a complexidade do problema. O modelo pretende realizar três tipos de decisões: (1) definir, dentre um conjunto de possíveis locais de instalação de *depots* $|J| = m$, quais devem ser instalados e, cada um dos n clientes ou bases operacionais, (2) qual *depot* deve servi-lo e (3) qual nível de estoque de sobressalentes deve ser mantido. O objetivo é minimizar o número de pedidos de peças de reposição pendentes no sistema, ou seja, o número de *backorders*, visto que [Sherbrooke 1992] demonstra que seguindo as premissas do modelo METRIC, utilizadas neste artigo, a minimização do número de pedidos pendentes no sistema é equivalente à maximização da disponibilidade dos ativos operacionais.

As vantagens deste método colaboram para o problema estudado, uma vez que a definição de alocação de estoques nas bases é acompanhada da decisão de se alocar ou não uma determinada base a um *depot*. É fácil ver que o número de variáveis que representam essas decisões se torna exponencial, dada a natureza combinatória do problema, aumentando a carga computacional para sua resolução. A ideia é então aliar a geração de colunas ao problema, produzindo variáveis que reproduzam padrões de alocação de estoques a bases, e destas bases a *depots*, de maneira a minimizar o número de pedidos de peças de reposição pendentes e maximizando assim a disponibilidade operacional dos ativos.

O trabalho será apresentado da seguinte forma: no tópico 2, apresenta-se o problema de LORA e as premissas utilizadas para a modelagem; no tópico 3 é feita uma breve descrição sobre o método de GC; no tópico 4 são apresentados o problema mestre restrito e o problema de *pricing* da formulação; no tópico 5, uma análise e discussão dos resultados relacionados e no tópico 6 são apresentadas as conclusões deste trabalho.

2. O Modelo LORA

Neste artigo serão aplicadas as premissas da teoria METRIC – *Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control* –, o qual é a base para um grande número de modelos multi-escalonados usados pelos vários serviços militares, e de aplicação também neste problema. Esta teoria, desenvolvida em [Sherbrooke 1992], calcula os níveis de estoque ótimos em cada uma das várias bases com o objetivo de encontrar o número mínimo de pedidos pendentes no sistema.

As seguintes premissas importantes deste modelo que serão aplicadas neste trabalho. As bases são supridas por seu respectivo *depot*, e não por suprimento lateral de outra base; e a política de estoque $(s - 1, s)$, que determina que o pedido de um item ocorre sempre que o nível em estoque se reduz em uma unidade, é apropriada para todo item em todo escalão. Esta última premissa deriva do fato de que para LRU's, as taxas de demanda são suficiente baixas e os custos suficientemente altos tal que o lote econômico de compra é próximo de 1. Para além deste modelo, considera-se aqui a existência de diversos locais candidatos à alocação de um ou mais *depots* para a atribuição dos reparos dos itens.



Seja N o conjunto de todas as n bases que serão atendidas pelos *depots*, e J o conjunto de todos os possíveis locais de instalação dos *depots*. O modelo de LORA aqui tratado considera apenas 1 tipo de LRU, não levando em consideração SRU's, de forma a simplificar o modelo.

Quando há uma falha em um componente do sistema – uma LRU neste caso – a base substitui o item falho por outro em funcionamento e o encaminha para análise de falhas e reparo em um dos *depots*, como mostra a seta cheia da figura 1. Em contrapartida, o *depot* devolve, após o reparo, o item para a base, como mostrado na figura pelas setas pontilhadas. Neste trabalho considera-se que os *depots* escolhidos não possuem estoques de sobressalentes, realizando apenas o reparo e devolvendo a peça para a base que solicitou o reparo. Não será considerado neste modelo a ação de descarte, ou seja, 100% dos itens são recuperáveis. Serão também considerados 2 escalões para a estrutura de manutenção – base local e *depots* (central).

A figura 1 ilustra um exemplo da estrutura de manutenção que será abordada.

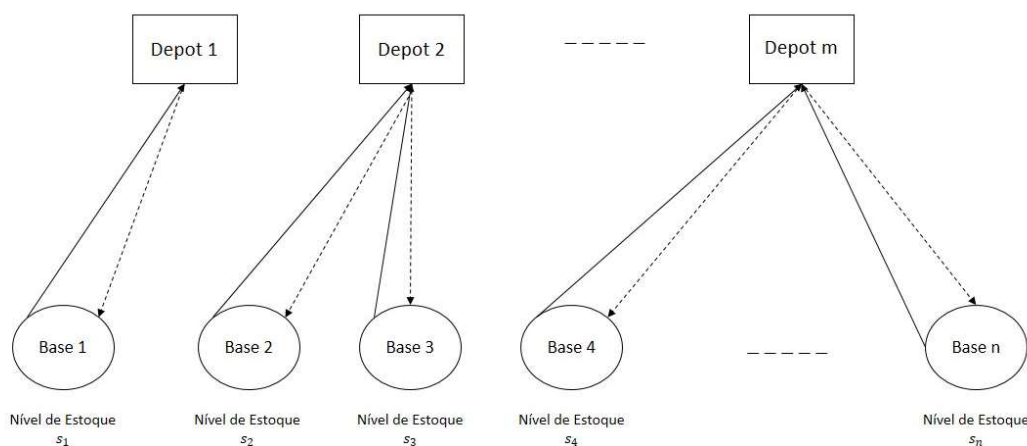


Figura 1 – Exemplo da “física” do problema de LORA. Fonte: Autores.

Para que seja atingida maior disponibilidade operacional possível dos ativos, é necessário que haja um nível de estoque s_i em cada base $i \in N$ para que, quando ocorrer uma falha, haja uma peça em funcionamento pronta para substituição. Sempre que não houver estoque em uma base, esta deverá aguardar o reparo da peça enviada. A espera aqui contabilizada inclui o tempo de expedição da peça para o *depot* e de seu retorno à base, $2LT_{ij}$, o qual é proporcional à distância entre a base i e o *depot* j ; e o tempo de reparo da LRU na base, T_j . O tempo de fila para atendimento da LRU é influenciado pela quantidade de servidores no canal e pela taxa de falhas d_i , $i = 1, \dots, n$, em cada base que o *depot* j irá atender. Para este trabalho, é considerado apenas um servidor para cada *depot*, ou seja, um mesmo conjunto de recursos pelo qual todas as LRU's devem passar para reparo.

As taxas de falha d_i das LRU's para cada base $i \in N$ obedecerão à distribuição de Poisson, seguindo o modelo METRIC. Assumindo independência, a distribuição formada pela soma de distribuições individuais de Poisson também é Poisson. Portanto, a demanda total d em cada *depot* j é a soma das médias das distribuições de Poisson das bases que forem atendidas pelo *depot* j . A capacidade de reparo de cada *depot* j , $j \in J$, é representada pela taxa de atendimento μ_j . Assume-se que os valores de d_i e μ_j são todos inteiros.

O custo total desta estrutura de manutenção é composto por duas parcelas: custos variáveis e fixos. Os custos fixos são representados pelo valor total do estoque de sobressalentes na base i , o qual é o produto do valor deste estoque v_i naquela base pelo número de unidades de



sobressalentes em estoque s_i , e por F_j , que representa o custo de abertura do *depot* j . O custo c_{ij} de atribuir cada base $i \in N$ ao *depot* j , que representa o custo de transporte para realização dos reparos, representa o custo variável desta estrutura. A soma destes custos finais deve ser limitado ao orçamento (K) para a estrutura de manutenção.

O número de pedidos pendentes no sistema, NBO, é calculado para cada base $i \in N$ atribuída a cada *depot* $j \in J$. O cálculo deste valor é influenciado pelo total de demanda d que chega ao *depot* j , sendo dado pelo somatório das taxas de demanda d_k das bases k que foram atribuídas àquele *depot*, e pelo nível de estoque s_i da base i . A demanda total das bases atribuídas deve ser limitada a valores estritamente menores do que μ_j , de maneira a conter o crescimento ilimitado da fila de reparo. Para explicar como funciona este cálculo, utiliza-se a seguinte equação de balanço de estoque:

$$s_i = OH + DI - BO \quad (1)$$

O nível de estoque s_i escolhido previamente para alocar a uma base é uma constante. Dado que a possibilidade de reparo é igual a 100%, o s_i em um intervalo de tempo especificado é dado pelas peças disponíveis em estoque (OH - on hand), o número de unidades de estoque em reparo e em trânsito (DI - due in) menos o número de *backorders* (BO), todas variáveis aleatórias não-negativas. Qualquer mudança em uma dessas variáveis é acompanhada por uma mudança simultânea em outra. Por exemplo, quando uma demanda ocorre, o número em DI aumenta em 1 unidade. Caso haja estoque em mãos, OH diminui em uma unidade; caso contrário, os *backorders* aumentam. Isso significa que haverá um pedido pendente sempre que o número de unidades de LRU's em reparo for maior que s_i . Assim, NBO pode ser expresso como uma função da probabilidade de que haja mais unidades de peças sobressalentes em fila para reparo do que o número em estoque. Portanto:

$$NBO(i, s_i, j, d) = \Pr\{DI = s_i + 1\} + 2 \Pr\{DI = s_i + 2\} \dots = \sum_{x=s_i+1}^{\infty} (x - s_i) \Pr\{DI = x\} \quad (2)$$

onde $\Pr\{DI = x\}$ é calculada através da distribuição de Poisson, dada por:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x = s + 1, s + 2 \dots \quad (3)$$

onde λ aqui é o valor esperado de DI , denotado por \overline{DI} , ou seja, é o número médio de peças da base i em trânsito ou na fila de espera para reparo no *depot* j . Este cálculo é apresentado como:

$$\overline{DI} = d_i \left(\frac{NBO_j[s_j | d, (T_j + 2LT_{ij})]}{d} \right) \quad (4)$$

Aqui, $T_j + 2LT_{ij}$ é o tempo de reparo e transporte de cada LRU que chega na instalação de reparo. Além disso, s_j é o número de unidades de peças sobressalentes de LRU's no *depot* j , que neste trabalho será considerado como zero. Sendo assim, o NBO em relação ao *depot* j é uma função do tempo de reparo das peças multiplicado pelo fluxo de peças que chegam àquela instalação.

Seguindo o modelo METRIC, o problema pede por uma solução que minimize o número total de pedidos pendentes, dado pela soma de $NBO(i, s_i, j, d)$, para $i = 1, \dots, n$.



Note que, apesar do modelo METRIC original admitir um algoritmo polinomial para obtenção de uma solução Pareto-ótima, a inclusão de decisões de localização de *depots* no problema o torna NP-difícil, devido ao custo de abertura, que só é contabilizado uma vez para cada *depot*.

3. Geração de Colunas

Geração de colunas é um método de resolução de problemas lineares utilizado quando em um problema há um número muito grande de variáveis em relação ao número de restrições, ou seja, $n \gg m$, e o passo de se estabelecer se a solução é ótima ou se há alguma variável para entrar na base é feita por outro problema de otimização, diferente do que é feito no método simplex, chamado de problema de *pricing*. O problema que se deseja resolver [PM] é o seguinte:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} c_j \lambda_j \\ \text{s. a} \quad & \sum_{j \in J} a_j \lambda_j \geq b \\ & \lambda_j \geq 0, \quad \forall j \in J \end{aligned} \quad (5)$$

Como uma busca explícita por J pode ser computacionalmente impossível se J é muito grande, a principal ideia do método é resolver um PL restrito, ou seja, um problema em que nem todas as variáveis estão presentes na base, escolhendo um subconjunto $J' \subseteq J$ dessas variáveis com uma solução inicial viável. A este problema se dá o nome de Problema Mestre Restrito [PMR].

Depois de alcançar a otimalidade com uma parte pequena dessas variáveis, a pergunta que pode ser feita é se existe alguma variável que não está atualmente no tableau do simplex tal que o custo reduzido dela na solução básica atual é negativa. Caso haja, isso significa que a solução pode ser melhorada. A solução ótima só é alcançada quando não há mais variáveis com valores de custo reduzido negativo que possam entrar na solução. O problema de se determinar a existência destes custos negativos é dado pela seguinte formulação do *pricing* [PP]:

$$c^* = \min\{c(a) - u^T(a) | a \in A\} \quad (6)$$

em que u^T é o vetor que representa a solução ótima dual para o [PMR].

A generalização da GC, então, envolve em particionar conjuntos de restrições de um PL para gerar dois tipos de problemas: o problema mestre e o problema de *pricing*. O problema mestre contém uma parte das restrições e, uma vez resolvido, fornece os valores duais para o subproblema de *pricing*, ou seja, para o cálculo dos custos reduzidos e determinação de qual variável que ainda não entrou no tableau pode melhorar a solução. O método vai interagindo até que o problema mestre e o subproblema detectam a otimalidade em uma iteração, ou seja, até que não haja mais custos reduzidos negativos na etapa de *pricing*.

Apesar de ter sido criado com a intenção de ser aplicado a PL's, é na programação inteira que a técnica tem alcançado bons resultados. Os problemas de programação inteira são relaxados no problema mestre e fornecem os limites inferiores para a PI. A grande vantagem deste método em problemas inteiros é que estes limites fornecidos pela relaxação linear são muito ajustados, dificilmente superando uma unidade do valor encontrado pela solução inteira.



4. Método de Resolução Proposto

4.1 Formulação do Problema Mestre Restrito

Para a aplicação da geração de colunas, a modelagem utilizada é apresentada a seguir. As variáveis são definidas para cada subconjunto $q \in Q$, em que Q é o conjunto de todos os possíveis padrões de alocação de estoques nas bases atribuídas a um mesmo *depot*. Precisamente, $q = (s_1^q, \dots, s_n^q)$, onde $s_i^q \geq 0$ indica que o padrão atribui a base i ao *depot* com estoque de sobressalentes s_i^q , e $s_i^q = -1$ indica que a base i não foi atribuída ao *depot*. A variável binária λ_{jq} assume então o valor 1 quando o padrão $q \in Q$ é aplicado ao *depot* j , e 0 caso contrário.

Pode-se calcular NBO_{jq} – o número de pedidos pendentes de um padrão de alocação q de bases ao *depot* j – como $NBO_{jq} = \sum_{i \in N | s_i^q \geq 0} NBO(i, s_i^q, j, d(q))$, onde $d(q) = \sum_{i \in N | s_i^q \geq 0} d_i$. Assim, NBO_{jq} será o somatório de cada NBO que ocorre em cada base i em relação ao *depot* j , o qual é influenciado pela demanda total d alocada a essa instalação de reparo e pelo nível de estoque previamente alocado à base i , caso ela seja escolhida para ser alocada ao *depot* j .

A formulação do problema mestre restrito para o problema de LORA fica da seguinte forma:

$$[\text{LORALNE}] - \text{Minimizar} \sum_{j \in J} \sum_{q \in Q} NBO_{jq} \lambda_{jq} \quad (7)$$

s. a

$$\sum_{j \in J} \sum_{\substack{q \in Q \\ s_i^q > 0}} \lambda_{jq} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (8)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{q \in Q} (C_{jq} + V_q + F_j) \lambda_{jq} \leq K \quad (9)$$

$$\lambda_{jq} \geq 0, \quad \forall j \in J; \forall q \in Q. \quad (10)$$

Em [LORALNE], a função objetivo (7) minimiza o número de *backorders* total associado ao padrão de atribuição das bases i aos *depots* j ; a restrição (8) garante que toda base estará alocada a apenas um *depot*; a restrição (9) considera a limitação de orçamento para custo da estrutura de manutenção, onde $C_{jq} = \sum_{i \in I | s_i^q \geq 0} c_{ij}$ e $V_q = \sum_{i \in I} v_i s_i^q$, e (10) garante as condições de não-negatividade das variáveis e considera o problema em sua relaxação.

4.2 Formulação do Problema de Pricing

O subproblema de *pricing* [PrLORALNE $_{jd}$] associado ao problema mestre [LORALNE] será otimizado para cada $j = 1, \dots, m$ e cada $d = 1, \dots, \mu_j - 1$ durante a execução do algoritmo de geração de colunas, até que nenhum variável λ_{jq} de custo reduzido negativo seja encontrada. Seja a variável $y_i = 1$ se a base i é servida pelo *depot* j e 0, caso contrário. O subproblema é apresentado a seguir.

$$[\text{PrLORALNE}_{jd}] \text{ Minimizar} \sum_{i \in I} (NBO(i, s_i, j, d) - \pi_i - \gamma(c_{ij} + v_i s_i)) y_i - F_j \gamma \quad (11)$$



$$s.a \sum_{i \in I} d_i y_i = d \quad (12)$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N. \quad (13)$$

A função objetivo (11) deste problema minimiza o custo reduzido da variável λ_{jq} gerada, calculado a partir dos valores duais do problema mestre. Nesta função, cada valor de s_i é previamente escolhido (dentre todos os possíveis) de modo a minimizar o coeficiente $(NBO(i, s_i, j, d) - \pi_i - \gamma(c_{ij} + v_i s_i))$ da variável y_i . Cada π_i , $i \in N$, representa o valor dual associado a uma restrição do tipo (8) e γ representa o valor dual que assume a restrição (9). Estes valores são atualizados a cada nova resolução do problema mestre. A restrição (12) garante que o parâmetro d utilizado no cálculo do número de pedidos pendentes seja efetivamente igual à soma das demandas atendidas pelo *depot* j . Cada combinação válida de bases que obedecem a este somatório será candidata a gerar uma nova coluna ao problema. Por fim, (13) garante a integralidade das variáveis y_i .

Lembre que $NBO(i, s_i, j, d)$ é previamente calculado para todo valor de d , segundo a equação (2). Portanto ele passa a ser uma constante no momento da resolução do subproblema.

4.3 Algoritmo

O algoritmo consiste em duas fases. A primeira aplica um método de geração de colunas clássico para resolver a relaxação dada pela formulação [LORALNE], iniciando com variáveis artificiais para satisfazer às restrições (7) e sem nenhuma variável λ_{jq} e resolvendo os subproblemas [PrLORALNE $_{jd}$] para cada $j = 1, \dots, m$ e cada $d = 1, \dots, \mu_j - 1$, a cada iteração. Na segunda fase, as variáveis λ_{jq} são redefinidas como inteiras e o problema de programação inteira resultante é resolvido de forma exata gerando uma solução viável para o problema.

5. Experimentos Computacionais

Para avaliação do método proposto, foram utilizadas 20 instâncias correspondentes ao problema p -mediana capacitado (CPMC), retiradas da OR-Library e disponíveis em <http://people.brunel.ac.uk/~mastjb/jeb/orlib/pmedcapinfo.html>. A utilização dessas instâncias foi feita baseada na semelhança com a modelagem do problema [LORALNE]. A adaptação dessas instâncias foi feita buscando balancear o custo das soluções em relação ao orçamento, evitando soluções extremas de alocação de estoques e de abertura de instalações. Dessa forma, o custo fixo de abertura de cada *depot* j foi baseado na seguinte transformação:

$$F_j = \left\lceil \frac{BS}{p} \right\rceil, \forall j = 1, \dots, m.$$

Aqui, BS – *Best Solution*, é o valor da melhor solução encontrada na instância original. Desta forma, teríamos um custo total BS caso exatamente p instalações fossem localizadas. Para o custo orçado do problema, a fórmula utilizada foi $K = 3BS$. Os valores considerados para cada peça mantida em estoque em cada base são consideradas fixas para cada $i = 1, \dots, n$ e são calculadas usando a seguinte fórmula:

$$v_i = \left\lceil \frac{BS}{4p} \right\rceil, \forall i = 1, \dots, n.$$



Já os tempos de reparo das peças no *depot* T_j são considerados fixos para todo $j = 1, \dots, m$, igual a 0,02, e o preço de transporte por quilômetro igual a 1. As taxas de falha em cada base consideradas no problema são as demandas das instâncias no problema CPMC.

A implementação do código foi feita em VBA em uma estação de trabalho com processador Intel CORE i7 e 16GB RAM . O quadro 1 apresenta os resultados do modelo para a distribuição dos custos encontrados nos resultados das instâncias.

Tabela 1 – Distribuição dos custos de abertura, estoque e transporte dados pelo modelo

Instância	n	m	p	(BS)	Budget	Custo de Abertura	Custo de Abertura (%)	Custo Estoque (%)	Custo de Transporte (%)
1	50	50	5	713	2139	142	33,2	31,1	35,7
2	50	50	5	740	2220	148	33,3	31,7	35,0
3	50	50	5	751	2253	150	33,3	31,2	35,5
4	50	50	5	651	1953	130	33,3	31,1	35,6
5	50	50	5	664	1992	132	33,1	31,5	35,4
6	50	50	5	778	2334	155	33,2	30,9	35,9
7	50	50	5	787	2361	157	33,2	31,4	35,4
8	50	50	5	820	2460	164	40	31,7	28,3
9	50	50	5	715	2145	143	33,3	31,0	35,7
10	50	50	5	829	2487	165	39,8	29,7	30,5
11	100	100	10	1006	3018	100	36,4	31,5	32,1
12	100	100	10	966	2898	96	33,1	32,3	34,6
13	100	100	10	1026	3078	102	33,1	31,7	35,2
14	100	100	10	982	2946	98	36,6	31,8	31,6
15	100	100	10	1091	3273	109	36,6	31,3	32,0
16	100	100	10	954	2862	95	33,2	32,1	34,7
17	100	100	10	1034	3102	103	33,2	32,2	34,6
18	100	100	10	1043	3129	104	36,6	31,6	31,9
19	100	100	10	1031	3093	103	36,6	31,5	31,8
20	100	100	10	1005	3015	100	39,8	30,7	29,5

Nesta tabela, para cada instância (1 a 20) são apresentados o número de bases utilizadas, o número de possíveis localizações para os *depots*, o valor da melhor solução encontrada pela instância e p, estes dois últimos utilizados como fatores de conversão do custos utilizados. A coluna “Custo de Abertura” apresenta o valor fixo para toda possível localização $j \in J$ de cada *depot*. Pode-se observar que os custos apresentados nos resultados da instância dados pelo modelo apresentam uma boa distribuição da utilização do orçamento que é apresentado na coluna “Budget”.

Já os resultados relativos aos tempos de cálculo para cada uma das instâncias é apresentado na tabela 2 a seguir:

Tabela 2- Resultados de desempenho do modelo

Instância	UB	LB	Desvio Abs	Nº Iterações	Nº Subprob. Resolvidos	Tempo de Cálculo (seg.)	Número Colunas	Disponibilidade
1	5,229	4,992	0,237	300	35700	720	2502	95,01
2	5,370	5,254	0,116	550	65450	2158	3412	94,75
3	5,726	5,498	0,227	350	41650	782	2560	94,50
4	5,784	5,564	0,220	400	47600	2732	3824	94,44



5	6,201	5,988	0,213	300	35700	1242	2932	94,01
6	6,517	6,280	0,237	350	41650	857	2648	93,72
7	6,733	6,498	0,235	400	47200	1536	2454	93,50
8	6,736	6,378	0,358	350	41650	1345	2627	93,62
9	6,372	6,083	0,289	350	41300	1385	2762	93,92
10	7,402	6,879	0,522	400	47200	925	2314	93,12
11	10,747	10,470	0,277	1000	119000	8375	5797	89,53
12	10,624	10,340	0,284	1000	119000	7943	5806	89,66
13	11,295	10,989	0,305	1100	130900	10009	6860	89,01
14	11,350	11,113	0,237	800	95200	5187	5977	88,89
15	11,336	11,005	0,330	900	107100	9440	5691	88,99
16	10,988	10,866	0,122	600	71400	3195	5444	89,13
17	11,418	11,193	0,225	700	83300	4678	5148	88,81
18	11,626	11,311	0,315	1100	130900	9406	6330	88,69
19	12,047	11,872	0,175	700	83300	4324	5191	88,13
20	12,798	12,152	0,646	700	83300	3838	4807	87,85

As colunas “UB” e “LB” representam os limites superiores e inferiores encontrados para o NBO em cada instância, respectivamente. O maior desvio absoluto que pode ser encontrado na coluna “Desvio Abs” é de 0,646 o que pode ser considerado um valor adequado uma vez que o número de pedidos pendentes é um valor que pode ser arredondado para o próximo inteiro. Além disso, essa variação se encontra dentro do limite de desempenho encontrado nos modelos que utilizam a GC em geral.

Os tempos de cálculo observados e os gaps entre as instâncias menores e maiores não excedem 4 vezes o valor do maior tempo de duração de uma instância com $n=50$, o que mostra um desempenho adequado ao esperado, uma vez que as instâncias maiores realizam 4 vezes o tamanho de uma iteração de cada instância menor. Esses tempos também variam em função do número de colunas encontrado em cada instância. Neste ponto do modelo vale ressaltar o potencial de melhoria em relação a aceleração da convergência e da geração das colunas. Neste trabalho, a aplicação da geração de colunas foi feita de forma direta, o que pode resultar em uma reduzida convergência para o modelo, conforme afirma [Lorena e Senne 2004]. Em seu trabalho, aplicam para o modelo de p -medianas capacitado uma relaxação Lagrangeana que é obtida diretamente do problema mestre dual para fornecer novos limites e colunas produtivas através de um subproblema da mochila modificado. Seus resultados mostram a aceleração global do processo de geração de colunas mesmo com múltiplos *pricing* observados. Técnicas para a aceleração do processo e estabilização das colunas podem ser aplicados aqui para a melhoria dos tempos do modelo.

Para verificar o comportamento de variação do número de pedidos pendentes em relação ao orçamento e sua adequabilidade ao modelo apresentado, foram realizados testes variando o valor de K em 7 faixas para uma instância exemplo. Os resultados são apresentados nas tabelas 3 e 4 e na figura 1.

Tabela 3 - Variações na distribuição dos custos do modelo em função do orçamento

Instância 1	n	m	p	(BS)	Budget	Custo de Abertur a	Custo de Abertur a (%)	Custo Estoque (%)	Custo de Transporte (%)
2,5BS	50	50	5	713	1782	142	39,8	17,7	42,5
3BS	50	50	5	713	2139	142	33,2	31,1	35,7
3,5BS	50	50	5	713	2495	142	34,1	40,7	25,2
4BS	50	50	5	713	2852	142	24,9	49,1	26,0



4,5BS	50	50	5	713	3208	142	22,1	54,6	23,3
5BS	50	50	5	713	3565	142	23,9	58,9	17,2
5,5BS	50	50	5	713	3921	142	21,7	62,5	15,8

As faixas de variação para o orçamento começam no limite inferior de viabilidade das soluções, ou seja, com 2,5 vezes o valor da melhor solução e vão até 5,5 vezes o valor de BS. Abaixo de 2,5BS a solução torna-se inviável. Com o aumento do orçamento para o modelo observa-se uma mudança na proporção dos custos empregados na direção do custo do estoque utilizado. Tal padrão de acumulação de estoques é o principal responsável pela redução do NBO no sistema.

Tabela 4 – Desempenho da instância e variação do número de pedidos pendentes no sistema em função do orçamento

Instância 1	UB	LB	Desvio Abs.	Nº Iterações	Nº Subprob. Resolvidos	Tempo de Cálculo	Número Colunas	Disponibilidade
2,5BS	8,130	7,683	0,447	350	41650	885	2636	91,87
3BS	5,229	4,992	0,237	300	35700	720	2502	94,77
3,5BS	3,250	3,099	0,151	350	41650	800	2647	96,75
4BS	1,965	1,887	0,078	500	59500	1759	3119	98,04
4,5BS	1,281	1,204	0,077	300	35700	831	2795	98,72
5BS	0,744	0,724	0,020	350	41650	836	2678	99,26
5,5BS	0,417	0,401	0,016	350	41650	1031	3104	99,58

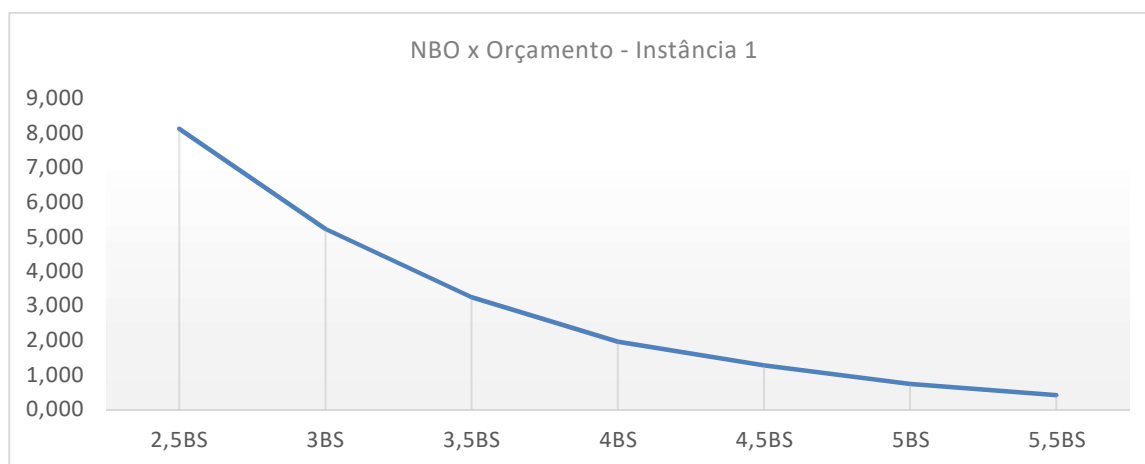


Figura 1. Padrão de variação do NBO em função do orçamento (K) para a estrutura de manutenção. Instância 1.

Observa-se o padrão de convexidade da curva no gráfico à medida em que aumentamos o limite de custo gasto pela estrutura de manutenção. O efeito da disponibilidade é justamente o contrário. À medida em que diminuem os pedidos pendentes no sistema, aumenta-se a disponibilidade global dos ativos. Este padrão obedece ao proposto no modelo METRIC em [Sherbrooke 1992] e é obtido mesmo com a modelagem do problema sendo linear, o que garante a vantagem desta modelagem.



6. Conclusão

Este trabalho realizou a modelagem de um problema de LORA utilizando as premissas do modelo METRIC para alocação de estoques em bases e destas a possíveis instalações. O diferencial deste trabalho é também a possibilidade de alocação destes *depots* de maneira a reduzir o NBO global do sistema limitado a um orçamento de custo da estrutura de manutenção. Para conseguir gerenciar a complexidade do problema e o número de variáveis que se originam de sua natureza combinatória, o método de geração de colunas foi empregado e seus resultados foram analisados. A convexidade apresentada pela variação do número de *backorders* em função do orçamento foi captada pelo modelo, mesmo este sendo linear, o que demonstra a adequação do método proposto.

O gap entre os limites superior e inferior do modelo seguem o que é apresentado na literatura, ou seja, não excedem a uma unidade. Observa-se redução neste gap à medida que o limite do orçamento proposto é aumentado.

Sugere-se para trabalhos futuros o ajuste do modelo através da utilização de técnicas de aceleração do processo de geração de colunas, o que deve garantir a redução do tempo de processamento das instâncias, proporcionando a capacidade de trabalhar com valores maiores para o número de bases e *depots*. Outras melhorias a serem feitas no modelo incluem o aumento na sua complexidade de maneira a trabalhar demais aspectos realistas do problema, como a inserção de mais modos de falha, canais servidores, tipos de LRU e estrutura do produto com mais de um nível de endentação. Tais melhorias podem ser alcançadas através das melhorias nos tempos de geração das colunas primeiramente, de colunas mais produtivas de tal maneira que mais aspectos possam ser trabalhados no problema.

7. Referências Bibliográficas

ALFREDSSON, P. Optimization of multi-echelon repairable item inventory systems with simultaneous location of repair facilities. *European Journal of Operational Research*, Eleventh EURO Summer Institute: Operational Research Models in Maintenance. v. 99, n. 3, p. 584–595, 16 jun. 1997.

BARROS, L.; RILEY, M. A combinatorial approach to level of repair analysis. *European Journal of Operational Research*, A Global View of Industrial Logistics. v. 129, n. 2, p. 242–251, 1 mar. 2001.

BRICK, E. S.; UCHOA, E. A facility location and installation of resources model for level of repair analysis. *European Journal of Operational Research*, v. 192, n. 2, p. 479–486, 16 jan. 2009.

LORENA, L. A. N.; SENNE, E. L. F. A column generation approach to capacitated p-median problems. *Computers & Operations Research*, v. 31, n. 6, p. 863–876, maio 2004.

SARANGA, H.; KUMAR, U. D. “Optimization of aircraft maintenance/support infrastructure using genetic algorithms—level of repair analysis”. *Annals of Operations Research*, v. 143, n. 1, p. 91, 1 mar. 2006.

SHERBROOKE, C. C. *Optimal inventory modeling of systems: multi-echelon techniques*. New York: Wiley, 1992.