



Um modelo biobjetivo para o problema da topologia e do dimensionamento de redes de ar comprimido

Roberto Capparelli Marçal

UniEvangélica - Centro Universitário de Anápolis
Avenida Universitária, Km 3,5
Cidade Universitária, 75083-515, Anápolis, Goiás.
roctb_25@hotmail.com

Marco Antonio Figueiredo Menezes

Escola de Ciências Exatas e de Computação
Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Setor Universitário, área III, 74605-010, Goiânia, Goiás
marco@pucgoias.edu.br

Welton Cardoso do Carmo

Humberto José Longo

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás
Campus Samambaia, 74690-900, Goiânia, Goiás
{weltondocarmo, longo}@inf.ufg.br

RESUMO

Neste trabalho é apresentado um modelo de otimização biobjetivo, baseado em programação não linear, o qual trata de forma conjunta os problemas de identificação da topologia e do dimensionamento ótimos de redes de distribuição de ar comprimido. Além disso, é descrito um algoritmo enumerativo, com podas baseadas nas restrições do modelo proposto, o qual mostrou-se bastante promissor em todos os testes realizados.

PALAVRAS CHAVE. Redes de ar comprimido, Otimização biobjetivo, Simulação.

IND – PO na Indústria, PM – Programação Matemática, OA – Outras aplicações em PO.

ABSTRACT

We present in this work a biobjective optimization model, based on nonlinear programming, which handles the problems of identification of the best topology and of the optimum dimensioning of compressed air distribution networks. In addition, we describe an enumerative algorithm, with pruning based on the constraints of the proposed model, which has shown to be very promising in all tests performed.

KEYWORDS. Compressed-air networks, Biobjective optimization, Simulation.

IND – OR in Industry, PM – Mathematical Programming, OA – Other applications in OR.



1. Introdução

O ar comprimido é o ar atmosférico, uma mistura gasosa homogênea, pressurizado pelo processo de compressão adiabática, condutor de energia térmica e fluxo de energia, podendo ser armazenado e transportado. Assim como outras formas de energia, a energia do ar comprimido para ser utilizada passa pelo processo de geração, de regulação, tratamento, armazenamento e distribuição até o seu ponto de consumo.

O ar comprimido tem vantagens em comparação a outras formas de energia que o torna mais útil em certas aplicações. Como exemplo de vantagens desta forma de energia podemos citar que: o ar atmosférico está disponível em abundância e em todos os lugares; o ar comprimido como fluido de trabalho não precisa ser trocado ou substituído, o que reduz custos e otimiza tempo de trabalho; no caso de possíveis vazamentos, o ar comprimido não vai causar problemas ambientais; o ar comprimido pode ser transportado por longas distâncias por tubos; o ar comprimido pode ser armazenado em reservatórios. Todavia, a desvantagem da utilidade do ar comprimido como fonte de energia é a sua baixa eficiência energética, o que gera maior custo para a sua obtenção (veja D'Antonio et al. (2005)).

Para a obtenção e utilização da energia de ar comprimido é necessário um conjunto de equipamentos e acessórios com finalidades específicas, os quais são interligados para controlar ou implementar alguma característica desejada ao ar comprimido. Este conjunto recebe o nome de sistema de ar comprimido. Um típico sistema de ar comprimido é composto basicamente por compressores de ar (geração); válvulas e controladores; filtros, secadores e resfriadores (tratamento); reservatórios (armazenagem); redes de tubulação (distribuição). Cada um destes componentes, individualmente, contribui para a ineficiência total do sistema. Contudo, há a possibilidade de se trabalhar a redução dessa ineficiência em cada um destes componentes. De fato, excetuando-se as redes de tubulação, os demais componentes têm seus fabricantes específicos que desenvolvem individualmente os produtos buscando o aprimoramento tecnológico e a eficiência energética.

A ineficiência observada no sistema de distribuição é basicamente causada pelos vazamentos e pelas perdas de carga totais, ou seja, a perda de energia ocasionada pelo atrito do ar comprimido com as paredes internas do tubo. No seu cálculo são considerados as perdas de carga que ocorrem nos comprimentos lineares dos tubos mais as perdas de carga dos acessórios. Devido a estes últimos, é utilizado o conceito de comprimento equivalente, que é o comprimento linear de tubo do correspondente diâmetro que apresenta as mesmas perda de carga.

Sistemas de distribuição mal projetados, ou seja, com tubos de dimensões inadequadas, excesso de curvas, reduções e derivações, contribuem para a sua ineficiência energética. Além disso, em instalações industriais as pressões de trabalho, normalmente, estão situadas na faixa entre 6 a 10 *bar*. E cada 1 *bar* de redução na pressão de trabalho impacta em uma economia energética da ordem de 8% da energia total consumida pelo sistema. Por tais motivos, é importante buscar a otimização do sistema de distribuição (veja Dindorf (2012)).

Os problemas da determinação da topologia e do dimensionamento de redes de distribuição de ar comprimido consistem em, respectivamente, definir o melhor arranjo da rede de tubos e escolher os melhores diâmetros dos tubos, de forma a minimizar a perda de carga e, conseqüentemente, proporcionar à rede eficiência energética. Pode-se afirmar que um dos primeiros trabalhos de projeto de redes foi realizado por Rothfarb et al. (1970), tratando da otimização de um sistema de tubulações de coleta de gás natural de um conjunto de poços *offshore*. Em Bhaskaran e Salzborn (1979), os autores abordam um problema similar de otimização de uma rede de tubulações de coleta de gás natural em uma série de poços situados no deserto da Austrália. Bureerat e Sriwornamas (2013) e Saleh e Tanyimboh (2013) tratam os problemas da topologia e do dimensionamento de tubulações em redes de transporte de água. André et al. (2013) propõem um modelo que simultaneamente determina a topologia e o dimensionamento de redes de transporte de hidrogênio através de otimização monocritério. Sobre sistemas de ar comprimido, Krichel e Sawodny (2011) e Dosa (2006) tratam apenas o problema da topologia da rede. Carello et al. (1998) comparam a análise



experimental e a teórica da queda de pressão em redes de ar comprimido. Contudo, Walski (2001) mostra que a otimização baseada apenas em minimização de custos tem sérias limitações quando se considera a confiança na rede. Nessa linha, Prasad e Park (2004) desenvolvem um modelo que minimiza o custo e maximiza resiliência em sistema de distribuição de água.

Neste trabalho apresentamos um modelo de programação não linear biobjetivo, o qual também trata de forma conjunta os problemas de identificação da topologia e do dimensionamento de redes de ar comprimido. Para o nosso conhecimento, esse modelo é novo. A partir daqui referenciamos como ANDDP (*Compressed Air Network Topological Design and Dimensioning Problem*) o problema de se encontrar a solução simultânea dos dois problemas. Soluções eficientes para o ANDDP são úteis no auxílio à tomada de decisões relativas a projetos de construção de novas redes de distribuição de ar comprimido ou de reestruturação de redes já existentes. Neste trabalho enunciamos também um algoritmo exato para a resolução do modelo proposto, o qual determina todas as soluções Pareto-ótimas? O estudo de programação linear multiobjetivo pode ser encontrado em Clímaco et al. (2003), enquanto o estudo de programação não linear multiobjetivo pode ser encontrado em Mettinen (1999).

Este trabalho está dividido da seguinte forma. Na Seção 2 é definido um modelo biobjetivo para o problema e discutido um exemplo prático, porém simples, para um melhor entendimento do modelo matemático proposto. Na Seção 3 é descrito um algoritmo enumerativo, com podas baseadas nas restrições do modelo proposto, para encontrar o conjunto de soluções de Pareto para o modelo proposto. Na Seção 4 é mostrado um exemplo que ilustra o algoritmo proposto. Na última Seção são apresentadas nossas considerações finais.

2. O problema da topologia e do dimensionamento

Inicialmente, serão apresentadas algumas notações que serão utilizadas no desenvolvimento de um modelo de otimização não linear restrito misto biobjetivo, para o ANDDP. O modelo visa minimizar o custo de implantação da rede de tubos e maximizar a eficiência energética da rede.

1. Dados:

$N = \{0, 1, \dots, n\}$ – conjunto de pontos de oferta e demanda de ar comprimido. Será considerado que existe apenas um ponto de oferta ($\{0\}$) e $n \geq 1$ pontos de demanda ($\{1, \dots, n\}$) de ar comprimido;

A – conjunto de possíveis ligações entre dois pontos distintos de oferta/demanda;

Q_i – demanda de ar comprimido, em metros cúbicos por hora (m^3/h), no ponto de demanda $i = 1, \dots, n$, tal que $Q_i > 0$;

S – oferta (vazão) total de ar comprimido na rede, em metros cúbicos por hora (m^3/h), no ponto de oferta, tal que $S > 0$;

L_{ij} – distância, em metros (m), entre o ponto i de oferta ou demanda e o ponto j de demanda;

D – conjunto dos possíveis diâmetros de tubos, em milímetros (mm), que podem ser utilizados na rede de distribuição;

P_i^{\min} – valor mínimo da pressão, em *bar*, requerida no ponto de demanda i (ver definição de p_i a seguir);

P^{\max} – valor máximo da pressão na rede, em *bar*;

K' – constante de fator de atrito, adimensional.

2. Variáveis:

d_{ij} – diâmetro do tubo, em milímetros (mm), que liga o ponto i de oferta/demanda ao ponto j de demanda;



q_{ij} – vazão (fluxo) de ar comprimido, em metros cúbicos por hora (m^3/h), no tubo que liga os pontos i e j ;

p_i – pressão do ar comprimido, em *bar*, no ponto i de demanda.

Minimizar o custo da rede consiste em minimizar o custo de transporte do fluido nos tubos, cuja função objetivo pode ser linear ou quadrática e depende do comprimento da tubulação entre as máquinas e do diâmetro dos tubos; conforme discutido e apresentado em André et al. (2013) e, também, apresentado em Bureerat e Sriworamas (2013), dentre outros. Assim, neste trabalho, assumiremos a função custo da rede como uma função linear e introduziremos um custo por unidade de comprimento para cada tubo, denotado por C_{ij} , o qual depende do diâmetro do tubo utilizado.

Walski (2001) discute a minimização de custos versus a maximização de benefícios da rede. No ANDDP minimizar custos sugere diminuição dos diâmetros dos tubos, o que implica em aumento de perda de carga e, por outro lado, minimizar perda de carga sugere aumento de diâmetros, o que implica em aumento de custos. Assim, desenvolvemos um modelo de otimização multiobjetivo que minimiza o custo total da rede de tubos e também minimiza a perda de carga via a adequada definição dos diâmetros dos tubos. Isto naturalmente caracteriza a teoria de otimização multiobjetivo, porque atende a objetivos conflitantes. O modelo proposto é baseado na abordagem de André et al. (2013), quem propõem um modelo que usa simultaneamente a determinação da topologia e do dimensionamento da rede através de otimização monocritério para o problema da topologia e do dimensionamento de redes de transporte de hidrogênio.

As perdas de carga podem ser calculadas a partir de várias equações presentes na literatura, as quais diferem na precisão do resultado obtido. Neste trabalho, utilizamos a mesma equação usada por Wolf e Smeers (1996), a qual, dada a pressão p_i no início de um segmento de tubo e a pressão p_j no final do mesmo, relaciona a vazão q_{ij} no segmento com a queda de pressão:

$$q_{ij} = K(d_{ij}) \cdot \sqrt{p_i^2 - p_j^2}. \quad (1)$$

As perdas de carga dependem das propriedades físicas do fluido (densidade, viscosidade) e da geometria do tubo (diâmetro, comprimento e rugosidade). Esses fatores são considerados no coeficiente $K(d_{ij})$, o qual pode ser calculado da seguinte forma:

$$K(d_{ij}) = 0,0129 \cdot \sqrt{\frac{d_{ij}^5}{\lambda \cdot Z_m \cdot T_m \cdot L_{ij} \cdot \rho}}, \quad (2)$$

em que

λ – coeficiente de atrito (adimensional);

Z_m – fator de compressibilidade do fluido (adimensional);

T_m – temperatura do gás, em Kelvin; e

ρ – densidade relativa do gás em relação ao ar.

Tomando-se

$$\pi_i - \pi_j = p_i^2 - p_j^2, \quad (3)$$

$$K' = \frac{\lambda \cdot Z_m \cdot T_m \cdot \rho}{(0,0129)^2} \quad (4)$$

e substituindo-se (3) e (4) em (1), obtém-se a equação clássica de perda de carga de Darcy-Weisbach (White, 2011):

$$\pi_i - \pi_j = K' \cdot L_{ij} \cdot \frac{q_{ij}^2}{d_{ij}^5}. \quad (5)$$



O objetivo do modelo descrito a seguir é encontrar um subconjunto A' de arcos de A e valores para as variáveis p_i e q_{ij} e identificar os diâmetros d_{ij} dos tubos, para todo arco $(i, j) \in A'$, tal que o custo total da rede de tubos e a perda de carga na rede sejam mínimos, satisfazendo certas restrições. Dessa forma, o modelo matemático proposto para o ANDDP é:

$$(M) \text{ Minimizar } \ell(A') = \sum_{(i,j) \in A'} C_{ij} \cdot L_{ij} \cdot d_{ij} \quad (6)$$

$$\text{Minimizar } \pi(A') = \sum_{(i,j) \in A'} (\pi_i - \pi_j), \quad (7)$$

sujeito a :

$$\sum_{j|(0,j) \in A'} q_{0j} = S, \quad (8)$$

$$\sum_{j|(i,j) \in A'} q_{ij} + Q_i = \sum_{k|(k,i) \in A'} q_{ki}, \quad i \in (N - \{0\}), \quad (9)$$

$$\pi_i - \pi_j = K' \cdot L_{ij} \cdot \frac{q_{ij}^2}{d_{ij}^5}, \quad (i, j) \in A', \quad (10)$$

$$P_i^{\min} \leq p_i \leq P^{\max}, \quad i \in N, \quad (11)$$

$$d_{ij} \in D, \quad (i, j) \in A', \quad (12)$$

$$q_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in A'. \quad (13)$$

A expressão (6) refere-se à minimização do custo total de implantação da rede de tubos. A expressão (7) refere-se à minimização da perda de carga. Aqui, devido à direção do fluxo, cada arco (i, j) acrescido ao subconjunto A' é tal que o valor $\pi_i - \pi_j$ será sempre não negativo. As restrições (8) e (9) são referentes à conservação de fluxo (vazão) em cada nó. Observe-se que (8) supõe a existência de um único compressor (ponto de oferta). As restrições (10) referem-se às perdas de carga. As desigualdades (11) relacionam as pressões mínimas requeridas em cada nó e a pressão máxima a ser suportada na rede. A pressão p_i no ponto de demanda i , $i = 1, \dots, n$, pode ser obtida tomando-se a raiz quadrada da correspondente variável π_i . A restrição discreta (12), restringe as variáveis d_{ij} aos diâmetros de tubos disponíveis. E, (13) são as restrições de não negatividade para as vazões.

3. Algoritmo proposto

Seja $G = (N, A)$ um grafo direcionado ponderado, onde $N = \{0, 1, \dots, n\}$ representa os pontos de oferta/demanda de uma rede de distribuição de ar comprimido e A é o conjunto de possíveis ligações entre esses pontos. O nó 0 representa o compressor de ar comprimido e os nós $1, \dots, n$ representam as máquinas consumidoras. O nó que representa o ponto de máxima pressão requerida P^{\max} é denotado por v^{\max} . Um subgrafo conexo $T = (N, A')$ de G , com $|A'| = n$, representa uma rede de distribuição de ar comprimido. Neste trabalho supomos T uma árvore enraizada com raiz no nó 0; a qual será referenciada simplesmente como árvore.

O algoritmo proposto tem o objetivo de encontrar uma ou mais soluções (árvores) para o modelo (M), as quais minimizem os valores das funções objetivo (6) e (7) e satisfaçam as restrições (8)–(13). O princípio básico do algoritmo é encontrar certas sequências de nós, construir todas as árvores possíveis a partir de cada uma dessas sequências e associar valores de diâmetros aos arcos de cada árvore. A seguir são definidas tais sequências de nós e outros elementos necessários para o detalhamento do algoritmo proposto.

Uma sequência de nós $\langle v_1, v_2, \dots, v_s \rangle$ tal que o arco $(v_i, v_{i+1}) \in A$, para $1 \leq i < s \leq n$, é um caminho $C(v_1, v_s)$ em G . Todo caminho $C(0, v^{\max})$ é dito ser um tronco de G . Os nós de um tronco t compõem o subconjunto $N_t \subseteq N$ e os arcos de t compõem o subconjunto $A_t \subseteq A$.



Os troncos podem ser agrupados em c classes distintas \mathcal{T}_i , $i = 1, \dots, c$; segundo os nós que os compõem. Assim, dois troncos t_1 e t_2 pertencem à mesma classe se $N_{t_1} = N_{t_2}$. Note-se que os caminhos $C(0, v^{\max})$ que definem t_1 e t_2 são distintos, ou seja, troncos de uma mesma classe diferem apenas na permutação dos nós internos dos caminhos $C(0, v^{\max})$.

Uma rede de distribuição de ar comprimido (árvore T) possui um único tronco, o qual está contido em G . Contudo, nem todo tronco em G chega a compor uma solução, pois as árvores geradas a partir de um tal tronco não satisfazem as restrições (8)–(13). Dadas duas soluções S_1 e S_2 para o modelo (M), das quais extraem-se as árvores $T_1 = (N, A'_1)$ e $T_2 = (N, A'_2)$, respectivamente, diz-se que a solução S_1 domina a solução S_2 , ou simplesmente T_1 domina T_2 , se $\ell(A'_1) \leq \ell(A'_2)$ e $\pi(A'_1) \leq \pi(A'_2)$.

Seja $\mathcal{P} = \{T_1 = (N, A'_1), T_2 = (N, A'_2), \dots, T_k = (N, A'_k)\}$ o conjunto com todas as árvores não dominadas. Dada uma nova árvore $T = (N, A')$, duas situações podem ocorrer: se existe alguma árvore $T_i \in \mathcal{P}$ tal que $\ell(A'_i) \leq \ell(A')$ e $\pi(A'_i) \leq \pi(A')$, então T é dominada por T_i e não deve fazer parte do conjunto \mathcal{P} ; caso contrário, $\mathcal{P} = (\mathcal{P} - \{T_i \in \mathcal{P} \mid \ell(A'_i) \geq \ell(A') \text{ e } \pi(A'_i) \geq \pi(A')\}) \cup \{T\}$. Suponha um plano cartesiano, onde os valores de $\ell(A')$ compõem o eixo das abscissas e os de $\pi(A')$ o eixo das ordenadas. As soluções pertencentes a \mathcal{P} definem um diagrama de Pareto no plano.

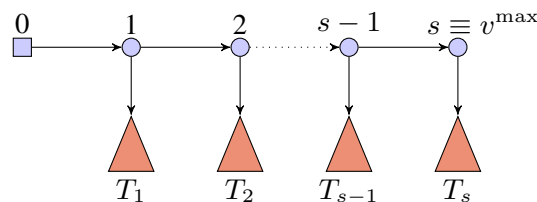


Figura 1: Tronco $C(0, v^{\max})$, com suas subárvores.

Uma árvore T , construída a partir de um tronco t , pode ser decomposta no próprio tronco e em $q = |N_t|$ subárvores, de forma que cada subárvore contenha exatamente um vértice do tronco (vide Figura 1). Assim, se os troncos t_1 e t_2 pertencem à mesma classe, o conjunto de subárvores obtidas com a decomposição de todas as árvores geradas com o tronco t_1 é igual ao conjunto obtido de forma semelhante com o tronco t_2 .

Definidos todos esses conceitos, o algoritmo proposto pode ser agora descrito nas seguintes etapas: encontrar todos os troncos em G e agrupá-los em classes; construir as árvores a partir de um tronco pertencente a determinada classe e atribuir diâmetros aos arcos de cada árvore; determinar o custo total e a perda de carga da rede resultante de cada árvore; e verificar o restante dos troncos da mesma classe. A descrição de cada etapa é realizada a seguir:

Etapla 1: Encontrar todos os troncos em G e agrupá-los em classes.

Essa etapa pode ser implementada por uma busca exaustiva que encontre todos os caminhos $C(0, v^{\max})$. Encontrados todos os troncos de G , o próximo passo é agrupá-los em classes. Para determinar se dois troncos pertencem à mesma classe, basta verificar se são iguais os conjuntos de vértices que os definem.

Etapla 2: Construir as árvores e atribuir os diâmetros.

Definidas as classes de troncos, escolhe-se um tronco de cada classe para ser o representante da mesma. Seja t o tronco que representa uma classe \mathcal{T} e $q = |N_t|$. Atribuí-se aos arcos de t , a partir do nó 0, uma sequência não decrescente, de comprimento q , de diâmetros pertencentes a D . Após os arcos do tronco t receberem uma configuração de diâmetros, o passo seguinte consiste em construir a partir de t todas as possíveis árvores.



A construção de cada árvore $T = (N, A')$ a partir de t resume-se a encontrar, para cada uma delas, um subconjunto de arcos $E \subseteq (A - A_t)$ de forma que $A' = (A_t \cup E)$, $|A'| = n$ e exista um único caminho $C(0, v_i), \forall v_i \in (N - \{0\})$. Neste ponto, apenas os arcos do tronco t já estão associados a algum diâmetro. Assim, para toda árvore T gerada e cada atribuição válida de diâmetros aos demais arcos de T , a Etapa 3 deve ser realizada. Uma configuração completa de diâmetros é válida se satisfaz a restrição (9) do modelo (M).

Etapa 3: Encontrar o custo total resultante e a perda de carga da rede.

Com todos os arcos de T configurados com um valor de diâmetro válido, o custo total e a perda de carga de T podem ser encontrados pelas funções $\ell(A')$ e $\pi(A')$, respectivamente. Com tais valores definidos, deve-se verificar se a solução obtida domina ou é dominada por alguma outra solução encontrada até então. Se for dominada, então será descartada. Caso contrário, todas as soluções dominadas por ela serão descartadas. A árvore T foi construída a partir de um tronco t que representa uma classe \mathcal{T} . O restante dos troncos dessa classe podem gerar outras árvores. O procedimento para construí-las é apresentado na Etapa 4.

Etapa 4: Verificar o restante dos troncos da classe.

Nas etapas anteriores, um tronco t foi selecionado de uma classe \mathcal{T} e uma árvore T foi construída a partir de t e associada a uma configuração válida de diâmetros. As subárvores oriundas da decomposição de T podem ser reaproveitadas em outros troncos da mesma classe. Dado que a decomposição de T gera $q = |N_t|$ subárvores e que todos os demais troncos da classe \mathcal{T} possuem os mesmos q nós do tronco t , uma nova árvore $T_i = (N, A'_i)$ pode ser formada com a simples permutação das subárvores de T segundo a ordem especificada por algum outro tronco $t_i \in \mathcal{T}$, como mostrado na Figura 2. Se essa permutação gera uma configuração de diâmetros válida para o tronco t_i , as funções $\ell(A'_i)$ e $\pi(A'_i)$ são calculadas e verifica-se se T_i é dominada ou se domina outras árvores.

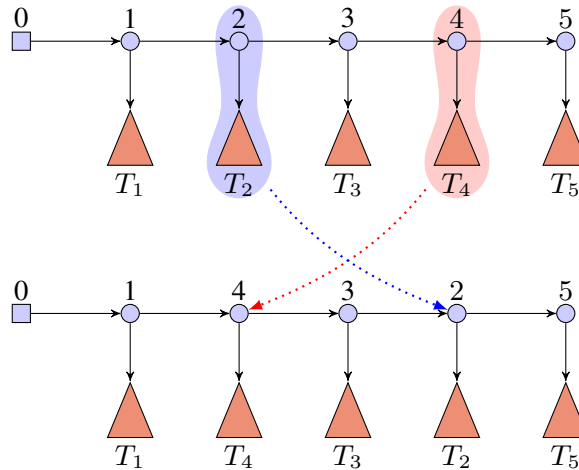


Figura 2: Exemplo de dois troncos $C(0, 5 \equiv v^{\max})$, com permutação de suas subárvores.

4. Exemplo

Considere um sistema de distribuição de ar comprimido composto por um compressor e quatro máquinas consumidoras. As possíveis ligações entre essas máquinas são mostradas na Figura 3. As máquinas 1 a 4 são modeladas como os nós 1 a 4, respectivamente, e o compressor é o nó 0. A pressão máxima admissível nesse sistema é $P^{\max} = 10 \text{ bar}$ e o conjunto de diâmetros de tubos, em mm , que podem ser utilizados na construção da tubulação do sistema é $D = \{25,4; 50,8\}$. Os demais dados são mostrados na Tabela 1:

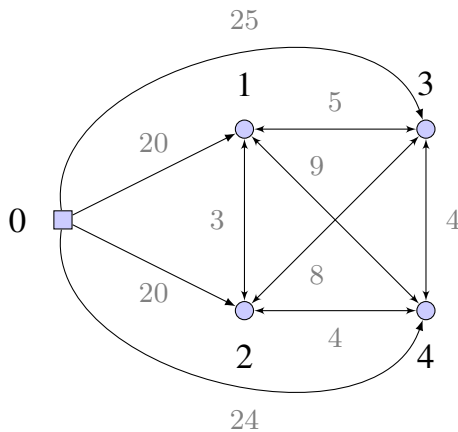


Tabela 1: Parâmetros do sistema mostrado na Figura 3.

Nó i	S (m^3/h)	Q_i (m^3/h)	P_i^{min} (bar)
0	4,0	–	5.000
1	–	2,0	8.000
2	–	1,0	7.211
3	–	0,5	6.633
4	–	0,5	6.325

Figura 3: Grafo que modela as possíveis conexões entre um compressor e quatro máquinas consumidoras.

Os troncos e suas respectivas classes, obtidos na Etapa 1 do algoritmo descrito na Seção 3 a partir do sistema de distribuição de ar comprimido apresentado na Figura 3, são mostrados na Tabela 2. A partir desses troncos, o algoritmo encontrou 957 soluções para o modelo (M), das quais 19 não são dominadas por nenhuma outra solução. Essas soluções não dominadas são mostradas, de forma resumida, na Tabela 3.

Tabela 2: Troncos do sistema mostrado na Figura 3 e suas respectivas classes.

Troncos	$C(0, v^{max})$	\mathcal{T}
t_1	$0 \rightarrow 1$	1
t_2	$0 \rightarrow 2 \rightarrow 1$	2
t_3	$0 \rightarrow 3 \rightarrow 1$	3
t_4	$0 \rightarrow 4 \rightarrow 1$	4
t_5	$0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$	5
t_6	$0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$	5
t_7	$0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$	6
t_8	$0 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$	6
t_9	$0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$	7
t_{10}	$0 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$	7
t_{11}	$0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$	8
t_{12}	$0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$	8
t_{13}	$0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$	8
t_{14}	$0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$	8
t_{15}	$0 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$	8
t_{16}	$0 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$	8

Tabela 3: Soluções de Pareto obtidas para o modelo (M).

Soluções	Custo (R\$)	Perdas de carga (bar^2)
S_1	787.40000	20,948 05
S_2	812.80000	20,383 93
S_3	939.80000	20,244 07
S_4	1219.20000	12,117 89
S_5	1295.40000	2,054 35
S_6	1320.80000	1,490 23
S_7	1371.60000	1,211 78
S_8	1397.00000	0,980 94
S_9	1473.20000	0,877 78
S_{10}	1524.00000	0,856 82
S_{11}	1574.80000	0,778 49
S_{12}	1625.60000	0,757 52
S_{13}	1879.60000	0,752 32
S_{14}	2260.60000	0,683 47
S_{15}	2336.80000	0,549 63
S_{16}	2438.40000	0,450 33
S_{17}	2641.60000	0,445 11
S_{18}	3454.40000	0,362 44
S_{19}	4521.20000	0,328 21

Para qualquer par (S_i, S_j) , com $i < j$, dessas soluções listadas, o custo total da rede na



solução S_i é inferior ao da solução S_j e a perda de carga em S_i é superior à perda de carga em S_j . Neste ponto é oportuno discutir o modelo em André et al. (2013), o qual apresenta um único objetivo de minimização de custo. Podemos observar que a solução ótima para este exemplo se apresenta conforme a solução S_1 . Isto vai de encontro com a análise Walski (2001), ou seja, a qualidade da solução que envolve perdas de carga é sacrificada em função do custo, uma vez que as soluções S_2 a S_{19} não seriam soluções ótimas em André et al. (2013).

5. Considerações finais

O modelo de otimização biobjetivo proposto na Seção 2 minimiza o custo total de implantação de uma rede de tubos e também minimiza a perda de carga na rede projetada, via a adequada definição de valores discretos para os diâmetros dos tubos. O modelo proposto é baseado na abordagem de André et al. (2013). Contudo, esses autores usaram o critério de otimização monocritério e variáveis contínuas para os diâmetros dos tubos. O modelo aqui proposto também pode ser utilizado para outros tipos de fluidos, como gases em geral, água ou líquidos combustíveis.

O algoritmo enumerativo, com podas baseadas nas restrições do modelo proposto, tem-se mostrado promissor em todos os testes realizados. Novos critérios para corte de possibilidades de enumerações de troncos e árvores no algoritmo também estão sendo estudadas e testadas. Testes com instâncias que envolvem mais máquinas e mais opções de diâmetros de tubos também estão sendo realizados. Além disso, estamos buscando demonstrar que toda solução para o modelo proposto gera uma árvore enraizada cuja raiz é o compressor.

Referências

- André, J., Auray, S., Brac, J., Wolf, D. D., Maisonnier, G., Ould-Sidi, M.-M., e Simonnet, A. (2013). Design and dimensioning of hydrogen transmission pipeline networks. *European Journal of Operational Research*, 229(1):239–251.
- Bhaskaran, S. e Salzborn, F. J. M. (1979). Optimal design of gas pipeline networks. *Journal of the Operations Research Society*, 30(12):1047–1060.
- Bureerat, S. e Sriworamas, K. (2013). Simultaneous topology and sizing optimization of a water distribution network using hybrid multiobjective evolutionary algorithm. *Applied Soft Computing*, 13(8):3693–3702.
- Carello, M., Ivanov, A., e Mazza, L. (1998). Pressure drop in pipe lines for compressed air: comparison between experimental and theoretical analysis. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, p. 35–44.
- Clímaco, J. N., Antunes, C. H., e Alves, M. J. G. (2003). *Programação Linear Multiobjetivo: do modelo de programação linear clássico à consideração explícita de várias funções objetivo*. Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra/Portugal.
- D’Antonio, M., Epistein, G., Moray, S., e Schimidt, C. (2005). Compressed air load reduction approaches and innovations. In 27th *Industrial Energy Technology Conference*.
- Dindorf, R. (2012). Estimating potential energy savings in compressed air systems. *Procedia Engineering*, 39:204–211.
- Dosa, I. (2006). Modelling complex compressed air networks in order to improve the speed of calculus. In *Annual of the University of Mining and Geology, St. Ivan Rilski*, volume 49, p. 15–17.
- Krichel, S. V. e Sawodny, O. (2011). Analysis and optimization of compressed air networks with model-based approaches. *Pneumatika*, 17(4):334–341.



- Miettinen, K. M. (1999). *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Boston/USA.
- Prasad, T. D. e Park, N. S. (2004). Multiobjective genetic algorithm for design of water distribution network. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 130(1):73–82.
- Rothfarb, B., Frank, H., Rosenbaum, D. M., Steiglitz, K., e Kleitman, D. J. (1970). Optimal design of offshore natural-gas pipeline systems. *Operations Research*, 18(6):992–1020.
- Saleh, S. H. A. e Tanyimboh, T. T. (2013). Coupled topology and pipe size optimization of water distribution systems. *Water Resour Manage*, 27(14):4795–4814.
- Walski, T. M. (2001). The wrong paradigm-why water distribution doesn't work. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 127(4):203–205.
- White, F. M. (2011). *Mecânica dos Flúidos*. MacGraw-Hill, Porto Alegre, 6 edition.
- Wolf, D. D. e Smeers, Y. (1996). Optimal dimensioning of pipe networks with application to gas transmission network. *Operations Research*, 44(4):596–608.