



## **Problema de Roteamento de Veículos com Múltiplos Entregadores e Demanda Incerta: Formulação Robusta**

**Jonathan De La Vega**

Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos  
Rodovia Washington Luís, s/n, São Carlos - SP, 13565-905  
jdlvmartinez@gmail.com

**Reinaldo Morabito**

Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos  
Rodovia Washington Luís, s/n, São Carlos - SP, 13565-905  
morabito@ufscar.br

**Pedro Munari**

Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos  
Rodovia Washington Luís, s/n, São Carlos - SP, 13565-905  
munari@dep.ufscar.br

### **RESUMO**

Neste artigo, estuda-se o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo, com múltiplos entregadores e com demanda incerta. Além das decisões de roteamento, esta variante visa definir o número de entregadores usados para realizar o serviço dos clientes em cada rota. Uma nova formulação matemática é apresentada para a versão determinística do problema, a qual é baseada na incorporação de variáveis auxiliares que definem a designação de clientes a rotas. Sob essa nova formulação, a abordagem de otimização robusta estática é aplicada visando obter uma formulação da contrapartida robusta que capture a natureza aleatória da demanda de clientes. Devido à dificuldade de se resolver essa formulação, propõe-se uma heurística construtiva para gerar soluções robustas a serem usadas como solução inicial para resolver a formulação da contrapartida robusta. A heurística é uma extensão da heurística I1 de Solomon. Resultados computacionais usando instâncias da literatura e análise de risco via simulação Monte-Carlo indicam o potencial da abordagem de otimização robusta estática para lidar com o compromisso existente entre custo e risco. Os resultados também revelam que abordagem proposta fornece bons resultados mesmo sem ter conhecimento exato de alguma medida probabilística da demanda de clientes.

**PALAVRAS CHAVE.** Roteamento de Veículos com Múltiplos Entregadores, Otimização Robusta, Demanda Incerta.

**L&T - Logística e Transportes, PM - Programação Matemática, OC - Otimização Combinatória.**

### **ABSTRACT**

In this paper, we deal with a variant of the vehicle routing problem with time windows and multiple deliverymen considering uncertain demand. In addition to the routing decisions, this variant aims to define the deliverymen number used to perform customer service on each route. A new mathematical formulation is presented for the deterministic counterpart, which is based on the incorporating auxiliary variables that define the assignment from customers to routes. Building



upon formulation, we apply the static robust optimization approach to obtain a robust counterpart formulation that capture the random nature of customer demand. Due to the difficulty of solving this formulation, we propose a construction heuristic to generate robust solutions that are used as initial solution for solving the robust counterpart formulation. The heuristic is an extension of the Solomon's heuristic II. Computational results using instances from the literature and risk analysis via Monte-Carlo simulation indicate the potential of the static robust optimization to deal with existing compromise between cost and risk. The results also reveal that the proposed approach provides good results even without having exact knowledge of some probabilistic measure of customer demand.

**KEYWORDS. Vehicle Routing with Multiple Deliverymen, Robust Optimization, Uncertain Demand.**

**Logistics and transportation, Mathematical Programming, Combinatorial Optimization.**

### 1. Introdução

O problema de roteamento de veículos tem sido amplamente estudado por sua grande relevância teórica e prática em contextos de transporte e logísticos [Toth e Vigo, 2014]. Uma variante que vem despertando interesse por suas diversas aplicações práticas considera que o número de entregadores por rota é outra decisão a ser tomada [Pureza et al., 2012; Ferreira e Pureza, 2012]. Esta variante é conhecida como o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo e com múltiplos entregadores (PRVJTME) e corresponde ao objeto de pesquisa deste artigo.

Poucos estudos têm abordado o PRVJTME. Em Pureza et al. [2012] propuseram uma formulação três índices para representar o problema e duas meta-heurísticas, Busca-Tabu e Colônia de Formigas, para obter rotas com custo mínimo. A formulação três índices resultou difícil de ser resolvida, mesmo para instâncias com 25 clientes. Por essa razão, a maioria dos trabalhos que têm abordado o PRVJTME tem usado algoritmos heurísticos e meta-heurísticos [Pureza et al., 2012; Ferreira e Pureza, 2012; Senarclens de Grancy e Reimann, 2016; Álvarez e Munari, 2016b]. Métodos exatos também têm sido usados para resolver esse problema. Munari e Morabito [2016] usaram um algoritmo baseado no método *branch-price-and-cut* para resolver mais eficientemente o problema. Em Álvarez e Munari [2016a], meta-heurísticas foram usadas para acelerar a convergência do método *branch-price-and-cut* proposto em Munari e Morabito [2016].

Em ambientes práticos, um aspecto bastante relevante a ser considerado é a incerteza dos parâmetros do problema. A demanda de clientes pode ser considerada incerta em situações em que ela é apenas conhecida quando veículo chega no local do cliente [Laporte et al., 2002; Jabali et al., 2014]. Negligenciar a aleatoriedade da demanda de clientes pode levar à geração de soluções não implementáveis ou ineficientes na prática. Nesse contexto, o uso de metodologias para lidar com a incerteza inerente na demanda de clientes torna-se um objetivo de estudo importante. Até o presente momento não se têm conhecimento de trabalhos na literatura que tenham abordado o PRVJTME na versão estocástica, apesar de outras variantes do problema de roteamentos de veículos terem sido estendidas para a versão estocástica. Para uma revisão de trabalhos em roteamento de veículos estocástico, recomenda-se ver Oyola et al. [2016a,b].

Sendo assim, a proposta deste artigo é o uso da abordagem de otimização robusta (OR) estática para contemplar a aleatoriedade da demanda de clientes no PRVJTME. OR estática é uma metodologia de programação matemática que visa definir decisões aqui-e-agora com custo mínimo que preservem factibilidade para quaisquer das possíveis realizações dos parâmetros incertos contidas em um conjunto de incerteza [Bertsimas e Sim, 2004]. O conjunto de incerteza pode ser uma caixa, um poliedro, um elipsóide ou intersecções destes conjuntos [Ben-Tal e Nemirovski, 2000; Ben-Tal et al., 2004, 2009]. Na formulação determinística do PRVJTME é conveniente ter todos os parâmetros incertos em uma única restrição, pois assim, é possível obter uma formulação da contrapartida robusta que lide com o compromisso existente entre custo e risco. Ainda, neste trabalho,



optou-se por encapsular todas as possíveis realizações da demanda de clientes no conjunto de incerteza de cardinalidade restringida preconizado em Bertsimas e Sim [2004], pois a formulação da contrapartida robusta usando esse conjunto de incerteza poliedral resulta ainda em um programa linear.

A formulação determinística proposta em Pureza et al. [2012] (chamada aqui de formulação três índices) não é conveniente para o uso da otimização robusta estática, uma vez que a formulação da contrapartida robusta seria equivalente a resolver uma instância da formulação determinística em que todos os parâmetros incertos assumem seu respectivo valor de pior caso, resultando em uma abordagem totalmente conservadora. Além disso, o limitante de relaxação linear (RL) da formulação três índices é fraco, inviabilizando o uso de métodos de solução de propósito gerais, como por exemplo, *branch-and-bound* e *branch-and-cut*. Dessa forma, propõe-se neste trabalho uma extensão da formulação de Pureza et al. [2012] de modo a deixá-la conveniente para o uso da OR estática e mais eficiente em relação ao limitante de RL. Para auxiliar na resolução da formulação da contrapartida robusta, propõe-se uma heurística construtiva para gerar uma solução robusta a ser usada como solução inicial. A heurística é uma extensão da heurística II de Solomon.

O restante deste artigo está estruturado da seguinte forma. Na Seção 2. é apresentada a formulação matemática estendida da formulação três índices proposta em Pureza et al. [2012]. Em seguida, na Seção 3., a formulação da contrapartida robusta para o PRVJTME é apresentada. Uma breve explicação da abordagem de solução proposta é mostrada na Seção 4. Os resultados computacionais são ilustrados na Seção 5. Finalmente, a Seção 6. descreve as considerações finais.

## 2. Modelagem Matemática Determinística para o PRVJTME

O PRVJTME pode ser definido através de um grafo  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ , em que  $\mathcal{V} = \{0, 1, \dots, n, n+1\}$  e  $\mathcal{A} = \{(i, j) : i, j \in \mathcal{V}, i \neq j\}$  representam, respectivamente, os conjuntos de nós e arcos do grafo. Os nós 0 e  $n+1$  do conjunto  $\mathcal{V}$  representam o depósito, ao passo que os nós restantes definem os clientes, sendo estes indexados através do conjunto  $\mathcal{N} = \mathcal{V} \setminus \{0, n+1\}$ . Adicionalmente,  $\mathcal{L}$  define o número máximo de entregadores no veículo. Em ambientes práticos, em geral,  $\mathcal{L}$  é pequeno devido a limitações no tamanho da cabine do veículo. Para cada cliente  $i$ , atribui-se uma demanda nominal não negativa  $q_i^o$  e um tempo de serviço  $s_i^l$ , o qual depende do número de entregadores (diz-se que a rota opera em modo  $l$ ). A cada nó  $i$  é dada uma janela de tempo  $[w_i^a, w_i^b]$  que descreve o intervalo de tempo em que o nó  $i$  se encontra disponível para receber o serviço. Também, associam-se para cada arco  $(i, j)$  uma distância  $d_{ij}$  e um tempo de viagem  $t_{ij}$  satisfazendo a desigualdade triangular. Uma frota de  $m$  veículos idênticos encontra-se disponível no depósito, sendo estes indexados pelo conjunto  $\mathcal{K}$ , tal que  $|\mathcal{K}| = m$ . O PRVJTME consiste em desenhar um conjunto  $R = \{R_1, \dots, R_{m'}\}$ , com  $m' \leq m$ , de rotas de custo mínimo com seu correspondente número de entregadores tal que (i) cada rota inicie e finalize no depósito; (ii) cada cliente seja visitado uma única vez e o início do serviço deve respeitar a sua janela de tempo; (iii) a demanda total de uma rota seguida por um veículo não deve exceder a capacidade  $Q$  deste e (iv) o número total de entregadores usados não deve exceder o total disponível no depósito.

Para formular o problema estudado neste artigo na sua versão determinística é necessário definir as seguintes variáveis de decisão: (i)  $x_{ij}^l$ : variável binária que assume o valor de 1 se e somente se existe um roteiro no modo  $l$  que visite o cliente  $j$  imediatamente após visitar o cliente  $i$ ; (ii)  $z_{ik}^l$ : variável assumindo o valor de 1 se e somente se o cliente  $i$  foi designado à rota  $k$  no modo  $l$ ; (iii)  $y_k^l$ : variável que indica com um valor igual a 1 se a rota  $k$  no modo  $l$  é usada; e (iv)  $w_i^l$ : variável de decisão contínua que indica o instante de tempo em que começa o serviço no cliente  $i$  em um modo  $l$ . Desta forma, o modelo matemático proposto neste artigo para o PRVJTME pode ser descrito como segue:

$$\text{minimizar} \quad p_1 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{K}} y_k^l + p_2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{K}} l y_k^l + p_3 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{j \in \mathcal{V}} d_{ij} x_{ij}^l. \quad (1)$$



sujeito a:

$$\sum_{i \in \mathcal{V} \setminus \{n+1\}} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} x_{ij}^l = 1, \quad \forall j \in \mathcal{N}. \quad (2)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{V} \setminus \{0\}} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} x_{ij}^l = 1, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (3)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{V} \setminus \{n+1\}} x_{ij}^l = \sum_{j \in \mathcal{V} \setminus \{0\}} x_{ji}^l, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (4)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} y_k^l \leq |\mathcal{K}|. \quad (5)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} l y_k^l \leq \mathcal{E}. \quad (6)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} x_{0j}^l = \sum_{k \in \mathcal{K}} y_k^l, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (7)$$

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} y_k^l \leq 1, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (8)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} z_{ik}^l \geq y_k^l, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (9)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} z_{ik}^l \leq |\mathcal{N}| y_k^l, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (10)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} z_{ik}^l \leq \sum_{j \in \mathcal{V} \setminus \{0\}} x_{ij}^l, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (11)$$

$$1 - x_{ij}^l - x_{ji}^l \geq z_{ik}^l - z_{jk}^l, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall j \in \mathcal{N}, \quad i \neq j, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (12)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} z_{ik}^l = 1, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (13)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} q_i z_{ik}^l \leq Q y_k^l, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (14)$$

$$w_i^l + (t_{ij} + s_i^l) x_{ij}^l - M_{ij}^l (1 - x_{ij}^l) \leq w_j^l, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (15)$$

$$w_i^a \leq w_i^l \leq w_i^b, \quad \forall i \in \mathcal{V}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (16)$$

$$x_{ij}^l \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (17)$$

$$z_{ik}^l \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (18)$$

$$y_k^l \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (19)$$

A função objetivo (1) do modelo (1)-(19) considera os custos associados ao número de rotas geradas, de entregadores usados e à distância total percorrida. As restrições (2) e (3) indicam que cada cliente deve ser visitado. As restrições (4) descrevem as restrições de fluxo e elas exprimem que o roteiro realizado em um modo  $l$  entrando no cliente  $i$  deve continuar seu percurso no mesmo modo da entrada. É fácil notar que uma das duas restrições (2) e (3) é redundante. Uma vez que no depósito tem-se  $m = |\mathcal{K}|$  veículos e  $\mathcal{E}$  entregadores disponíveis, as restrições (5) e (6) expressam que estas disponibilidades devam ser respeitadas. As restrições (7) indicam que no caso de existirem roteiros no modo  $l$ , então, deve-se designar uma rota  $k$  a cada um desses roteiros. As restrições (8) informam que se existe uma rota  $k$ , então ela deve ser percorrida em um único modo  $l$ . As restrições (9) e (10) exprimem que no caso de existir uma rota  $k$  em um modo  $l$ , então esta



rota deve conter ao menos um cliente e no máximo os  $n = |\mathcal{N}|$  clientes, respectivamente. Já as restrições (11) obrigam, no caso de existir um roteiro com  $l$  entregadores passando pelo cliente  $i$ , a que o cliente pertença a uma única rota  $k$  e esta deve conter os mesmos  $l$  entregadores do roteiro. As restrições (12) informam que se os clientes  $i$  e  $j$  pertencem ao mesmo roteiro no modo  $l$ , então eles devem fazer parte da mesma rota. Estas restrições são as responsáveis de realizar a designação de clientes a rotas. As restrições (13) impõem que cada cliente  $i$  deve pertencer a uma única rota  $k$  em um único modo  $l$ . As restrições (14) indicam que a demanda total atendida em uma rota  $k$  no modo  $l$  não deve exceder a capacidade  $Q$  do veículo. As restrições (15) e (16) impõem a que o serviço dos clientes seja iniciado dentro as janelas de tempo. Finalmente, as restrições (17)-(19) indicam a natureza binária dos vetores de variáveis de decisão  $x$ ,  $z$  e  $y$ .

O vetor de decisão binário  $y$  do modelo matemático (1)-(19) pode ser relaxado, o qual diminui significativamente o número de variáveis binárias do modelo. O modelo (1)-(19) além de ser conveniente para OR estática, também apresenta um limitante de RL mais apertado do que o modelo três índices apresentado em Pureza et al. [2012]. O limitante de RL do modelo proposto é, em média, 271 e 6 vezes maior do que o limitante do modelo três índices para as classes C1 e R1 das instâncias de Solomon aqui consideradas, respectivamente. Por essa razão, neste artigo, optou-se por aplicar a abordagem de otimização robusta estática ao modelo proposto, modelo (1)-(19). Convém salientar que o modelo proposto também é válido para a versão em que a frota de veículos é heterogênea, pois basta alterar a conotação do índice  $k$  das rotas por veículos. Com isso, a formulação robusta a ser detalhada na seguinte seção, também é válida para essa versão do problema.

### 3. Modelagem Matemática para o PRVJTME Robusto

A demanda incerta  $\tilde{q}_i$  é modelada como uma variável aleatória independente, limitada e simétrica tomando valores no intervalo  $[q_i^o - \hat{q}_i, q_i^o + \hat{q}_i]$ , em que  $q_i^o$  e  $\hat{q}_i$  definem o valor nominal/esperado e o desvio máximo permitido da variável aleatória, respectivamente. Para cada variável aleatória  $\tilde{q}_i$ , associa-se outra variável aleatória  $\xi_i$  (denominada de variável aleatória primitiva) que assume valores no intervalo  $[-1, 1]$  tal que  $\tilde{q}_i = q_i^o + \hat{q}_i \xi_i$ . Neste artigo, optou-se por encapsular todas as possíveis realizações do vetor de incerteza primitivo  $\xi$  no conjunto poliedral de incerteza de cardinalidade restringida [Bertsimas et al., 2011]. Esse conjunto é representado como:

$$\mathcal{U}_k^l(z, \Gamma) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}_+^n : \xi_i \leq 1, \forall i \in \mathcal{R}_k^l(z), \sum_{i \in \mathcal{R}_k^l(z)} \xi_i \leq \Gamma_k^l \right\}, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (20)$$

Para um dado vetor de designação de clientes a rotas  $z$ , seja  $\mathcal{R}_k^l(z)$  o conjunto dos clientes pertencentes à rota  $k$  no modo  $l$ . Note-se que para cada par  $(k, l)$  existe um conjunto de cardinalidade restringida  $\mathcal{U}_k^l(z, \Gamma)$ . Dado que um veículo pode tomar diferentes rotas em diferentes modos, o conjunto de incerteza, além de depender do vetor de *budget* de incerteza  $\Gamma$ , também depende das rotas selecionadas e dos clientes pertencentes a essas rotas. Essa é a razão da indexação do conjunto  $\mathcal{U}_k^l(z, \Gamma)$  com  $z$ . O *budget* de incerteza  $\Gamma_k^l$  define o número máximo de parâmetros incertos (demanda de clientes pertencentes à rota  $k$  no modo  $l$ ) que são permitidos a variar. A formulação equivalente determinística do PRVJTME robusto pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \\ &p_1 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{K}} y_k^l + p_2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k \in \mathcal{K}} l y_k^l + p_3 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{j \in \mathcal{V}} d_{ij} x_{ij}^l. \end{aligned} \quad (21)$$



sujeito a:

restrições: (2)-(13) e (15)-(19).

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} q_i^o z_{ik}^l + \sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha_{ik}^l + \Gamma_k \beta_k^l \leq Q y_k^l, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (22)$$

$$\alpha_{ik}^l + \beta_k^l \geq \hat{q}_i z_{ik}^l, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (23)$$

$$\alpha_{ik}^l \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (24)$$

$$\beta_k^l \geq 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad l = 1, \dots, \mathcal{L}. \quad (25)$$

As restrições (22)-(23) são obtidas ao dualizar a contraparte robusta das restrições (14) sob o conjunto de incerteza (20) (veja Bertsimas e Sim [2004]). Os novos vetores de decisão contínuos  $\alpha$  e  $\beta$  nas restrições (22)-(23) são usados para quantificar o nível de proteção contra as possíveis variações do vetor de parâmetros incertos  $\tilde{q}$ . A partir das restrições (22)-(23) é possível inferir que o nível de proteção total é dado pela soma dos níveis de proteção individual e global. O vetor  $\alpha$  define o nível de proteção individual da rota  $k$  no modo  $l$  e quantifica a proteção marginal contra qualquer possível variação do desvio,  $\hat{q}_i$ , da variável aleatória  $\tilde{q}_i$ . Por outro lado, o vetor  $\beta$  define o nível de proteção global da rota  $k$  no modo  $l$  e expressa a proteção marginal contra a suposição de que no máximo  $\Gamma_k^l$  das vezes a natureza se comportará de forma desfavorável.

#### 4. Abordagem de solução

Embora ambos os modelos (1)-(19) e (21)-(25) possuem a mesma complexidade para a análise computacional, experimentos computacionais com as instâncias consideradas neste artigo revelaram que resolver o modelo (21)-(25) requer um maior esforço computacional do que resolver o modelo (1)-(19). De fato, para alguns instâncias do modelo (21)-(25) nem solução factível foi encontrada. Por essa razão, uma abordagem heurística foi proposta. A abordagem heurística consiste em adaptar a heurística II de Solomon para o problema em estudo visando determinar uma solução factível robusta e, em seguida, usá-la como solução inicial para resolver o modelo (21)-(25).

Para detalhes sobre o funcionamento da heurística II de Solomon, recomenda-se ver Solomon [1987]. A heurística II de Solomon constrói as rotas uma de cada vez. Usando o critério do cliente mais distante ou mais urgente, a heurística começa com único entregador e inserções factíveis robustas são feitas até que não sejam mais possíveis ou até que o número máximo de entregadores por rota seja atingido. Neste artigo, três entregadores por rota é o máximo permitido, isto é,  $\mathcal{L} = 3$ . As inserções são realizadas em base a minimizar algum critério. Neste artigo, o critério corresponde a uma combinação linear convexa da distância e da duração total das rotas. Para verificar se uma inserção é factível robusta é necessário atribuir os  $\Gamma$  piores desvios da demanda dos clientes na determinação da demanda total atendida na rota parcial. Se a inserção, além de satisfazer as restrições de janelas de tempo, não excede a capacidade da rota, então, ela é considerada de inserção factível robusta. Se inserções factíveis robustas não são mais possíveis, aumenta-se em uma unidade o número de entregadores na rota e segue-se o mesmo procedimento como no caso de um entregador. Se ao menos uma inserção factível robusta é possível, então, atualiza-se o número de entregadores. Esse procedimento é realizado dinamicamente até que todos os clientes tenham sido roteados. Finalmente, a solução encontrada pela heurística II robusta é usada como solução inicial visando acelerar a convergência do CPLEX para resolver o modelo (21)-(25).

#### 5. Resultados Computacionais

Os experimentos computacionais foram realizados a fim de atender os seguintes objetivos: (1) Observar o impacto do parâmetro  $\Gamma$  nas decisões de roteamento e no valor da função objetivo; (2) Determinar através de uma simulação Monte-Carlo o risco relacionado à probabilidade de violação do modelo para sua respectiva comparação com o limitante teórico fornecido na literatura e (3) Avaliar o desempenho da abordagem de solução proposta. Os modelos determinístico e robusto foram codificados na linguagem C++ e resolvidos pelo solver CPLEX 12.5 usando a tecnologia do CONCERT. Para a realização dos experimentos computacionais, foi utilizado um PC Intel(R) i7 com processador Core (TM) com 16 GB de memória RAM sob a plataforma Linux.





## 5.1 Descrição dos Dados

Foram usados exemplares gerados das bem conhecidas classes C1 e R1 das instâncias de Solomon para os experimentos computacionais. Devido à dificuldade de se resolver instâncias de grande porte do modelo (21)-(25), apenas os resultados foram realizados para  $n = 25$ , onde  $n$  representa o número de clientes. Para avaliar melhor o potencial da metodologia de RO estática, também reduziu-se a capacidade dos veículos para as instâncias das classes C1 e R1. Os valores da capacidade,  $Q$ , foram 80 para a classe C1 e 50 para a R1. Por isso, neste artigo, as classes usadas nos experimentos computacionais são referenciadas como C1.n25.Q80 e R1.n25.Q50. Os valores dos parâmetros  $q_i^o$ ,  $t_{ij}$ ,  $d_{ij}$ ,  $w_i^a$  e  $w_i^b$  correspondem aos  $n$ -primeiros dados das classes C1 e R1 das instâncias de Solomon, exceto para o tempo de serviço, o qual foi determinado como em Pureza et al. [2012]:

$$s_i^l = \frac{\min\{q_i^o * rs, D - \max\{w_i^a, t_{0i}\} - t_{i,n+1}\}}{l}$$

em que  $D = w_{n+1}^b$  e  $rs = 2$  representam a duração da rota e o ratio de serviço, respectivamente. Os custos unitários por rota gerada, por veículo usado e por distância percorrida foram de  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 0.1$  e  $p_3 = 0.0001$ , respectivamente, como em Pureza et al. [2012]. O número de veículos e entregadores disponíveis no depósito foram 25 e 50, respectivamente. Em relação aos dados do modelo robusto, o desvio  $\hat{q}_i$  para a demanda corresponde a uma porcentagem  $\%uld$  (15%, 20% e 30%) da demanda nominal  $q_i^o$ , isto é,  $\hat{q}_i = uld * q_i^o/100$ . Essa porcentagem é denominada neste artigo como nível de incerteza da demanda. Por simplicidade, o nível de robustez para cada restrição de capacidade, isto é,  $\Gamma_1^1 = \Gamma_2^1 = \dots = \Gamma_{|\mathcal{N}|}^1 = \dots = \Gamma_1^{|\mathcal{L}|} = \Gamma_2^{|\mathcal{L}|} = \dots = \Gamma_{|\mathcal{N}|}^{|\mathcal{L}|} = \Gamma$ . A heurística II robusta foi inicializada seguindo o critério do cliente mais distante, uma vez que, conforme a experimentos computacionais preliminares, este critério obteve um melhor desempenho do que o cliente mais urgente. Também, de acordo a experimentos computacionais preliminares, os melhores valores para os parâmetros da heurística II robusta foram 0.6, 0.4 e 1 para  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\mu$  e  $\lambda$ , respectivamente (veja Solomon [1987]).

## 5.2 Impacto do parâmetro $\Gamma$

A formulação (21)-(25) para o PRVJTME robusto é difícil de ser resolvido. Tipicamente, a análise do impacto do parâmetro de robustez/risco  $\Gamma$  é realizado em relação aos valores ótimos da função objetivo. Para as instâncias aqui usadas para os experimentos computacionais com  $\Gamma > 0$ , o solver CPLEX não conseguiu provar otimalidade para nenhuma delas, após de um tempo de execução de 3600 segundos. Por essa razão, o solver CPLEX foi executado durante 36000 segundos para resolver instâncias com  $\Gamma > 0$  do modelo (21)-(25) visando a realizar a análise da robustez.

A Figura 1 mostra a solução ótima obtida da instância R101.n25.Q50 para valores do parâmetro  $\Gamma$  iguais a 0, 1, 2 e 5 e para um nível de incerteza  $uld = 15\%$ . A solução é dada pelo valor da função objetivo ( $z^*$ ), número de rotas geradas ( $NR$ ), número total de entregadores usados ( $ND$ ), distancia total percorrida ( $dist$ ), ordem de visita dos clientes pertencentes em cada rota e número de entregadores por rota. Note que para  $\Gamma = 0$ , existem 8 rotas distintas, as quais representam uma solução totalmente desprotegida contra as incertezas, pois esta corresponde à solução do problema nominal. O número total de entregadores usados foi de 15 e a distância total percorrida para essa solução foi de 653.028. Quando  $\Gamma = 1$ , permite-se que a realização da demanda de um cliente pertencente à rota assuma seu respectivo valor de pior caso. Quando isso é incorporado na formulação (21)-(25), existe pelo menos uma rota entre as obtidas no problema nominal (problema com  $\Gamma = 0$ ) em que a demanda total servida excede a capacidade do veículo. Isso leva ao modelo a determinar novas rotas que garantem factibilidade na capacidade do veículo. Por essa razão, algumas rotas da solução com  $\Gamma = 1$  variaram com respeito às rotas da solução determinística, aumentando a distância total percorrida a 661.604, o que representa um aumento no valor ótimo da função objetivo de aproximadamente de 1.3%. Note que o número de rotas geradas e de entregadores usados se manteve em relação à solução do problema nominal. Nesse



caso, basta com realocar os clientes que causam as infactibilidades entre algumas das rotas do problema nominal e, simplesmente, incorrer em custos relacionados à distância total percorrida, o que representa a alternativa mais barata. Por isso, obteve-se neste problema o menor aumento na função objetivo em comparação ao objetivo do problema nominal, aproximadamente 0.009%.

Para  $\Gamma = 2$ , permite-se que a realização da demanda de dois clientes por rota com os dois piores desvios assumam o valor de pior caso. Nesse caso, o número de rotas se mantém em relação à solução do problema com  $\Gamma = 1$ . No entanto, para garantir factibilidade na solução é necessário usar um entregador adicional, passando de 15 a 16. Isso porque não é possível determinar roteiros usando 15 entregadores em total em que todos os clientes consigam ser atendidos dentro das janelas de tempo. Então, nesta solução, além de incorrer em custos adicionais associados à distância total percorrida, também se incorre no custo relacionado ao entregador adicional usado. Isso leva a um aumento da função objetivo em aproximadamente 1.08% em relação ao problema nominal. Finalmente, para  $\Gamma = 5$ , isto é, quando é resolvido o método de Soyster (as demandas de todos os clientes da rota assumem o valor de pior caso) pode ser visto que as rotas variaram, uma vez que ao menos uma rota das obtidas com  $\Gamma = 2$  não pode absorver a carga adicional dos próximos três clientes tendo os próximos três maiores desvios. Note que houve um aumento no número de rotas geradas, passando de 8 a 9. Por essa razão, obteve-se neste problema o maior aumento na função objetivo, em torno de 8.5%, quando comparado à solução ótima do problema determinístico. Neste caso, realocando os clientes entre as rotas geradas em  $\Gamma = 2$  nem mesmo atribuindo o número máximo de entregadores por rota, garante-se factibilidade nas restrições relacionadas ao atendimento dos clientes dentro das janelas de tempo. Por essa razão, uma rota adicional tem que ser gerada a fim de evitar infactibilidade. Portanto, pode-se observar como a metodologia de RO consegue redesenhar as decisões de roteamento conforme o grau de incerteza no problema aumenta.

### 5.3 Análise de Risco via Simulação Monte-Carlo

O risco neste artigo é visto como a probabilidade da solução encontrada pelo modelo robusto ser infactível na prática. Esta probabilidade foi estimada via simulação Monte-Carlo. Duas simulações foram realizadas, uma no semi-intervalo  $[q_i^o, q_i^o + \hat{q}_i]$  e outra no intervalo  $[q_i^o - \hat{q}_i, q_i^o + \hat{q}_i]$ . Para realizar a simulação, 10000 amostras, uniformemente distribuídas, diferentes foram geradas a partir do intervalo correspondente e para cada iteração da simulação, verificou-se se ao menos uma realização da demanda de clientes da amostra gerada violava as restrições de capacidade. Após realizar todas as iterações da simulação, contabilizou-se o número de amostras que violaram a capacidade dos veículos, o qual era dividido pelo o número de total de amostras, 10000, para obter a estimativa do risco. A Tabela 1 ilustra, para diferentes valores do parâmetro  $\Gamma$  e do nível de incerteza da demanda  $uld\%$ , o valor ótimo do objetivo ( $z^*$ ), o preço da robustez ( $PR\%$ ), a proporção de amostras geradas com respeito ao semi-intervalo e intervalo, respectivamente, que violaram as restrições de capacidade dos veículos e o limitante teórico do risco dado em Bertsimas e Sim [2004]. O preço da robustez foi determinado como  $PR\% = (z_{rob}^* - z_{det}^*) / z_{det}^* \times 100$ , em que  $z_{rob}^*$  e  $z_{det}^*$  representam o valor ótimo robusto e nominal, respectivamente. O preço da robustez mede o aumento relativo do valor ótimo robusto em relação ao valor ótimo nominal.

Como era de se esperar, independente do nível de incerteza da demanda  $uld\%$ , os valores da probabilidade de violação são menores quando a simulação Monte-Carlo é realizada no intervalo todo do que no semi-intervalo. Note que o limitante teórico satisfaz os valores das probabilidades obtidas na simulação realizada no intervalo todo e que tal limitante não é o suficientemente apertado. Ainda, é possível observar, para as duas simulações, a existência do *trade-off* entre o valor ótimo do objetivo e o risco conforme o parâmetro  $\Gamma$  aumenta. Independente do nível de incerteza na demanda, em  $\Gamma = 0$ , têm-se a solução do problema nominal, a qual representa uma solução totalmente desprotegida contra as incertezas. Isso pode ser visto uma vez que o risco alcança seu máximo valor. Por outro lado, quando  $\Gamma = 10$ , o risco da solução encontrada pela formulação (21)-(25) é zero. No entanto, o preço da robustez atinge seu máximo valor, 0.132%, 0.135% e 0.237% para  $uld\%$  igual a 15%, 20%, e 30%, respectivamente. A partir desses resultados, percebe-se que o parâmetro  $\Gamma$  define



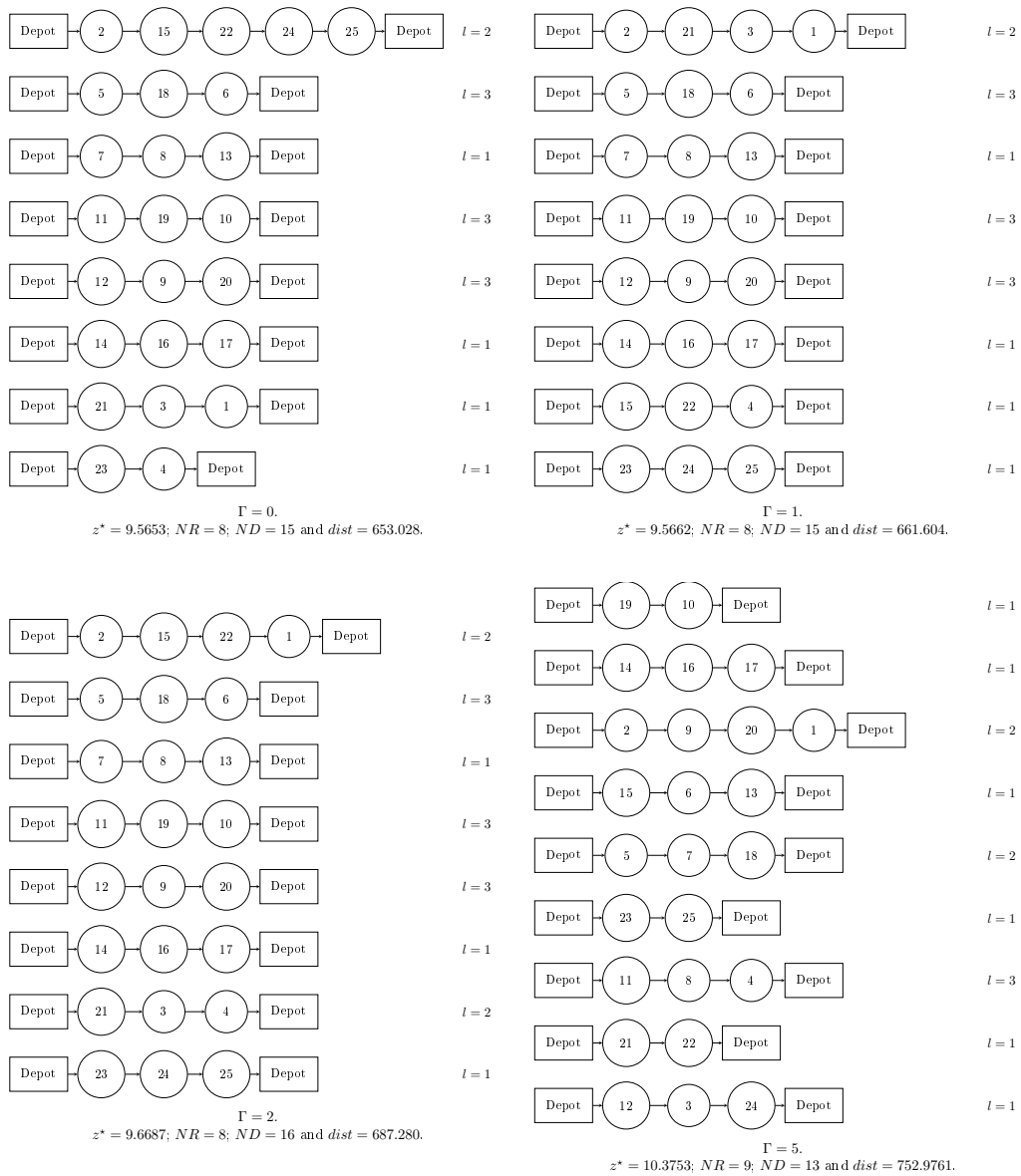


Figure 1: Impacto do parâmetro  $\Gamma$  na geração das rotas para a instância R101.n25.Q50 com  $uld = 15\%$ .



Table 1: Resultados da Simulação Monte-Carlo (instance C101.n25.Q200).

$\Gamma$	$uld = 15\%$				$uld = 20\%$				$uld = 30\%$				
	$z^*$	$PR\%$	HI	I	$z^*$	$PR\%$	HI	I	$z^*$	$PR\%$	HI	I	bounded
0	3.31918	0.000	0.90270	0.06310	3.31918	0.000	0.99670	0.18040	3.31918	0.000	0.9989	0.2288	1.00000
1	3.31918	0.000	0.90970	0.06110	3.31918	0.000	0.99650	0.18040	3.32272	0.106	0.9303	0.0484	0.66447
2	3.32272	0.106	0.01280	0.00010	3.32272	0.106	0.69020	0.02070	3.32293	0.113	0.8982	0.0302	0.52266
3	3.32272	0.106	0.01220	0.00010	3.32272	0.106	0.72100	0.00980	3.32357	0.132	0.2292	0.0043	0.38085
4	3.32272	0.106	0.01180	0.00000	3.32293	0.113	0.03840	0.00050	3.32367	0.135	0.0016	0.0000	0.23904
5	3.32281	0.109	0.00690	0.00000	3.32357	0.132	0.00000	0.00000	3.32378	0.138	0.0008	0.0000	0.15314
6	3.32293	0.113	0.00490	0.00000	3.32357	0.132	0.00000	0.00000	3.32393	0.143	0.0002	0.0000	0.06724
7	3.32338	0.127	0.00290	0.00000	3.32367	0.135	0.00000	0.00000	3.32393	0.143	0.0001	0.0000	0.00781
8	3.32357	0.132	0.00000	0.00000	3.32367	0.135	0.00000	0.00000	3.32393	0.143	0.0001	0.0000	0.00065
9	3.32357	0.132	0.00000	0.00000	3.32367	0.135	0.00000	0.00000	3.32706	0.237	0.0000	0.0000	0.00008
10	3.32357	0.132	0.00000	0.00000	3.32367	0.135	0.00000	0.00000	3.32706	0.237	0.0000	0.0000	0.00000

o nível de aversão ao risco do decisor. Quando  $\Gamma = 0$ , diz-se que o decisor é neutral ou indiferente ao risco, ao passo que para  $\Gamma > 1$  o decisor é averso ao risco. Então, de acordo com a preferência do decisor, a metodologia de otimização robusta é capaz de proporcionar soluções que sejam piores em relação ao valor da função objetivo, porém que, em geral, se mantenham factíveis na prática. Observa-se também que não necessariamente deve-se atribuir um valor grande a  $\Gamma$  para ter uma solução com baixo nível de risco, basta com atribuir um valor apropriado tal que a probabilidade de violação seja aceitável na prática.

#### 5.4 Desempenho da Abordagem de Solução

As Tabelas 2 e 3 apresentam para cada nível de incerteza,  $uld\%$ , e para cada algoritmo (CPLEX, Heurística II Robusta - HRII, HRII com CPLEX), os resultados, em média, relacionados ao valor da função objetivo ( $z$ ), tempo de execução em segundos do algoritmo ( $t$ ) e o  $gap$  de otimalidade estimado como a diferença relativa entre o valor da função objetivo e a melhor solução estimada pelo CPLEX após 3600 segundos. Os resultados dessas tabelas correspondem a valores do parâmetro de robustez  $\Gamma$  iguais a 0, 2 e 5. De acordo com os resultados dessas tabelas, independente do nível de incerteza da demanda  $uld\%$ , pode-se inferir que a abordagem de solução proposta não consegue diminuir significativamente o valor da função objetivo das soluções encontradas pela heurística II robusta das instâncias da classe C1.n25.Q80. Também dessas tabelas, para os problemas na classe C1.n25.Q80, é possível observar que a heurística II robusta desenvolvida neste artigo supera em qualidade e em eficiência computacional ao CPLEX puro. Tanto assim que para esses problemas, a heurística II robusta consegue determinar o número de rotas ótimo. A capacidade das instâncias C1.n25.Q80 levam a cobrir poucos clientes por rota. Além disso, as instâncias desta classe apresentam um horizonte de planejamento longo, o que indica que as esperas contribuem significativamente para a duração total da rota. Nesses casos, para melhorar uma solução dada pela heurística II robusta, basta que o CPLEX realoque clientes entre as rotas sem a necessidade de usar mais de um entregador para respeitar as janelas de tempo. Por essa razão, o ganho nas instâncias da classe C1.n25.Q80 é pouco significativo, pois, apenas, esta-se diminuindo a distância total percorrida e pela classificação lexicográfica do objetivo, qualquer melhoria na distância não impacta significativamente no valor do objetivo.

Table 2: Results of instance C1.n25.Q80

Algorithm	$uld = 15\%$			$uld = 20\%$			$uld = 30\%$		
	$z$	$t$ (s)	$gap$ (%)	$z$	$t$ (s)	$gap$ (%)	$z$	$t$ (s)	$gap$ (%)
CPLEX	7.7507	3503	17.8016	7.7564	3396	14.9580	8.1535	3502	19.1857
RHI1	7.3784	0.0030	12.2519	7.7478	0.0053	14.8345	8.1167	0.0024	18.6716
RHI1 with CPLEX	7.3754	3600	12.2062	7.7452	3440	14.7844	8.1137	3603	18.6256



Table 3: Results of instance R1.n25.Q50

Algorithm	$uld = 15\%$			$uld = 20\%$			$uld = 30\%$		
	$z$	$\bar{t}$ (s)	$\overline{gap}$ (%)	$z$	$\bar{t}$ (s)	$\overline{gap}$ (%)	$z$	$\bar{t}$ (s)	$\overline{gap}$ (%)
CPLEX	9.7752	3499	36.2191	9.9568	3502	25.8164	10.4282	3496	33.4468
RH11	9.7632	0.0029	24.0884	10.0869	0.0021	27.2769	10.5970	0.0030	31.7976
RH11 with CPLEX	9.4723	3506	20.6103	9.6732	3503	22.1686	10.2476	3504	27.5769

Já para a classe R1.n25.Q50, independente do nível de incerteza da demanda  $uld\%$ , a heurística I1 robusta supera em eficiência computacional ao CPLEX puro e em qualidade apenas para os problemas com  $uld = 15\%$ . Apesar de que o CPLEX puro obteve melhores resultados, em média, do que a heurística I1 robusta para os problemas com  $uld = 30\%$ , o  $gap$  médio da heurística é menor. Isso porque o CPLEX puro não conseguiu determinar após 3600 segundos uma solução factível para alguns desses problemas. Para esses problemas o  $gap$  atribuído foi 1, o que leva a aumentar o  $gap$  médio do CPLEX puro. Por outro lado, independente do nível de incerteza da demanda  $uld\%$ , para os problemas desta classe, ganhos mais significativos são obtidos na abordagem de solução proposta (RH11 com CPLEX) quando comparada à heurística I1 robusta. Nesses problemas, a heurística I1 robusta superestima o número de rotas e de entregadores usados. Dessa forma, nas instâncias da classe R1.n25.Q50, além do CPLEX diminuir a distância total percorrida, o número de rotas geradas e de entregadores usados também são reduzidos, levando isso a um ganho mais significativo no valor do objetivo.

## 6. Considerações Finais

Neste artigo, uma variante do problema de roteamento de veículo envolvendo a decisão adicional de designação do número de entregadores em cada rota foi estudado. Incertezas na demanda de clientes foram incorporadas dentro um modelo de programação inteira pelo uso da otimização robusta estática. A formulação de programação inteira é baseada na adição de variáveis de decisão que indicam a designação de clientes a rotas, além das variáveis de roteamento. À luz dos resultados obtidos, pode-se deduzir como o parâmetro  $\Gamma$ , ao ser variado, impacta na geração das rotas, no custo e no risco. Também dos resultados é possível concluir que resolver o problema de otimização robusta requer um maior esforço computacional do que resolver o problema nominal. A abordagem de solução heurística baseada na heurística I1 de Solomon para gerar uma solução inicial para o CPLEX, embora consegue superar a qualidade das soluções das fornecidas pelo CPLEX puro, não consegue provar otimalidade para as instâncias usadas neste estudo. Por essa razão, métodos de solução exatos que explorem de forma mais conveniente a estrutura particular do problema de otimização robusta devem ser propostos, como por exemplo, *branch-price-and-cut*. Finalmente, como perspectiva de trabalho futuro seria também interessante considerar os tempos de viagens e serviço estocásticos.

## References

- Álvarez, A. e Munari, P. (2016a). An exact hybrid method for the vehicle routing problem with time windows and multiple deliverymen. Technical report, Industrial Engineering Department, Federal University of São Carlos.
- Álvarez, A. e Munari, P. (2016b). Metaheuristic approaches for the vehicle routing problem with time windows and multiple deliverymen. *Gestão & Produção*, 23(2):279–293.
- Ben-Tal, A., El Ghaoui, L., e Nemirovski, A. (2009). *Robust Optimization*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press.
- Ben-Tal, A., Goryashko, A., Guslitzer, E., e Nemirovski, A. (2004). Adjustable robust solutions of uncertain linear programs. *Mathematical Programming*, 99(2):351–376.



- Ben-Tal, A. e Nemirovski, A. (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming Series B*, 88:411–424.
- Bertsimas, D., Brown, D. B., e Caramanis, C. (2011). Theory and applications of robust optimization. *SIAM Review*, 53(3):464–501. URL <http://dx.doi.org/10.1137/080734510>.
- Bertsimas, D. e Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operations Research*, 52(1):35–53.
- Clarke, G. e Wright, J. W. (1964). Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations Research*, 12(4):568–581.
- Dantzig, G. e Ramser, J. (1959). The truck dispatching problem. *Management Science*, 6(1):80–91.
- Ferreira, V. e Pureza, V. (2012). Some experiments with a savings heuristic and a tabu search approach for the vehicle routing problem with multiple deliverymen. *Pesquisa Operacional*, 32: 443 – 463.
- Jabali, O., Rei, W., Gendreau, M., e Laporte, G. (2014). Partial-route inequalities for the multi-vehicle routing problem with stochastic demands. *Discrete Applied Mathematics*, 177(0):121 – 136.
- Laporte, G., Louveaux, F., e Hamme, L. (2002). An integer l-shaped algorithm for the capacitated vehicle routing problem with stochastic demands. *Operations Research*, 50(3):415 – 423.
- Munari, P. e Morabito, R. (2016). A branch-price-and-cut for the vehicle routing problem with time windows and multiple deliverymen. Technical report, Federal University of São Carlos, Production Engineering Department.
- Oyola, J., Arntzen, H., e Woodruff, D. L. (2016a). The stochastic vehicle routing problem, a literature review, part i: models. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, p. 1–29.
- Oyola, J., Arntzen, H., e Woodruff, D. L. (2016b). The stochastic vehicle routing problem, a literature review, part ii: solution methods. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, p. 1–40.
- Pureza, V., Morabito, R., e Reimann, M. (2012). Vehicle routing with multiple deliverymen: Modeling and heuristic approaches for the {VRPTW}. *European Journal of Operational Research*, 218(3):636 – 647.
- Senarclens de Grancy, G. e Reimann, M. (2016). Vehicle routing problems with time windows and multiple service workers: a systematic comparison between aco and grasp. *Central European Journal of Operations Research*, 24(1):29–48.
- Solomon, M. M. (1987). Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operations Research*, 35(2):254–265.
- Soyster, A. L. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operation Research*, 21(5):1154–1157.
- Toth, P. e Vigo, D. (2014). *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications, Second Edition*. MOS-SIAM Series on Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN 9781611973594.