



PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS DO MODELO LINEAR DA SUAUIZACÃO

Luana Carneiro Brandão

Pós Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, São Domingos, 24210-240, Niterói, RJ
luanabrandao@id.uff.br

João Carlos Correia Baptista Soares de Mello

Departamento de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, São Domingos, 24210-240, Niterói, RJ, Brazil
jcsmello@producao.uff.br

Renata Raposo Del-Vecchio

Departamento de Análise do Instituto de Matemática – Universidade Federal Fluminense
Rua Mário Santos Braga, Campus Valonguinho, Centro, 24020-140, Niterói, RJ
renata@vm.uff.br

RESUMO

A suavização da fronteira DEA foi proposta em 2002 para resolver o problema das múltiplas soluções ótimas para as DMUs extremo-eficientes na fronteira DEA clássica. Essa técnica substitui a fronteira original, linear por partes, por uma fronteira continuamente diferenciável, que passa pelas mesmas DMUs extremo-eficientes. Para escolher a fronteira que mais se aproxima da fronteira original, as funções objetivo dos diversos modelos de suavização existentes na literatura utilizam a topologia baseada no comprimento de arco (ou sua generalização multidimensional). Em 2014, foi proposto um modelo que utiliza outra função objetivo para a suavização da fronteira DEA, baseada na área (ou sua generalização multidimensional) das fronteiras. O presente trabalho estuda a topologia implicitamente utilizada nesse modelo, e também compara as características básicas das duas topologias da suavização.

PALAVRAS CHAVE. Suavização DEA, Topologia, Métrica

Área principal: DEA

ABSTRACT

Smooth DEA was first proposed in 2002 to solve the classic DEA problem of multiple optimal solutions for extreme-efficient DMUs. This technique replaces the original piecewise linear frontier by a new frontier with derivatives at all points that contains the same extreme-efficient DMUs. Most smooth models use the arc length based topology (or its multidimensional generalization) to determine the smooth frontier that is closest to the original DEA frontier. However, in 2014, the authors proposed a smooth model with a different objective function, based on the frontiers' area (or its multidimensional generalization). The present work studies the topology implicitly used in the new smooth model, and compares the basic characteristics from both topologies.

KEYWORDS. Smooth DEA, Topology, Metric.

Main area: DEA



1. Introdução

Análise Envolvória de Dados (DEA – *Data Envelopment Analysis*) foi proposta originalmente por Charnes, *et al.* (1978) para medir a eficiência de unidades produtivas (DMUs – *Decision Making Units*), considerando os seus recursos (*inputs*) e produtos (*outputs*). Essa técnica constrói uma fronteira de eficiência, formada pelas DMUs com as melhores relações produto/insumo, chamadas DMUs eficientes. O modelo proposto inicialmente, em 1978, chamado DEA CCR, considera retornos constantes de escala, ao passo que o modelo BCC, proposto por Banker *et al.* (1984), considera retornos variáveis de escala.

Assim como outros problemas de programação matemática, os modelos clássicos de DEA apresentam formulações duais (Cooper *et al.*, 2000), quais sejam, o Modelo do Envelope, que trabalha com a distância de cada DMU à fronteira de eficiência, e o Modelo dos Multiplicadores, que trabalha com a razão de somas ponderadas dos *inputs* e *outputs*. Tais pesos podem ser considerados *trade-offs* ou *shadow prices*, sendo especialmente relevantes para itens sem valor de mercado (Coelli *et al.*, 1998). Além disso, quando as variáveis estão na mesma escala, esses pesos são considerados a importância relativa de cada input ou output. Entretanto, eles não podem ser calculados de maneira única para as DMUs extremo-eficientes, isto é, as DMUs que formam os “cantos” da fronteira de eficiência. Os estudos na literatura, em geral, ignoram essa multiplicidade de soluções ótimas e utilizam os primeiros resultados encontrados (THANASSOULIS, 1993; CHILINGERIAN, 1995).

Para solucionar essa questão, Soares de Mello *et al.* (2002) propuseram a suavização da fronteira DEA, substituindo a fronteira DEA original, linear por partes, por outra com derivadas contínuas em todos os pontos. A fronteira suavizada deve conter as mesmas DMUs extremo-eficientes da fronteira original e manter as propriedades básicas do modelo clássico. Além disso, a fronteira suavizada deve ser tão próxima quanto possível da fronteira original, com base na topologia do comprimento de arco (e sua generalização multidimensional).

Posteriormente, alguns trabalhos (SOARES DE MELLO *et al.*, 2004; NACIF *et al.*, 2009; PEREIRA *et al.*, 2015) propuseram generalizações ao modelo de suavização da fronteira DEA, que permitiram trabalhar com múltiplos *inputs* e *outputs* para as DMUs. Também foram propostas correções e aprimoramentos aos modelos de suavização da fronteira DEA BCC (BRANDÃO & SOARES DE MELLO, 2017), que garantiram as propriedades básicas do modelo clássico em quaisquer situações. Todos esses modelos se basearam na mesma topologia proposta inicialmente.

Por outro lado, Brandão & Soares de Mello (2014) propuseram uma nova maneira de se encontrar a fronteira DEA suavizada que mais se aproxima da original, substituindo a função objetivo do problema. O novo modelo se fundamenta no princípio de clássico de Banker *et al.* (1984), segundo o qual o conjunto de possibilidade de produção (PPS – do inglês, *Production Possibility Set*) deve ser o menor que as restrições permitem. Os autores verificaram, ainda, que o modelo proposto é um modelo linear, ao passo que os demais modelos de suavização da literatura são quadráticos.

O objetivo deste trabalho é estudar a topologia que sustenta o modelo linear. Para isso, o presente trabalho desenvolve a função que induz a topologia desse modelo, analisando-a quanto às propriedades de métricas. Em seguida, são comparadas as duas topologias da suavização e suas características básicas. Além disso, analisa-se a sensibilidade das fronteiras definidas pelas duas topologias em relação às restrições dos problemas de suavização.

Esse estudo é importante porque o modelo tradicional da suavização foi proposto com base em extensa análise topológica realizada por Soares de Mello (2002). Por outro lado, com as mudanças propostas por Brandão & Soares de Mello (2014), essa topologia deixa de ser o fundamento do modelo suavizado. Dessa forma, o estudo topológico do modelo linear se faz necessário para que se possa conhecer a base teórica do novo modelo, permitindo também analisar vantagens e desvantagens dos diferentes modelos. Em última instância, essa compreensão auxilia a escolha do modelo mais adequado, dependendo das condições do problema.

O próximo capítulo apresenta o referencial teórico dos modelos de suavização que utilizam a topologia baseada no comprimento de arco e, em seguida, o referencial teórico do



modelo linear proposto em Brandão & Soares de Mello (2014). Na seção 3, estuda-se a topologia do modelo linear, e, na seção 4, são comparadas as características básicas das duas topologias da suavização. Por fim, são apresentadas as considerações finais deste trabalho.

2. Referencial Teórico

Esta seção apresenta um referencial teórico dos modelos de suavização existentes na literatura. Ressalte-se que não serão analisados os modelos que também utilizam fronteiras continuamente diferenciáveis, porém no contexto de redistribuição de recursos, como Avellar *et al.* (2007), Milioni *et al.* (2011) e Silveira *et al.* (2011). A primeira subseção apresenta o referencial teórico para os modelos de suavização baseados na topologia do comprimento de arco e a segunda subseção, para o modelo linear da suavização.

2.1. Suavização da Fronteira DEA – Modelos Baseados no Comprimento de Arco

A fronteira suavizada deve ser o mais próximo possível da fronteira original. Entretanto, não seria adequado utilizar métricas tradicionais para medir a distância entre as fronteiras, como a métrica Euclidiana (generalizada) ou a métrica de Tchebychev, porque as mesmas desconsiderariam as derivadas das fronteiras. Em outras palavras, uma função poderia estar próxima à fronteira original, de acordo com essas métricas tradicionais, mas apresentar derivadas muito distintas, como ilustrado na Figura 1 (SOARES DE MELLO *et al.*, 2002).

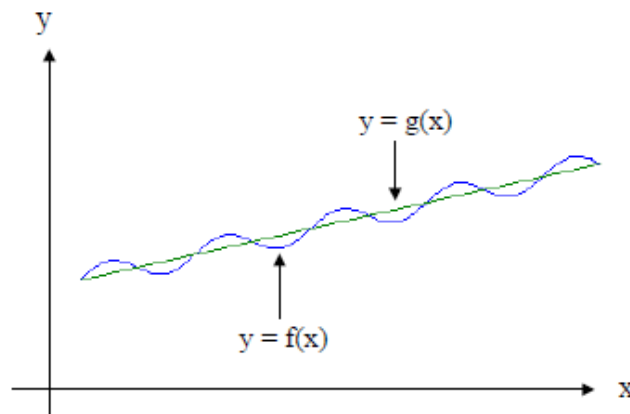


Figura 1 – Funções próximas com derivadas distantes (SOARES DE MELLO *et al.*, 2002)

Para resolver essa questão, Soares de Mello (2002) propuseram a comparação dos comprimentos de arco das funções (ou suas generalizações multidimensionais) para avaliar a sua proximidade, considerando, assim, tanto os valores das funções quanto os de suas derivadas. Como a fronteira original é composta por segmentos contínuos de reta e como a reta apresenta o menor comprimento de arco entre dois pontos, basta minimizar o comprimento de arco da fronteira suavizada para aproximá-la à fronteira original.

Entretanto, existem funções distintas que apresentam o mesmo comprimento de arco. Diz-se, portanto, que a diferença de comprimento de arco não gera uma métrica d , uma vez que não satisfaz a primeira propriedade $d(a, b) = 0$ sss $a = b$; porém, gera uma pseudo-métrica, uma vez que satisfaz todas as demais propriedades. Por isso, não se deve falar em distância entre duas fronteiras, de acordo com essa topologia, mas apenas em proximidade, ou pertinência a uma vizinhança (D'AMBROSIO, 1977).

Mais especificamente, existem funções distintas com as mesmas condições de contorno que apresentam o mesmo comprimento de arco, como ilustrado na Figura 2 (SOARES DE MELLO *et al.*, 2002). Em outras palavras, não é possível definir uma vizinhança de uma função em que não exista a outra e, por isso, diz-se que o espaço das funções com a topologia do comprimento de arco não respeita a propriedade de separação de Hausdorff (HAUSDORFF, 1949). Nesses espaços, não é possível distinguir elementos apenas por suas propriedades topológicas, sendo necessárias restrições adicionais ao problema de minimização de arco, de forma a evitar soluções indesejáveis.

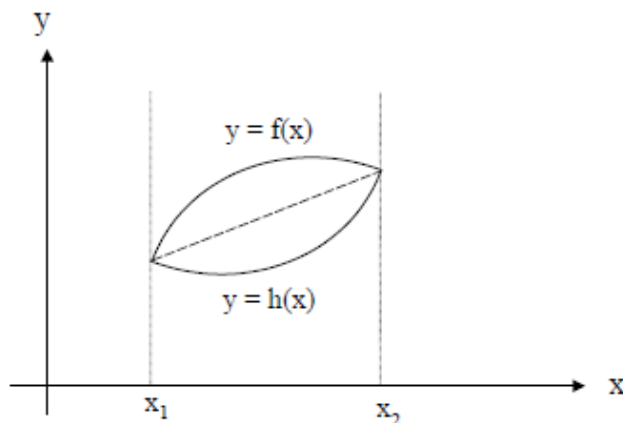


Figura 2 – Funções com o mesmo comprimento de arco (SOARES DE MELLO *et al.*, 2002)

Assim, a formulação geral do problema de suavização de um único *output* proposto por Soares de Mello *et al.* (2002) é apresentada em (1), em que L é o comprimento de arco da fronteira suavizada $F(\bar{X}_j)$. O integrando foi elevado ao quadrado, por facilidade computacional, sem alterar o resultado. Verifica-se que as restrições do modelo (1) garantem que as DMUs eficientes no modelo clássico se mantenham eficientes no modelo suavizado. Este problema deve ser resolvido com as condições de contorno adequadas, relacionadas às propriedades de cada modelo clássico.

$$\text{Min } L = \int_S \left[1 + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \right] dS$$

sujeito a (1)

$$F(\bar{X}_j) = \text{output}(\bar{X}_j), \quad \forall \bar{X}_j \in E = \{ \bar{X} : \bar{X} \text{ é DMU Pareto Eficiente} \}$$

$$\forall \bar{X}_j \exists \frac{\partial F}{\partial x_i} \bar{X} = \bar{X}_j$$

A função objetivo é um funcional, isto é, uma “função de funções”, que busca a função com menor L . Essa busca é feita em uma “família” de funções, chamadas funções aproximantes, as quais se restringem a funções polinomiais, nos modelos de suavização da literatura. Essas funções permitem boas aproximações e reduzem a complexidade do modelo. Em especial, vale ressaltar que para a suavização da fronteira BCC o Teorema da Inexistência de Solução Ótima (SOARES DE MELLO *et al.*, 2002) demonstra que, dada uma função, sempre é possível determinar uma melhor aproximação, o que também justifica a utilização de apenas funções polinomiais, de grau previamente definido, como aproximantes.

O primeiro modelo proposto por Soares de Mello *et al.* (2002) para o caso bidimensional, utilizava como função aproximante um polinômio de segundo grau para cada faceta da fronteira, garantindo que as derivadas fossem contínuas em todos os pontos. Entretanto, para maiores dimensões, o problema de “suavização por partes” se tornaria extremamente complexo. Assim, os trabalhos posteriores (SOARES DE MELLO *et al.*, 2004; NACIF *et al.*, 2009; PEREIRA *et al.*, 2015; BRANDÃO & SOARES DE MELLO, 2017) utilizaram uma única função aproximante para toda a fronteira, qual seja um polinômio de grau previamente definido, com base no número de DMUs na fronteira original. Ressalte-se que Gomes *et al.* (2004) aplicaram o modelo de suavização tridimensional, com função aproximante única, para estender os modelos DEA com Ganhos de Soma Zero. Entretanto, todos esses modelos são problemas de programação quadrática, baseados na mesma topologia de comprimento de arco.

2.2 O Modelo Linear para a Suavização

Brandão & Soares de Mello (2014) propuseram uma nova maneira de se calcular a



fronteira suavizada, de forma que o PPS seguisse o princípio clássico de Banker *et al.* (1984) da extrapolação mínima, isto é, fosse o menor que as restrições permitissem. Para isso os autores desenvolveram uma nova função objetivo para o problema de suavização da fronteira, em que um único *output* Z é função de múltiplos *inputs* x_1, \dots, x_n , minimizando a área (ou sua generalização multidimensional) sob a fronteira $Z = F(x_1, \dots, x_n)$, como em (2).

$$\text{Min} \left\{ \int_R F(x_1, \dots, x_n) dR \right\} \quad (2)$$

Nesse trabalho, foi verificado que a função objetivo proposta era linear em função das variáveis de decisão, quais sejam os coeficientes do polinômio que descreve a fronteira. Como são lineares as restrições, as quais não foram alteradas nesse trabalho, o modelo proposto é um modelo linear.

Ressalte-se que os autores recomendaram o uso dessa nova função objetivo para os modelos com uma única função aproximante para toda a fronteira. Isso porque o modelo de “suavização por partes”, em que a função era definida com seus dois extremos fixos, minimizar o seu comprimento de arco também implicava em minimizar a região de possibilidade de produção.

É possível utilizar a mesma forma de calcular a fronteira para os demais problemas de suavização. Nos casos em que um *input* X é função de múltiplos *outputs* z_1, \dots, z_m e a fronteira é dada por $X = H(z_1, \dots, z_m)$, a função objetivo do problema é dada por (3).

$$\text{Min} \left\{ - \int_R H(z_1, \dots, z_m) dR \right\} \quad (3)$$

Ressalte-se que a inversão do sinal é necessária porque a região de possibilidade de produção, a ser minimizada, está acima da fronteira suavizada, como ilustrado na figura 3. Por isso, deve-se maximizar a integral da função da fronteira (ou minimizar o seu inverso).

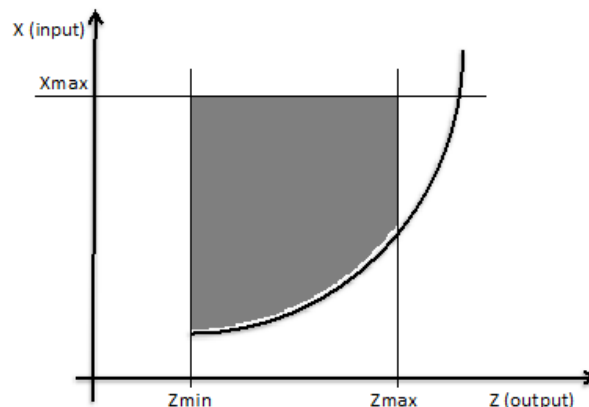


Figura 3 – Ilustração da região de possibilidade de produção para a fronteira $X = H(z)$

Nos casos em que há múltiplos *inputs* x_1, \dots, x_n e múltiplos *outputs* z_1, \dots, z_m e a fronteira é definida pela curva de nível $U(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_m) = F(x_1 \dots x_n) - H(z_1 \dots z_m)$ (NACIF *et al.*, 2009; PEREIRA *et al.*, 2015), a função objetivo é dada por (4), em linha com as funções objetivo (2) e (3), dos casos anteriores.

$$\text{Min} \left\{ \int_R U(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_m) dR = \int_R F(x_1, \dots, x_n) dR - \int_R H(z_1, \dots, z_m) dR \right\} \quad (4)$$

Vale ressaltar que a mudança da função objetivo altera a demonstração do Teorema da Inexistência de Solução Ótima para o modelo BCC, mas não o seu resultado prático (BRANDÃO & SOARES DE MELLO, 2014). Em outras palavras, dada uma função, é sempre possível determinar outra que mais se aproxima da fronteira original.

3. Estudos sobre a topologia do Modelo Linear

Ao propor uma nova maneira de se encontrar a fronteira suavizada, Brandão & Soares de Mello (2014) propuseram implicitamente uma nova forma de se avaliar a proximidade das



fronteiras. A fronteira suave mais próxima da fronteira original não seria mais aquela com o comprimento de arco (ou generalização multidimensional) mais similar, mas sim aquela que delimitaria uma área (ou generalização multidimensional) mais similar. Em outras palavras, os autores propuseram uma nova topologia para a suavização.

Propõe-se, portanto, outra função para substituir a pseudo-métrica do comprimento de arco nos problemas de suavização, apresentada em (5), definida sobre um conjunto X de funções, em que $f_1, f_2 \in X$. Sendo X um conjunto de funções contínuas, condição satisfeita tanto pelas funções aproximantes do problema de suavização (i.e., polinômios), quanto pela fronteira original, verifica-se que a função d satisfaz todas as condições necessárias de métrica (LIMA, 2013), induzida pela norma $\| \cdot \|_1$, em que $\|f\|_1 = \int_R |f(\vec{X})| dR$.

$$d(f_1, f_2) = \int_R |f_1(\vec{X}) - f_2(\vec{X})| dR \quad (5)$$

Para medir a distância entre a fronteira original f_o e a fronteira suavizada f_s , pode-se simplificar a equação (5), uma vez que $f_o \leq f_s$ no intervalo R considerado. Essa relação é sempre verdadeira porque a fronteira f_s , da forma $Z = F(x_1 \dots x_n)$, é uma função $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{R}$ côncava em todo o intervalo observado, tendo em vista as restrições do modelo (BRANDÃO & SOARES DE MELLO, 2017), em que $\mathcal{F} \subset \mathfrak{R}^n$ é um conjunto convexo. Assim, por definição, para todo $u, v \in \mathcal{F}$ e $0 \leq t \leq 1$, tem-se (6) (SIMON & BLUME, 1994).

$$tf(u) + (1 - t)f(v) \leq f(tu + (1 - t)v) \quad (6)$$

Em outras palavras, para quaisquer dois pontos da curva, o segmento que os une está sempre abaixo da curva. Como a fronteira original f_o é formada por segmentos de reta unindo as DMUs extremo-eficientes, e a fronteira suavizada f_s passa por esses mesmos pontos (ou acima, para os modelos propostos por BRANDÃO & SOARES DE MELLO, 2017), tem-se $f_o \leq f_s, \forall f_s$ que atende às restrições do problema de suavização. Consequentemente, tem-se $(f_s - f_o) \geq 0$, o que possibilita a remoção do módulo da equação (5), como em (7).

$$d(f_s, f_o) = \int_R (f_s(\vec{X}) - f_o(\vec{X})) dR \quad (7)$$

Além disso, como $f_o \leq f_s$, para minimizar $d(f_s, f_o)$, basta minimizar $\int_R f_s(\vec{X}) dR$, qual seja, a função objetivo indicada em (2), proposta em Brandão & Soares de Mello (2014).

Em relação aos problemas de suavização em que um *input* X é função de múltiplos *outputs* z_1, \dots, z_m e a fronteira h_s é da forma por $X = H(z_1, \dots, z_m)$, a função original h_o também define o menor conjunto de possibilidade de produção, mas nesse caso $h_o \geq h_s$. Isso porque a fronteira h_s é uma função $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{R}$ convexa em todo o intervalo observado (i.e., $-h$ é função côncava), tendo em vista as restrições do modelo (BRANDÃO & SOARES DE MELLO, 2017), em que $\mathcal{F} \subset \mathfrak{R}^n$ é um conjunto convexo. Assim, por definição, tem-se uma relação análoga àquela definida em (6), porém com o sinal de desigualdade invertido.

Consequentemente, a fronteira suavizada está sempre abaixo da fronteira original nesses casos. Assim, $(h_o - h_s) \geq 0$ e $d(h_o, h_s) = \int_R (h_o - h_s) dR$. Além disso, sendo $h_o \geq h_s$, para minimizar $d(h_o, h_s)$, basta maximizar $\int_R h_s(\vec{X}) dR$ ou minimizar $-\int_R h_s(\vec{X}) dR$, qual seja, a função objetivo (3).

De maneira análoga, é possível verificar que a função objetivo (4) minimiza a distância, definida em (5), entre a fronteira suavizada e a fronteira original para o caso multidimensional.

Ressalte-se que, embora a topologia do modelo linear seja uma métrica, enquanto a topologia do modelo clássico seja apenas uma pseudo-métrica, ainda assim, ambas permanecem relevantes, pois se fundamentam em formas diferentes de avaliar a aproximação das fronteiras, como será explicado na próxima seção.

4. Comparações entre as Topologias da Suavização

A topologia da suavização proposta em Brandão & Soares de Mello (2014) se baseia em



pressupostos distintos daqueles presentes na topologia tradicional. Enquanto a topologia tradicional busca aproximar o formato da fronteira suavizada à fronteira original, a topologia do modelo linear busca a aproximação dos conjuntos de possibilidade de produção, conforme explicado a seguir.

A topologia do comprimento de arco leva em consideração tanto a posição da fronteira, quanto a sua derivada (SOARES DE MELLO, 2002), conforme exposto na seção 2.1. De fato, o funcional baseado nessa topologia encontra, considerando as restrições do problema da suavização, uma função cujo formato se aproxima do formato linear por partes da fronteira original, uma vez que o mesmo apresenta o menor comprimento de arco (ou generalização multidimensional). Consequentemente, as derivadas nos pontos também tendem a se aproximar daquelas da fronteira original. Ressalte-se que essas derivadas são fundamentais para o cálculo dos multiplicadores.

Por outro lado, a topologia baseada na área (ou generalização multidimensional) busca a fronteira suavizada que define um PPS mais próximo do original, isto é, o menor que as restrições permitem. Consequentemente, as eficiências das DMUs tendem a apresentar uma média de valores mais próxima da original e, portanto, mais elevada do que outras fronteiras, o que será explicado a seguir.

Primeiramente, vale lembrar que a eficiência de cada DMU é calculada com base na sua distância à fronteira, tanto no modelo DEA clássico, quanto nos modelos suavizados. No caso bidimensional, por exemplo, a eficiência orientada a *output* de uma DMU é $Ef_{out} = \frac{y_0}{y_{0f}}$, sendo y_0 o valor do seu *output* observado e y_{0f} o valor do seu alvo orientado a *output*, i.e., no caso da fronteira suavizada $y_{0f} = F(x_0)$, em que x_0 é o valor do *input* observado da DMU. Analogamente, a eficiência orientada a *input* da DMU é $Ef_{in} = \frac{x_{0f}}{x_0}$, sendo x_{0f} o valor do seu alvo orientado a *input*, i.e., no caso da fronteira suavizada $y_0 = F(x_{0f})$. Assim, quanto menor for $\int_R F(x) dR$, i.e., o PPS da fronteira suavizada, maior serão $Ef_{out} = \frac{y_0}{F(x_0)}$ e $Ef_{in} = \frac{x_{0f}}{x_0}$.

Como se minimiza todo o PPS da fronteira suavizada, as eficiências do referido conjunto são maximizadas como um todo. Dessa forma, desde que compensadas por outras regiões do PPS, existe a possibilidade de que certa região do PPS da fronteira encontrada, com base na topologia da área, seja maior do que o PPS de outra fronteira para essa região, resultando em valores de eficiência menores para as DMUs nessa região.

Consequentemente, considerando que não se sabe onde as DMUs ineficientes (abaixo da fronteira) estão localizadas, não é possível afirmar que a média das eficiências das DMUs será sempre maior para as fronteiras encontradas com base na topologia da área. Caso as DMUs ineficientes estejam concentradas em uma região, em que o PPS da fronteira encontrada é maior que o de outras fronteiras, a eficiência média das DMUs desse problema poderá ser menor para a fronteira baseada na topologia da área. Por outro lado, é comum que as DMUs estejam razoavelmente distribuídas pelo intervalo observado, de modo que a fronteira encontrada com base na topologia da área resulte, de maneira geral, em maiores valores de eficiência (portanto, mais próximos dos valores originais) para as DMUs.

Para ilustrar essa explicação, o gráfico da Figura 4 apresenta, para um problema bidimensional, a fronteira original em azul, a fronteira encontrada com base na topologia da área, em preto, e a fronteira encontrada com base na topologia do comprimento de arco, em cinza claro.

Ressalte-se que nesse problema, foram utilizadas as restrições do modelo de suavização proposto em Brandão & Soares de Mello (2017), para corrigir o problema da fronteira BCC chamado eficiência por *default* (GOMES *et al.*, 2012). Devido a esse problema, as DMUs com os menores *inputs* e as DMUs com os maiores *outputs* são sempre consideradas eficientes no modelo BCC (ALI, 1993) – outros problemas do BCC são tratados em Soares de Mello *et al.* (2013). Para corrigir as eficientes por *default*, foram relaxadas as restrições associadas a essas DMUs, no caso a DMU A e a DMU E, i.e., a fronteira suavizada pode contê-las ou passar acima delas. Em outras palavras, segundo esses autores, não é necessário que a fronteira suavizada contenha, ou mesmo esteja próxima a, essas DMUs eficientes por *default*. Isso porque tais DMUs podem não ser de fato eficientes, sendo sua eficiência no modelo clássico consequência apenas de um problema do BCC.



Observa-se que a região *i* indicada em cinza na Figura 4 é uma região do PPS da fronteira baseada na área que não existe para a fronteira baseada no comprimento de arco. Consequentemente, as DMUs D e E apresentam eficiências orientadas a *output* menores para a fronteira baseada na área, assim como a eficiência da DMU E orientada a *input*. Por outro lado, a região *ii* indicada em amarelo é uma região do PPS da fronteira baseada no comprimento de arco que não existe para a fronteira baseada na área. Consequentemente, as eficiências da DMU A, em ambas as orientações, e as eficiências orientadas a *input* das DMUs C e D são maiores para a fronteira baseada na área.

Acrescenta-se que a região *ii* é maior do que a região *i*, de modo que, no geral, o PPS da fronteira baseada na área é menor do que o PPS da fronteira baseada no comprimento de arco. De fato, a área no intervalo [2,4] sob a fronteira baseada na área é 7,38 e sob a fronteira baseada no comprimento de arco, 7,92. Além disso, a média das eficiências das DMUs é maior para a fronteira baseada na área, em ambas as orientações (82% contra 73% com orientação a *output* e 87% contra 58% com orientação a *input*). Entretanto, caso houvesse uma concentração particular de DMUs no intervalo $x \in [3,4]$ e $y \in [4;4,5]$, i.e., entre B e E, o que não modificaria os problemas de suavização, a fronteira baseada na área apresentaria valores médios de eficiência menores do que a fronteira baseada no comprimento de arco, em ambas as orientações.

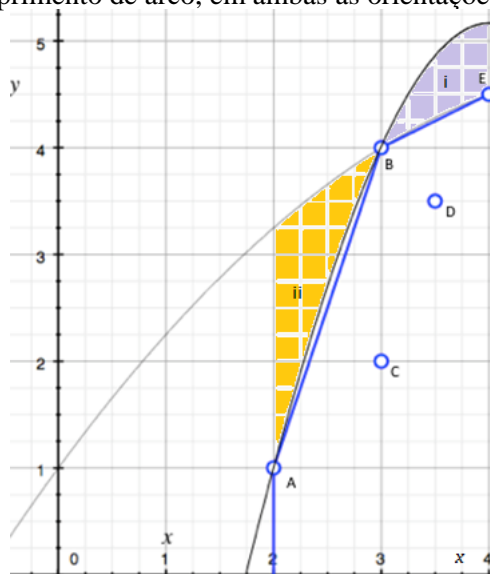


Figura 4 – Ilustração das diferenças entre os PPS de fronteiras distintas

Ressalte-se que, nos problemas de suavização em que o *output* é uma função dos *inputs*, o intervalo de integração, no caso [2,4], é uma aproximação quando se utiliza orientação a *input*. Essa situação está bastante clara no exemplo da Figura 4, em que as DMUs A e C são projetadas em uma região significativamente fora do intervalo [2,4] para a fronteira cinza (baseada no comprimento de arco). Consequentemente, o PPS total dessa fronteira, i.e., no intervalo [0,4], é ainda maior que o PPS da fronteira baseada na área, que se mantém no intervalo [2,4].

Esse problema também ocorre nos problemas de suavização em que o *input* é uma função dos *outputs* quando se utiliza orientação a *output*. Entretanto, a literatura considera que as distorções não são muito significativas e não apresenta solução para esse problema.

4.1 Análises das Topologias quanto às Restrições

Outra distinção importante entre as duas topologias, comentada ao longo das seções anteriores, é que o comprimento de arco (e sua generalização multidimensional) gera uma pseudo-métrica, enquanto a área (e sua generalização multidimensional) gera uma métrica, ou seja, respeita também a propriedade $d(a, b) = 0$ sss $a = b$, independente das restrições do modelo.

Por outro lado, a topologia baseada na área (e sua generalização multidimensional) não impede soluções com derivadas muito distantes, como indicado na Figura 1 (SOARES DE MELLO *et al.*, 2002). Dessa forma, apesar de ser métrica, essa topologia também depende das restrições



adicionais do modelo de suavização, a fim de evitar soluções indesejáveis.

Ressalte-se, entretanto, que a fronteira baseada no comprimento de arco é mais dependente das restrições de igualdade associadas às DMUs extremo-eficientes do que a fronteira baseada na área. Ao minimizar o comprimento de arco (ou sua generalização), a fronteira se aproximará a uma reta, a menos que seja obrigada a passar por pontos fixos (correspondentes às DMUs extremo-eficientes), motivo pelo qual a fronteira se aproximará à fronteira original.

Por outro lado, a fronteira baseada na área define o menor PPS que as restrições permitem. Assim, se certas restrições de igualdade forem relaxadas, como proposto em Brandão & Soares de Mello (2017), a fronteira baseada nessa topologia se altera apenas se essa mudança resultar em um PPS menor. Consequentemente, nessa topologia, a fronteira é menos sensível ao relaxamento das restrições de igualdade.

5. Considerações Finais

O modelo de suavização proposto em Brandão & Soares de Mello (2014) desenvolveu uma nova função objetivo para os problemas de suavização, baseada na área da fronteira (ou generalização multidimensional), em substituição à função objetivo baseada no comprimento de arco da fronteira (ou generalização multidimensional), utilizada nos demais modelos de suavização. O modelo proposto, fundamentado no princípio de Banker *et al.* (1984), é linear, e não quadrático como os demais, e apresentou resultados práticos interessantes.

Entretanto, a alteração proposta teve implicações teóricas que não haviam sido estudadas. Por isso, este trabalho estudou, primeiramente, a topologia do modelo linear. Nessa primeira etapa, foi demonstrado que a nova topologia é induzida pela métrica $d(f_1, f_2) = \int_R |f_1 - f_2| dR$. Esse resultado é especialmente relevante, uma vez que a topologia tradicional da suavização não é induzida por uma métrica, mas sim, por uma pseudo-métrica.

Em seguida, foram estudadas as diferenças e similaridades entre as topologias da suavização e suas características. Foi verificado que a topologia tradicional se concentra, em especial, nas derivadas das funções e, conseqüentemente, no formato das fronteiras. Por outro lado, a topologia do modelo linear busca a aproximação das fronteiras, utilizando os seus PPS como referencial. Portanto, o uso de uma ou outra topologia depende dos objetivos do decisor para os resultados da suavização da fronteira DEA.

Por fim, verificou-se que, apesar de ser baseado em uma métrica, o modelo linear também depende de restrições adicionais ao problema, assim como os modelos baseados na pseudo-métrica tradicional. Isso porque a métrica utilizada no modelo linear não leva em consideração as derivadas das funções, sendo as restrições fundamentais para evitar soluções indesejadas. Por outro lado, observou-se que o modelo linear é menos sensível ao relaxamento das restrições de igualdade, associadas às DMUs extremo-eficientes, proposto em Brandão & Soares de Mello (2017) para corrigir as DMUs eficientes por *default*. Portanto, sugere-se o uso da topologia do modelo linear para esses modelos.

Estudos futuros devem estudar outras características teóricas do modelo linear, como, possivelmente, a unicidade de solução ótima. Outros trabalhos podem também analisar o comportamento dos dois funcionais nos diversos modelos de suavização da fronteira DEA propostos na literatura.

6. Agradecimentos

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

- Avellar, J.V.G., Milioni, A.Z., Rabello, T.N.** (2007), Spherical Frontier DEA Model based on a Constant Sum of Inputs, *Journal of the Operational Research Society*, 58, 1246-1251.
- Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W.** (1984) Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, 30, 1078-1092.
- Brandão & Soares de Mello** (2014) Smooth Data Envelopment Analysis – A New Model, *Anais*



do XLVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Salvador/BA, 921-931.

Brandão & Soares de Mello (2017). Improvements to Smooth Data Envelopment Analysis, *RAIRO – Operations Research*, 51(1), 157-171.

Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978), Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.

Chilingerian, J.A. (1995), Evaluating physician efficiency in hospitals: a multivariate analysis of best practices, *European Journal of Operational Research*, 80, 548-574.

Coelli, T., R.A.O., D.S.P., Battese, G.E. (1998), *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, Boston, Kluwer Academic Publishers.

Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K. (2000), *Data Envelopment Analysis – A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Boston, Kluwer Academic Publishers.

D'Ambrosio, U. (1977) *Métodos da Topologia – Introdução e Aplicações*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro.

Gomes, E.G., Abreu, U.G.P., Soares de Mello, J.C.C.B., Carvalho, T.B., Zen, S. (2012), DEA performance evaluation of livestock systems in Brazil. In: V. Charles; M. Kumar. (Org.). *Data Envelopment Analysis and Its Applications to Management*. 1ed. Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing, 224-238.

Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B., Lins, M.P.E. (2004), Redistribuição de Inputs e Outputs em Modelos de Análise de Envoltória de Dados com Ganhos de Soma Zero, *Pesquisa Operacional*, 24, 269-284.

Hausdorff, F. (1949) *Grundzüge der Mengenlehre*, Chelsea Publishing Company, New York.

Lima, E. (2013) *Espaços Métricos*, Coleção Projeto Euclides 5ª ed., IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

Milioni, A. Z., Avellar, J.V.G., Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. (2011), An Ellipsoidal Frontier Model: allocating input via parametric DEA, *European Journal of Operational Research*, 209, 113-121.

Nacif, F.B., Soares de Mello, J.C.C.B., Angulo Meza, L. (2009), Choosing Weights in Optimal Solutions for DEA-BCC Models by means of a N-dimensional Smooth Frontier, *Pesquisa Operacional*, 29, 623-642.

Pereira, E.R., Soares de Mello, J.C.C.B. (2015). Uso da suavização da fronteira na determinação de pesos únicos em modelos DEA CCR. *Production*, 25(3), 585-597.

Silveira, J.Q., Soares de Mello, J.C.C.B., Angulo Meza, L. (2011) Fronteira parabólica baseada na soma constante de inputs: Um estudo de ecoeficiência. *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Ubatuba, Anais.

Simon, C., Blume, L. (1994) *Mathematics for Economists*. W.W. Norton Company, New York.

Soares de Mello, J.C.C.B. (2002), *Suavização da Fronteira DEA com o uso de Métodos Variacionais*, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Soares de Mello, J.C.C.B., Angulo Meza, L., Silveira, J.Q., Gomes, E.G. (2013), About Negative Efficiencies in Cross Evaluation BCC Input Oriented Models, *European Journal of Operational Research*, 229, 732-737.

Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Biondi Neto, L., Lins, M. P. (2004), Suavização da Fronteira DEA: O Caso BCC Tridimensional, *Investigação Operacional*, 24, 89-107.

Soares de Mello, J.C.C.B., Lins, M.P.E, Gomes, E.G. (2002), Construction of a Smoothed DEA Frontier, *Pesquisa Operacional*, 22, 183-201.

Thanassoulis, E. (1993), A comparison of regression analysis and data envelopment analysis as alternative methods of performance assessment, *Journal of the Operational Research Society*, 44(11), 1129-1144.