



## **Uma breve análise de formulações para o problema integrado de dimensionamento de lotes e *scheduling* em máquinas paralelas com *setup* não triangular**

**Desiree Maldonado Carvalho**

Instituto de Ciência e Tecnologia – Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)  
Av. Cesare Monsueto Giulio Lattes, 1201 - Eugênio de Melo, São José dos Campos - SP - Brasil  
dmcarvalho@unifesp.br

**Mariá Cristina Vasconcelos Nascimento**

Instituto de Ciência e Tecnologia – Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)  
Av. Cesare Monsueto Giulio Lattes, 1201 - Eugênio de Melo, São José dos Campos - SP - Brasil  
mcv.nascimento@unifesp.br

### **RESUMO**

Desafios decorrentes do contínuo desenvolvimento no setor industrial e avanços tecnológicos justificam a necessidade de novos *insights* sobre planejamento de produção. Em particular, o problema integrado de dimensionamento de lotes e *scheduling* (PIDLS) é um problema computacionalmente desafiador que consiste em decidir o número de lotes a serem produzidos e o *scheduling* das tarefas envolvidas no processo de produção dos lotes. Considerar o problema integrado ao invés de tratá-lo separadamente acarreta em melhores decisões, porém, não é uma tarefa simples. Apesar de bastante estudado, poucos se preocupam em investigar o comportamento dos modelos existentes antes de aplicá-los em um estudo. Tendo isso em mente que, neste artigo, é apresentado um conjunto de formulações para o PIDLS capacitado em máquinas paralelas com *setup carry-over*, sequência dependente e *setups* não triangulares. A análise é realizada com modelos encontrados na literatura para o PIDLS em uma única máquina, adaptados aqui para máquinas paralelas.

**PALAVRAS CHAVE.** Dimensionamento de lotes, *Scheduling*, *Setup* não triangular.

**Tópicos:** OC - Otimização Combinatória

### **ABSTRACT**

Challenges resulting from the continuous development and advance of technologies ensure the importance of new understandings in the production planning. In particular, the integrated lot sizing and scheduling problem (ILSSP) is a computationally challenging problem that consists in deciding both the number of lots to be produced and the scheduling of the tasks involved in the production of lots. Considering the integrated problem rather than lot sizing and scheduling separately provides a better decision making, however it is not an easy task. In spite of being widely investigated, few studies take into consideration the analysis of existing formulations before using them. Bearing this in mind that, in this paper, we present a set of formulations for the capacitated ILSSP in parallel machine with setup carry-over, sequence-dependent and non-triangular setups. In this study, we investigate the performance of the primary models found in the literature for the ILSSP adapted to tackle this variant.

**KEYWORDS.** Lot sizing, Scheduling, Non-triangular setup.

**Paper topics:** OC - Otimização Combinatória



## Introdução

Se manter competitivo dentro do setor industrial requer um maior comprometimento por parte das empresas de manufatura em encontrar estratégias eficientes para definir tarefas importantes como, por exemplo, o planejamento de produção da empresa. O planejamento da produção visa decidir a melhor forma para a utilização dos recursos disponíveis por uma empresa para que seus objetivos de longo, médio e curto prazo sejam atingidos. As decisões de longo prazo pertencem ao nível estratégico, quando são definidas as metas globais da empresa. O planejamento tático é responsável pela utilização eficiente dos recursos disponíveis, a fim de cumprir os objetivos determinados no planejamento estratégico. Nesta etapa, devem ser tomadas as decisões de médio prazo. O último nível de planejamento é o operacional, que está relacionado ao dia-a-dia da empresa, quando são tomadas as decisões de curto prazo.

Para definir o planejamento de produção de diversos cenários reais precisa-se decidir a respeito da quantidade de lotes que deve ser produzida (dimensionamento de lotes) como também o planejamento e sequenciamento das tarefas realizadas para a produção dos mesmos (*scheduling*) [de Araujo et al., 2007; Marinelli et al., 2007; Ferreira et al., 2009; Boonmee e Sethanan, 2016]. Uma maneira de definir um planejamento é considerando o dimensionamento de lotes e o *scheduling* de forma sincronizada (integrada) [Guimarães et al., 2014]. Essa não é uma tarefa trivial e pode ser explorada por meio do estudo do problema integrado de dimensionamento de lotes e *scheduling* (PIDLS). Um PIDLS clássico tem como objetivo definir um plano de produção que minimize o custo ou tempo total referente ao processo de produção em um horizonte de planejamento finito.

A dificuldade e a necessidade de resolver esse problema despertou o interesse dos pesquisadores e empresas para estudos que buscam novas abordagens que ajudem a encontrar soluções para o PIDLS de forma eficiente e a um baixo custo operacional. Apesar de bastante estudado, muitos trabalhos abordam o estudo de casos específicos, sem levar em consideração a modelagem utilizada, e pouco é feito em relação aos modelos mais genéricos [Clark et al., 2011; Guimarães et al., 2014].

Guimarães et al. [2014] destacam a falta de interesse em analisar quais os melhores métodos gerais para resolver as diversas variantes do PIDLS. E, tendo isso em mente, realizam a comparação dos principais métodos existentes para cada classe de problema, definida pelos próprios autores. Além disso, propõem uma nova modelagem para uma das classes de problemas, em que são considerados longos períodos de produção (*big buckets*), custo/tempo de *setup* da máquina não triangular<sup>1</sup> e *setup carry-over*<sup>2</sup> que vem a ser a melhor modelagem para essa classe. Os autores concluem chamando a atenção para o estudo de extensões dos modelos analisados para o problema de máquinas paralelas.

Tendo isso em mente, o foco deste artigo é analisar as principais modelagens apresentadas por Guimarães et al. [2014] adaptadas para o problema integrado de dimensionamento de lotes e *scheduling* (PIDLS) em máquinas paralelas com capacidade de produção limitada. Considerando o *setup carry-over* da máquina e o *setup* não triangular de custo/tempo na preparação de máquina. O objetivo do PIDLS é definir para cada máquina quando e quanto de cada tipo de item deve ser produzido de modo que os custos de preparação e estoque sejam minimizados, respeitando os recursos disponíveis e atendendo as demandas previamente definidas para cada tipo de item e período.

Para fins de testes computacionais é utilizado parte do conjunto de instâncias de [James e Almada-Lobo, 2011]. Como as instâncias de [James e Almada-Lobo, 2011] são para o problema

<sup>1</sup>Para evitar contaminação durante o processo de mudança da produção de um item  $i$  para um item  $j$  e reduzir o custo e o tempo de operações de limpeza utiliza-se um item  $l$  que absorva a contaminação durante seu processo de produção, em outras palavras, a desigualdade triangular  $s_{ik} + s_{kj} \geq s_{ij}$ , em que  $s_{ij}$  é o custo/tempo de preparação necessário para deixar de produzir o item  $i$  e passar a produzir o item  $j$ , não é satisfeita.

<sup>2</sup>Se o mesmo tipo de item é produzido ao final de um período e começo do período seguinte, então não é necessário realizar novamente a preparação da máquina para a produção desse item.



com *setup* triangular as devidas alterações são realizadas conforme proposto em [Guimarães et al., 2014].

O artigo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 é apresentada uma revisão bibliográfica acerca do PIDLS. Na Seção 3 a formulação clássica para abordar o PIDLS é descrita assim como as formulações adaptadas da literatura para a análise proposta neste artigo. Na Seção 4 os modelos apresentados são comparados para uma análise de seus desempenhos em com base no conjunto de instâncias gerado. Por fim, considerações finais e agradecimentos são apresentados nas Seções 5 e 6, respectivamente.

### **Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e *Scheduling***

Um problema de dimensionamento de lotes visa definir, em um horizonte de planejamento finito, quanto e quando produzir de um dado item em uma linha de produção de forma a satisfazer sua demanda previamente estabelecida, respeitando os recursos disponíveis e o possível limite de capacidade da máquina para produção em cada período do horizonte de planejamento. Um problema de *scheduling*, por outro lado, garante que durante o processo de produção não existam conflitos na produção de itens que compartilham de recursos para sua produção, como máquina e matéria-prima, por meio do sequenciamento das operações que devem ser realizadas, tais como preparação de máquina e produção dos itens [Drexl e Kimms, 1997].

O planejamento de uma empresa que envolve os dois problemas pode ser feito considerando-os separadamente [Karimi et al., 2003; Buschkühl et al., 2010]. Porém, se integrados em um único problema, esse pode garantir um melhor planejamento de produção. Nesse sentido que o objetivo do PIDLS pode variar entre definir um plano de produção que minimize os custos totais envolvidos no processo de produção de forma a atender as demandas dos produtos, respeitando os recursos disponíveis, como também minimizar o *makespan* de produção. Na literatura, algumas boas revisões para o problema integrado de dimensionamento de lotes e *scheduling* podem ser encontradas em [Drexl e Kimms, 1997; Zhu e Wilhelm, 2006; Jans e Degraeve, 2008; Clark et al., 2011; Guimarães et al., 2014].

Drexl e Kimms [1997] apresentam seis variantes do PIDLS em uma máquina: o lote econômico de produção (*economic lot scheduling* - ELS) em que o horizonte de planejamento considerado é infinito; o dimensionamento de lotes com capacidade de produção limitada (*capacitated lot sizing* - CLS), em que para cada período são definidos os itens a serem produzidos naquele momento para então realizar seus respectivos sequenciamentos de tarefas; o dimensionamento de lotes discreto (*discrete lot sizing and scheduling* - DLS) e *scheduling*, em que são definidos períodos capazes de produzir um único tipo de item utilizando toda a capacidade disponível para aquele período; o dimensionamento de lotes contínuo e *scheduling* (*continuous setup lot sizing and scheduling* - CSLS) que é semelhante ao DLS, diferenciando-se por não ser obrigatória a utilização da capacidade total disponível por período; o dimensionamento de lotes proporcional e *scheduling* (*proportional lot sizing and scheduling* - PLS), que elimina a obrigatoriedade de usar toda a capacidade do período para produzir um único tipo item permitindo que a capacidade excedente possa ser utilizada na produção de um segundo tipo de item; e, por fim, o dimensionamento de lotes geral e *scheduling* (*general lot sizing and scheduling* - GLS), que define um limitante para a quantidade de lotes produzidos por período. Além disso, os autores discorrem sobre o PLS com múltiplos níveis de produção e afirmam que métodos de solução para esse problema seriam grandes candidatos para substituir o método *Manufacturing Resource Planning II* (MRPII) [Zäpfel e Missbauer, 1993] até então utilizado por algumas indústrias no planejamento de produção.

Já em [Zhu e Wilhelm, 2006], os autores priorizam a revisão de problemas de dimensionamento de lotes e *scheduling* com custos e tempos de preparação dependentes da sequência. A revisão foca em problemas que utilizam diferentes tipos de configuração de máquina, tais como: uma única máquina, máquinas paralelas, *flow shop* e *job shop*. Além disso, os autores revisam os métodos para a solução de cada um dos problemas discutidos. De acordo com [Zhu e Wilhelm,



2006], grande parte dos modelos propostos até 2004 são  $\mathcal{NP}$ -difícil, portanto os artigos publicados não reportam seus experimentos computacionais, devido aos elevados tempos para resolver até mesmo problemas de médio porte. O principal foco, até a publicação da revisão de Zhu e Wilhelm [2006], foram trabalhos envolvendo o problema com uma única máquina. Zhu e Wilhelm [2006] concluem seu artigo chamando a atenção para uma questão bastante importante que é a ausência de conjuntos de instâncias que possibilitem uma comparação entre os métodos de solução propostos.

Na última década, as revisões acerca do PIDLS buscam apresentar modelos que visam solucionar problemas reais enfrentados pelas indústrias. Jans e Degraeve [2008] expõem diversas extensões dos problemas apresentados em [Drexel e Kimms, 1997] que visam atender as necessidades das indústrias e destacam a importância do estudo do problema integrado de dimensionamento de lotes e *scheduling*. Além disso, os autores apontam o estudo do dimensionamento de lotes em máquinas paralelas e de modelos mais globais como interessantes objetos de pesquisas futuras. Em [Clark et al., 2011], os autores destacam, novamente, a necessidade da integração do problema de dimensionamento de lotes e *scheduling*, assim como a união do problema integrado com questões de distribuição, roteamento de veículos, entre outros. Apesar da variedade de extensões do PIDLS apresentados em [Jans e Degraeve, 2008], Clark et al. [2011] mencionam a necessidade de conjuntos de instâncias com dados reais para a validação dos modelos ao invés de dados gerados aleatoriamente. Em relação às formulações matemáticas, Clark et al. [2011] apontam que, para aumentar o realismo, os modelos matemáticos tendem a ficar maiores, com mais restrições e variáveis, e também mais complexos, tornando indispensável o desenvolvimento de métodos eficientes e modelos mais fortes.

De acordo com [Guimarães et al., 2014], nos últimos anos os *solvers* comerciais têm obtido boas soluções em tempo razoável para os PIDLSs sem custo e tempo dependente de sequenciamento. Porém, os mesmos afirmam a necessidade do desenvolvimento de modelagens mais apertadas para resolver PIDLSs com custo e tempo dependentes de sequenciamento que obtenham soluções viáveis para situações do mundo real. Para tratar do assunto, Guimarães et al. [2014] focam na análise de desempenho das principais modelagens propostas na literatura para resolver PIDLSs com custo e tempo dependente de sequenciamento. Para realizar a análise, as modelagens são classificadas com base em dois critérios: técnica e estrutura de tempo utilizada.

Primeiro, os PIDLSs são subdivididos de acordo com a técnica utilizada para encontrar o sequenciamento de operações. Se o sequenciamento das operações realizadas pelo plano de produção é determinado pela solução do problema inteiro misto (PIM), então, diz-se que o problema é de produto orientado (PO). Caso contrário, se a sequência de operações for previamente determinada, então, diz-se que o problema é de sequência orientada (SO). Em seguida, o problema é classificado de acordo com a estrutura de tempo utilizada para resolvê-lo: macro-períodos (MP) ou micro-períodos (mP). Os macro-períodos permitem que mais de um tipo de item seja produzido em um mesmo período e também podem ser divididos em dois níveis que dependem do tipo instância considerada: único lote (UL) ou múltiplos lotes (ML). A classe de problemas com UL permite apenas uma única preparação de máquina, por período, para cada tipo de item. Enquanto a classe de problemas com ML permite que uma máquina seja preparada mais de uma vez para um mesmo item, por período. Já os micro-períodos permitem a produção de um único tipo de item por período.

Para cada classe de problema, Guimarães et al. [2014] apresentam as principais modelagens de trabalhos propostos na literatura para resolver PIDLSs que têm como principal contribuição formulações apertadas. Em cada um desses trabalhos, os autores propõem a reformulação das restrições responsáveis por guardar o sequenciamento de preparação de máquina em um problema de caminho mínimo ou fluxo em redes. Além de apresentar as modelagens para cada classe de problemas, Guimarães et al. [2014] propõem uma nova formulação que considera o fluxo de mercadoria (*commodity flow*) para resolver a classe de problemas PO-MP-ML.

A análise dos modelos é realizada em três partes, de acordo com o tipo de estrutura de



tempo e o tipo de instância. Na primeira parte, analisam-se as modelagens para a classe de micro-períodos. Na segunda, avaliam-se as modelagens para as classes com macro-períodos e único lote. Por fim, na terceira parte, são analisadas as modelagens para a classe de problemas com macro-períodos e múltiplos lotes. Nas duas últimas análises, comparam-se também o desempenho das modelagens originais apresentadas em [Guimarães et al., 2014] e suas respectivas reformulações para o problema de localização de facilidades [Bilde e Krarup, 1977]. Guimarães et al. [2014] concluem que modelos com SO obtêm melhores resultados para a classe de problemas com mP e que a nova formulação proposta pelos mesmos e reformulada para o problema de localização de facilidades supera em média o desempenho dos outros modelos. Além disso, os autores mencionam a importância do estudo de modelos que considerem o uso de máquinas paralelas e a produção em múltiplos níveis para pesquisas futuras.

As conclusões apresentadas em Guimarães et al. [2014] e o incentivo para a extensão do modelo serviram de inspiração para a análise do PIDLS em máquinas paralelas com *setup* não triangular de custo e tempo proposta neste artigo. Na seção seguinte é descrito o problema alvo deste estudo, sua modelagem padrão e as principais abordagens presentes na literatura.

### O Problema Abordado

Este estudo aborda o problema de planejamento de produção de múltiplos itens em um único estágio de produção em máquinas paralelas. Se o mesmo tipo de item é produzido ao final de um período e início do período subsequente, então não é necessário preparar a máquina novamente, ou seja, considera-se o *carry-over* da preparação da máquina. Além disso, com o intuito de economizar nas operações de limpeza, produtos que absorvem contaminações durante seu processo de produção são utilizados, permitindo assim a produção de mais de um lote do mesmo tipo de item por período. O objetivo do problema é encontrar o plano de produção que minimize os custos de preparação e estoque com custo e tempo dependentes da sequência. O horizonte de planejamento é finito e subdividido em macro-períodos menores. As máquinas possuem capacidade de produção limitada e as demandas dos itens são fornecidas em períodos. O plano de produção deve respeitar a capacidade de produção, atender a demanda dos itens por período e garantir que não haja conflito das operações realizadas durante o processo de produção.

Antes de apresentar o modelo padrão de programação inteira mista do PIDLS, considere os seguintes parâmetros e variáveis de decisão.

#### Parâmetros

$N$	=	quantidade máxima de itens;
$M$	=	quantidade máxima de máquinas;
$P$	=	quantidade máxima de macro-períodos;
$i, j, l$	=	índices que representam os itens, $i, j, l = 1, \dots, N$ ;
$k$	=	índice que representa as máquinas, $k = 1, \dots, M$ ;
$p, t$	=	índices que representam os macro-períodos, $p, t = 1, \dots, P$ ;
$sc_{ijk}$	=	custo de preparação para deixar de produzir o item $i$ e passar a produzir o item $j$ na máquina $k$ ;
$h_{it}$	=	custo unitário de estoque do item $i$ no período $p$ ;
$d_{ip}$	=	demanda do item $i$ no período $p$ ;
$st_{ijk}$	=	tempo de preparação para deixar de produzir o item $i$ e passar a produzir o item $j$ na máquina $k$ ;
$b_{ip}$	=	quantidade máxima do item $i$ que pode ser produzida no período $p$ ;
$t_{ikp}$	=	tempo de processamento do item $i$ na máquina $k$ no período $p$ ;
$cap_{kp}$	=	capacidade de produção na máquina $k$ no período $p$ ;
$q_{ikp}$	=	quantidade máxima de vezes que uma máquina pode ser preparada para produzir o item $i$ na máquina $k$ no período $p$ ;



Variáveis de decisão

$X_{ikp}$	=	quantidade produzida do item $i$ na máquina $k$ no período $p$ ;
$I_{ip}$	=	estoque do item $i$ no final do período $p$ ;
$Z_{ikp}$	=	variável binária que assume o valor 1 se a máquina $k$ está preparada para produzir o item $i$ no início do período $p$ ( <i>setup carry-over</i> ) e 0, caso contrário ;
$T_{ijkp}$	=	quantidade de vezes que o processo de produção muda do item $i$ para o item $j$ na máquina $k$ no período $p$ ;

O problema geral para o PIDLS em máquinas paralelas é modelado da seguinte maneira:

$$\min \sum_{i,p} h_{ip} I_{ip} + \sum_{i,j,p} sc_{ij} T_{ijp}$$

sujeito a:

$$\sum_k X_{ikp} + I_{i,p-1} - I_{ip} = d_{ip} \quad \forall p, i, \quad (1)$$

$$\sum_i t_{ikp} X_{ikp} + \sum_{i,j} st_{ijk} T_{ijkp} \leq cap_{kp} \quad \forall k, p, \quad (2)$$

$$X_{ikp} \leq b_{ip} \left( \sum_j T_{jikp} + Z_{ikp} \right) \quad \forall i, k, p, \quad (3)$$

$$\sum_i Z_{ikp} = 1 \quad \forall k, p, \quad (4)$$

$$Z_{ikp} + \sum_j T_{jikp} = \sum_j T_{ijkp} + Z_{ik,p+1} \quad \forall i, k, p, \quad (5)$$

$$\{(i, j) : T_{ijkp} > 0\} \text{ não é permitido } \textit{subtours} \text{ desconexos} \quad \forall k, t. \quad (6)$$

$$Z_{ikp} \in \{0, 1\}, X, I \geq 0, I_{i0} = 0, T_{ijkp} \in \{1, \dots, q_{jkp}\} \quad \forall i, j, k, p, \quad (7)$$

A função objetivo expressa a soma dos custos de preparação de máquina e estoque. As restrições (1) representam as equações de balanço de estoque para cada item e período. As restrições (2) indicam que a quantidade de capacidade disponível para produção é limitada por período de produção. As restrições (3) garantem que para a produção de um tipo de item a devida preparação da máquina seja realizada. As restrições (4) restringem a preparação de máquina para um único tipo de item no início de cada período. As restrições (5) representam o fluxo balanceado da preparação de máquina. O domínio das variáveis de decisão são definidos pelas restrições (6). O atendimento da demanda sem atraso é indicado pela não negatividade das variáveis  $I_{ip}$  nas restrições (6). Por fim, as restrições (7) previnem a criação de *subtours* desconexos no sequenciamento da produção dos lotes por máquina e período.

O grande desafio em utilizar macro-períodos e múltiplos lotes na formulação do PIDLS é encontrar uma estratégia que satisfaça as Restrições (7) evitando que *subtours* possam ser construídos ao decidir o sequenciamento da produção dos lotes. Em [Guimarães et al., 2014] os autores apresentam diversas abordagens para substituir as Restrições (7). Em particular, para a variante do problema envolvendo múltiplos lotes de produção são apresentados quatro modelos denotados pelos autores por BW, MCAL, SCF e MCF. Cada um dos modelos, adaptados para o problema em máquinas paralelas, são descritos nas seções seguintes.





## BW

O modelo BW originalmente proposto por Belvaux e Wolsey [2001] é inspirado no problema do caixeiro viajante. Para a formulação do problema uma nova variável  $Y_{ikp}$  correspondente ao número de vezes que a máquina  $k$  é preparada para produzir o item  $i$  no período  $p$  deve ser considerada. Na formulação proposta por Belvaux e Wolsey [2001], os autores substituem as restrições de balanceamento de *setup* e de eliminação de *subtours* (5) - (6) pelas seguintes restrições.

$$Z_{ikp} + \sum_j T_{jikp} = Y_{ikp} \quad \forall i, k, p, \quad (8)$$

$$\sum_j T_{ijkp} + Z_{ik,p+1} = Y_{ikp} \quad \forall i, k, p, \quad (9)$$

$$\sum_{i,j \in S} T_{ijkp} \leq \sum_{i \in S} Y_{ikp} - \frac{1}{q_{ikp}} Y_{ikp} \quad \forall i \in S, S \subseteq \{1, 2, \dots, N\}, k, p. \quad (10)$$

Enquanto as Restrições (8)-(9) representam o balanceamento do *setup* da máquina, dado um subconjunto  $S$ ,  $S \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ , de itens produzidos em sequência, as Restrições (10) restringem a quantidade de mudanças de produção (*setup*) entre itens pertencentes ao subconjunto  $S$  para um valor menor ou igual a  $|S|$ . Belvaux e Wolsey [2001] propuseram as Restrições (10) com base na formulação desenvolvida para o problema do caixeiro viajante em [Dantzig et al., 1954].

## MCAL

Em [Menezes et al., 2011] os autores propõem a formulação MCAL. Esta formulação conta com um conjunto de seis novas restrições para assumir o lugar das Restrições (6). Antes de apresentar as restrições de eliminação de *subtour* propostas por Menezes et al. [2011], considere  $K$  um valor grande e as seguintes variáveis de decisão.

- $G_{ikp}$  = variável binária que assume o valor 1 se a máquina  $k$  foi preparada pelo menos uma vez para produzir o item  $i$  no período  $p$  e 0, caso contrário;
- $Q_{ijkp}$  = variável binária que assume o valor 1 se ocorreu no processo de produção pelo menos uma mudança do item  $i$  para o item  $j$  na máquina  $k$  no período  $p$  e 0, caso contrário;
- $V_{ikp}$  = variável de decisão responsável por definir o sequenciamento dos lotes de produção. Valores elevados indicam que o item  $i$  é deixado para ser produzido mais ao final do período  $p$  na máquina  $k$ .

As Restrições (6) são substituídas pelas seguintes restrições:

$$\sum_j T_{jikp} + Z_{ikp} \geq G_{ikp} \quad \forall i, k, p, \quad (11)$$

$$\sum_j T_{ijkp} + Z_{ikp} \leq q_{ikp} G_{ikp} \quad \forall i, k, p, \quad (12)$$

$$\sum_{i \in S, j \notin S} T_{jikp} + \sum_{i \in S} Z_{ikp} \geq 1 - K \sum_{i \in S} (1 - G_{ikp}) \quad \forall p, i \in S, S \subseteq \{1, 2, \dots, N\}, |S| \geq 2 \quad (13)$$



$$T_{jikp} \geq Q_{ijkp} \quad \forall i, j, k, p, \quad (14)$$

$$T_{ijkp} \leq q_{ikp} Q_{ijkp} \quad \forall i, j, k, p, \quad (15)$$

$$V_{jkp} \geq V_{ikp} + 1 - K(1 - Q_{ijkp}) - K \left( \sum_l T_{likp} + Z_{ikp} - Q_{ijkp} \right) \quad \forall i, j \neq i, p. \quad (16)$$

Ambas as Restrições (11) e (12) determinam a relação entre estado inicial, mudanças na produção e existência de *setup* da máquina  $k$  no período  $p$  para produção do item  $i$ . Considere  $S$ ,  $S \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ , um subconjunto de itens que pertencem ao sequenciamento de produção. As Restrições (13) garantem que não existam *subtours* desconexos no sequenciamento impondo que ao menos uma mudança na produção ocorra entre um item pertencente a  $S$  e outro item não pertencente a  $S$ . Devido ao número exponencial de restrições, Menezes et al. [2011] utilizam as Restrições (14)-(15) para reduzir o conjunto de inequações necessário para eliminar os *subtours* desconexos.

### SCF

Com o intuito de obter uma modelagem forte, Guimarães et al. [2014] garantem um sequenciamento de preparação de máquina factível por meio de fluxo em redes, mais especificamente, de fluxo de mercadorias (*commodity flow*), em que um nó (vértice) representa um lote de produção de um tipo de item e um arco ligando dois nós indica a mudança da preparação de máquina de um tipo de item para o outro. Antes de apresentar o modelo proposto em [Guimarães et al., 2014], considere as seguintes variáveis de decisão.

$G_{ikp}$  = variável binária que assume o valor 1 se a máquina  $k$  foi preparada pelo menos uma vez para produzir o item  $i$  no período  $p$  e 0, caso contrário;

$F_{ijkp}$  = fluxo de mercadorias do nó (item)  $i$  até o nó (item)  $j$  na máquina  $k$  no período  $p$ .

No lugar das Restrições (6) a formulação do SCF utiliza as Restrições (11)-(12), (17)-(20).

$$\sum_j F_{0jkp} = \sum_i G_{ikp} \quad \forall k, p, \quad (17)$$

$$F_{0ikp} + \sum_j F_{jikp} = G_{ikp} + \sum_j F_{ijkp} \quad \forall i, k, p, \quad (18)$$

$$F_{0ikp} \leq N Z_{ikp} \quad \forall i, k, p, \quad (19)$$

$$F_{ijkp} \leq N T_{ijkp} \quad \forall i, j, k, p, \quad (20)$$

A origem do fluxo de mercadorias em cada período é estabelecida pelas restrições (17). As restrições (18) garantem o balanceamento do fluxo no nó  $i, p$  ao enviar um fluxo unitário para cada nó selecionado criando um caminho da fonte até cada um dos itens produzidos em determinado período. As restrições (19) obrigam o fluxo seguir da fonte para o primeiro item da sequência no período  $p$ , enquanto as restrições (20) são responsáveis por garantir que o fluxo siga um único caminho, na solução corrente.





## MCF

O MCF foi proposto por Sarin et al. [2011] e em sua estratégia para eliminação de *sub-tours* os autores fazem uso do fluxo de múltiplas mercadorias (do inglês *multi-commodity flow*). Assim como para o modelo MCAL as restrições de eliminação de *subtour* levam em consideração as variáveis  $G$  definidas anteriormente. Além disso, uma nova variável para o controle dos fluxos é considerada.

$$F_{lijkp} = 1 \text{ se o arco indo do nó (item) } i \text{ até o nó (item) } j \text{ na máquina } k \text{ no período } p \text{ está na sequência de produção que sai da fonte até o item } l \text{ e } 0, \text{ caso contrário.}$$

Por meio dos  $N$  fluxos de mercadorias a eliminação de *subtours* é realizada considerando no lugar das Restrições (6) as restrições apresentadas a seguir.

$$\sum_j F_{l0jkp} = \sum_i G_{lp} \quad \forall l, k, p, \quad (21)$$

$$\sum_{j=0, j \neq l}^N F_{lijkp} = \sum_j F_{lijkp} \quad \forall l, i \neq l, k, p, \quad (22)$$

$$\sum_{j=0}^N F_{ljlkp} = G_{lkp} \quad \forall l, k, p, \quad (23)$$

$$F_{l0jkp} \leq Z_{jkp} \quad \forall l, j, k, p, \quad (24)$$

$$F_{lijkp} \leq T_{ijkp} \quad \forall l, i, j, k, p, \quad (25)$$

$$G_{ikp}, T_{ijkp}, F_{lijkp} \in \{0, 1\} \quad \forall l, i, j, k, p. \quad (26)$$

As restrições (21) permitem fluxo saindo da fonte da mercadoria  $l$  desde que a mesma pertença ao conjunto de itens na sequência de produção. As restrições (22) garantem o balanceamento do fluxo, enquanto as restrições (23) impõem o item final na sequência de produção. As restrições (24) e (25) garantem que o fluxo siga um único caminho, na solução corrente, desde sua origem. O domínio das variáveis  $G, T, F$  são definidas nas restrições (26).

Tendo em vista os modelos apresentados, na seção seguinte é apresentada uma análise dos mesmos para resolver o PIDLS em máquinas paralelas.

## Experimentos Computacionais

Com o intuito de analisar o comportamento dos modelos apresentados na seção anterior, neste artigo, é realizado um experimento comparando suas soluções encontradas por meio do pacote comercial de otimização IBM ILOG CPLEX v. 12.6.3 [Cplex, 2016]. Os modelos BW, MCAL, SCF e MSF e suas versões adaptadas para o problema de localização de facilidades [Bilde e Krarup, 1977], denotadas aqui por BW-FL, MCAL-FL, SCF-FL e MSF-FL foram implementados em linguagem C++ e o experimento foi realizado em um Ubuntu Server 14.04, Intel Core i7, CPU 500, 3.4GHz e 4 GB de memória.

Para análise dos modelos foi utilizado um subconjunto de instâncias geradas em [James e Almada-Lobo, 2011]. As instâncias escolhidas para esta análise consistem naquelas com 2 ou 3 máquinas paralelas, 15 itens, 10 períodos, utilização de capacidade de máquina de 80% e custo de *setup* proporcional ao tempo de *setup* por um fator  $\Theta = \{50, 100\}$ . Para cada configuração foram utilizadas as 5 primeiras instâncias do conjunto gerado em [James e Almada-Lobo, 2011] totalizando 20 instâncias.



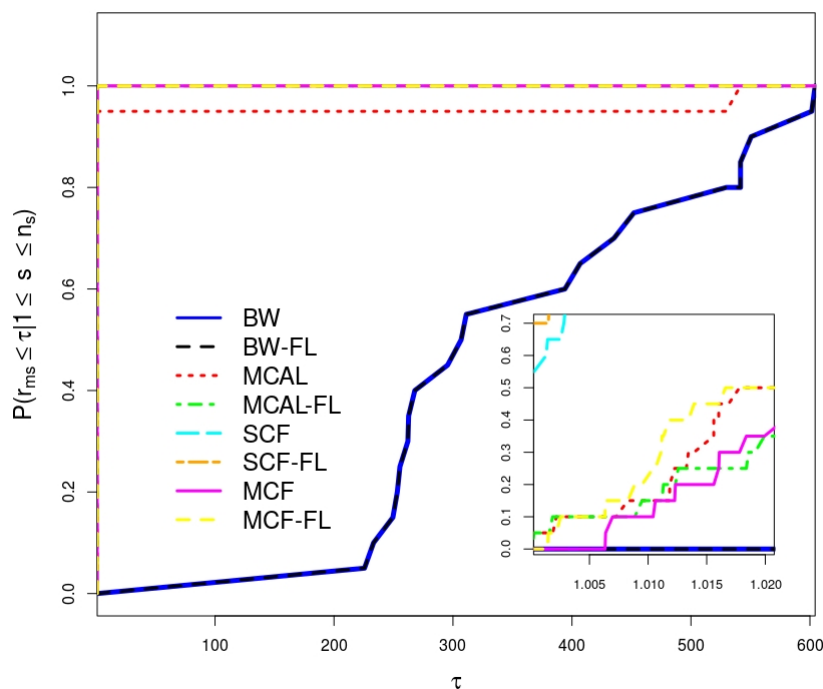
O gerador de instâncias de James e Almada-Lobo [2011] define os parâmetros  $st_{ijp}$ ,  $h_{ip}$  e  $d_{ip}$  de acordo com as distribuições uniformes  $U[5, 10]$ ,  $U[2, 9]$  e  $U[40, 59]$ , respectivamente. A capacidade  $cap_{pt}$  das instâncias utilizadas é definida como 80% da demanda total, ou seja,  $cap_{pt} = \sum_i d_{ip}/0,8$ . Além disso, cada instância possui uma variação de capacidade definida por um fator  $CutVar = 0.5$ . O tempo de processamento  $t_{ikp} = 1$ . E, por fim,  $sc_{ijk}$  é proporcional a  $st_{ijp}$  por um fator  $\Theta = \{50, 100\}$ .

Como  $st_{ijp}$  e  $sc_{ijk}$  obedecem a desigualdade triangular, as instâncias foram adaptadas para não obedecerem a desigualdade triangular conforme proposto em [Guimarães et al., 2014]. Portanto, as matrizes de custo e tempo foram alteradas inserindo itens de “atalho”. Para cada máquina de cada instância são escolhidos aleatoriamente dois itens de “atalho” e os tempos de preparação envolvendo esses dois itens e o restante dos itens passam a ser definidos de acordo com a distribuição uniforme  $U[2, 4]$ . Os custos de *setup* envolvendo esses dois itens também são alterados mantendo a proporcionalidade em relação aos tempos de preparação por um fator de  $\Theta = \{50, 100\}$ . Para evitar *setups* fictícios, uma vez que existe a possibilidade de se produzir mais de um lote de um mesmo item em um mesmo período, é imposta a produção mínima de 25 unidades de um item por lote.

Para definir o conjunto de itens  $S$  em uma sequência de produção e inserir as inequações de eliminação de *subtour* nos modelos BW, BW-FL, MCAL e MCAL-FL foi utilizado o algoritmo de separação Ford-Fulkerson [Ford Jr e Fulkerson, 1955]. Além disso, para cada instância foi dado um limite de 3600 segundos para que elas fossem resolvidas pelo IBM ILOG CPLEX v. 12.6.3.

Para a análise dos modelos foi utilizado um gráfico de perfil de desempenho, proposto por [Dolan e Moré, 2002]. O perfil de desempenho indica a probabilidade de cada modelo sendo analisado atingir cada uma das possíveis *taxas de desempenho* resultantes da relação entre cada modelo e cada instância do conjunto de instâncias testado. Informações mais detalhadas sobre esta ferramenta de avaliação podem ser encontradas em [Dolan e Moré, 2002].

Figura 1: Perfil de desempenho dos modelos.



Quando  $\tau = 1$ , os modelos SCF-FL e SCF apresentam os melhores resultados atingindo,



respectivamente, uma probabilidade de 65% e 55% de chances de encontrar a melhor solução, seguidos do modelo MCAL-FL que apresenta 5% de chances de encontrar a melhor solução. Os modelos MCF e MCF-FL podem ser considerados o quarto e quinto modelos com melhor desempenho para resolver o PIDLS. Com  $\tau = 2$ , os modelos SCF, SCF-FL, MCAL-FL, MCF e MCF-FL atingem o melhor desempenho possível, com probabilidade máxima de encontrar a melhor solução. Em  $\tau \approx 540$  o modelo MCAL também atinge a probabilidade máxima de encontrar a melhor solução. Por não resolver nenhuma instância do conjunto gerado para este experimento, os modelos BW e BW-FL apresentaram o pior comportamento para resolver o PIDLS.

Vale destacar que para a configuração de máquina utilizada para os experimentos e o limite de 3600 segundos, o CPLEX provou a otimalidade para 3 instâncias das 20 resolvidas.

### Conclusões e Pesquisas Futuras

Neste artigo foi estudado o PIDLS capacitado em máquinas paralelas com *setup carry-over*, sequência dependente e *setup* não triangular para preparação de máquina. Em particular, foi realizada uma análise das principais formulações encontradas na literatura para resolver o problema com uma única máquina aqui adaptadas para atender o problema com máquinas paralelas. Os modelos foram resolvidos com um *solver* de otimização combinatória IBM ILOG CPLEX v. 12.6.3 e seus resultados comparados por meio de um perfil de desempenho. Assim como para o PIDLS em uma única máquina, com base nos experimentos é possível observar o melhor desempenho dos modelos de fluxo de mercadorias SCF e SCF-FL, em especial, o modelo SCF-FL. A necessidade da inserção de inequações durante a resolução dos modelos BW, BW-FL tornou os modelos inviáveis para resolver esse tipo de problema. Inserir restrições que minimizem o esforço necessário para eliminar os *subtour* pode ser uma solução, uma vez que os modelos MCAL e MCAL-FL não apresentaram dificuldade para encontrar uma solução factível para o problema.

Apesar de apresentar o melhor desempenho, em um limite de 3600 segundos o CPLEX foi capaz de provar a otimalidade para apenas três instâncias do conjunto de teste utilizando os modelos SCF e SCF-FL. Portanto, em pesquisas futuras será considerada a análise e desenvolvimento de métodos de solução eficientes para resolver o PIDLS em máquinas paralelas.

### Agradecimentos

Agradecemos o financiamento da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) Processo: 16/02537-0 e Processo: 15/21660-4 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) projeto Universal número 448614/2014-6 para o desenvolvimento dessa pesquisa.

### Referências

- Belvaux, G. e Wolsey, L. A. (2001). Modelling practical lot-sizing problems as mixed-integer programs. *Management Science*, 47(7):993–1007.
- Bilde, O. e Krarup, J. (1977). Sharp lower bounds and efficient algorithms for the simple plant location problem. *Annals of Discrete Mathematics*, 1:79–97.
- Boonmee, A. e Sethanan, K. (2016). A glmpso for multi-level capacitated lot-sizing and scheduling problem in the poultry industry. *European Journal of Operational Research*, 250(2):652–665.
- Buschkühl, L., Sahling, F., Helber, S., e Tempelmeier, H. (2010). Dynamic capacitated lot-sizing problems: a classification and review of solution approaches. *OR Spectrum* 32, p. 231–261.
- Clark, A., Almada-Lobo, B., e Almeder, C. (2011). Lot sizing and scheduling: industrial extensions and research opportunities. *International Journal of Production Research*, 49(9):2457–2461.
- Cplex, I. I. (2016). Ibm ilog cplex optimization studio getting started with cplex version 12.6.3.



- Dantzig, G., Fulkerson, R., e Johnson, S. (1954). Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Journal of the operations research society of America*, 2(4):393–410.
- de Araujo, S. A., Arenales, M. N., e Clark, A. R. (2007). Joint rolling-horizon scheduling of materials processing and lot-sizing with sequence-dependent setups. *Journal of Heuristics*, 13(4):337–358.
- Dolan, E. D. e Moré, J. J. (2002). Benchmarking optimization software with performance profiles. *Math. Program., Ser. A*, 91:201–213.
- Drexl, A. e Kimms, A. (1997). Lot sizing and scheduling - survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, 99:221–235.
- Ferreira, D., Morabito, R., e Rangel, S. (2009). Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 196(2):697–706.
- Ford Jr, L. R. e Fulkerson, D. R. (1955). A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the hitchcock problem. Technical report, DTIC Document.
- Guimarães, L., Klabjan, D., e Almada-Lobo, B. (2014). Modeling lotsizing and scheduling problems with sequence dependent setups. *European Journal of Operational Research*, 239(3):644–662.
- James, R. J. e Almada-Lobo, B. (2011). Single and parallel machine capacitated lotsizing and scheduling: New iterative mip-based neighborhood search heuristics. *Computers & Operations Research*, 38(12):1816–1825.
- Jans, R. e Degraeve, Z. (2008). Modeling industrial lot sizing problems: a review. *International Journal of Production Research*, 46(6):1619–1643.
- Karimi, B., Ghomi, S. M. T. F., e Wilson, J. M. (2003). The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *OMEGA*, 31:365–378.
- Marinelli, F., Nenni, M. E., e Sforza, A. (2007). Capacitated lot sizing and scheduling with parallel machines and shared buffers: A case study in a packaging company. *Annals of Operations Research*, 150(1):177–192.
- Menezes, A. A., Clark, A., e Almada-Lobo, B. (2011). Capacitated lot-sizing and scheduling with sequence-dependent, period-overlapping and non-triangular setups. *Journal of Scheduling*, 14(2):209–219.
- Sarin, S. C., Sherali, H. D., e Yao, L. (2011). New formulation for the high multiplicity asymmetric traveling salesman problem with application to the chesapeake problem. *Optimization Letters*, 5(2):259–272.
- Zäpfel, G. e Missbauer, H. (1993). New concepts for production planning and control. *European Journal of Operational Research*, 67(3):297–320.
- Zhu, X. e Wilhelm, W. E. (2006). Scheduling and lot sizing with sequence-dependent setup: A literature review. *IIE transactions*, 38(11):987–1007.