



## **Análise de Modelos para o Problema de Dimensionamento de Lotes com Máquinas Paralelas**

**Carla C. D. Fernandes e Mariá C. V. Nascimento**

Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)  
Av. Cesare M. G. Lattes, 1201, Eugênio de Mello, São José dos Campos-SP, CEP 12247-014,  
Brasil  
{carladoescher, maria.cris}@gmail.com

### **RESUMO**

Este trabalho aborda o Problema de Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas (PDLMP) em que são considerados múltiplos itens e máquinas distintas com restrições de capacidade. Os itens podem ser produzidos em qualquer máquina e no início da produção de cada item consideram-se tempo e custo de *setup* da máquina utilizada. São estudados dois modelos matemáticos da literatura que têm diferentes abordagens: um trata o problema de forma clássica e outro apresenta uma reformulação baseada no Problema de Caminho Mínimo. Ambos os modelos foram implementados em C++, resolvidos com o pacote CPLEX v. 12.6 e os seus resultados comparados utilizando instâncias da literatura. Diante dos resultados obtidos concluiu-se que o CPLEX teve melhor desempenho com o problema modelado na forma clássica, pois resolveu uma quantidade maior de instâncias e em menor tempo do que o problema modelado conforme o Problema do Caminho Mínimo.

**PALAVRAS CHAVE.** Dimensionamento de lotes. Máquinas Paralelas. Múltiplos Itens.

**AD&GP – PO na Administração e Gestão da Produção**

### **ABSTRACT**

This paper deals with the Lot-Sizing Problem on Parallel Machines (LSPPM) in which are considered multiple items and different parallel machines with capacity restrictions. The items can be produced in any machine and at the beginning of the production it is considered a time to setup the machine. Two mathematical models from the literature are studied and they have different approaches: one treats the problem in a classical way and another presents a reformulation based on the Shortest Path Problem. Both models were implemented in C++, solved with CPLEX v. 12.6 and their results were compared using instances of the literature. In view of the obtained results it was concluded that the CPLEX had a better performance with the problem modeled in the classic form, because it solved a larger number of instances and in a shorter time than the problem modeled according to the Shortest Path Problem.

**KEYWORDS.** Lot-sizing Problem. Parallel Machines. Multiple Items.

**AD&GP –OR in Business and Production Management**



## 1. Introdução

A grande competitividade presente no meio empresarial acarreta o ensejo de empresas reduzirem seus custos e melhorarem sua produtividade. Para isso, se faz importante um gerenciamento do processo de produção com o intuito de decidir a melhor forma de utilização dos recursos disponíveis. O sistema que coordena esse gerenciamento é denominado planejamento e controle da produção (PCP) e possui três níveis: estratégico, tático e operacional [Anthony, 1965]. Neste artigo, considera-se o problema de dimensionamento de lotes que faz parte do planejamento tático da produção e estabelece a quantidade a ser produzida (ou o tamanho do lote) de cada item em uma determinada fábrica para cada período de um horizonte de planejamento finito e dividido em períodos. O objetivo é que esse plano de produção minimize os custos de preparação, produção e estoque, respeitando os recursos disponíveis e atendendo as demandas dos períodos previamente determinadas.

É expressivo o número de estudos de problemas de dimensionamento de lotes (PDLs) nas últimas seis décadas. Uma importante característica que tem motivado os pesquisadores a continuar investigando PDLs é a grande quantidade de variações existentes para o mesmo [Nascimento et al., 2010; Karimi et al., 2003]. Algumas dessas variantes são computacionalmente desafiadoras, que é o caso de problemas de dimensionamento de lotes com múltiplas plantas [Nascimento et al., 2010; Carvalho e Nascimento, 2016], com máquinas paralelas [Toledo e Armentano, 2006], entre outras.

Neste artigo, estuda-se o problema de dimensionamento de lotes em que o setor de produção é composto por máquinas paralelas distintas com capacidades limitadas e um tempo de preparação (*setup*) que é imposto no início do processo de produção de cada item em todas as máquinas. Esse problema é formalmente proposto em Sabbag [1993] e pode ser encontrado no Brasil em vários setores como, por exemplo, de indústrias de aço laminado, de bebidas, de colchões, entre outras.

Os modelos estudados no presente trabalho são apresentados em [Toledo, 1998] e em [Jans, 2009]. Toledo [1998] modela o PDLMP como um problema de programação linear inteira mista e, a fim de tornar o problema mais restrito, define um limitante inferior para a produção. Jans [2009] apresenta uma reformulação baseada no Problema de Caminho Mínimo. Esses dois modelos foram implementados no CPLEX 12.6.3 [ILOG, 2015] e resolvidos utilizando as instâncias propostas em [Toledo, 1998]. O intuito dessa avaliação é a identificação do melhor modelo para o desenvolvimento de uma matheurística em pesquisas futuras. Nos experimentos com 240 instâncias da literatura, usar o modelo de Toledo [1998] se mostrou mais vantajoso pois resolveu na otimalidade uma quantidade maior de problemas em tempo consideravelmente menor.

## 2. Problemas de Dimensionamento de Lotes

O problema de dimensionamento de lotes clássico envolve a determinação de quanto produzir em cada um dos períodos de um horizonte de planejamento finito. O objetivo é encontrar um plano de produção de mínimo custo capaz de atender as demandas dos produtos sem violar a capacidade de produção disponível. A literatura destinada ao problema de dimensionamento de lotes é bastante rica, boas revisões podem ser encontradas em [Karimi et al., 2003; Drexel e Kimms, 1997; Wolsey, 1995; Kuik et al., 1994; Bahl et al., 1987; Brahimi et al., 2006; Jans e Degraeve, 2008; Buschkühl et al., 2010].

Florian et al. [1980] provaram que vários problemas com um único item e custos de preparação são NP-difíceis. Bitran e Yanasse [1982] mostraram que vários casos de um único item que podem ser resolvidos em tempo polinomial tornam-se NP-difíceis quando um segundo item é introduzido. O problema de encontrar uma solução factível quando se considera o tempo de preparação da máquina é NP-completo, segundo Maes et al. [1991]. Os autores também mostraram que se os tempos de preparação são nulos, o problema de factibilidade é da classe P. Por esse motivo, as pesquisas envolvendo problemas que incluem custos e tempos de preparação é relativamente escassa. Devido à dificuldade deste problema, poucos métodos ótimos foram propostos para sua solução [Armentano et al., 1999; Diaby et al., 1992a; De Souza e Armentano, 1994]. No entanto, várias heurísticas foram propostas, das quais podem ser destacadas as apresentadas por



Toledo [1998]; Diaby et al. [1992b]; Trigeiro et al. [1989]; Lozano et al. [1991]; Nascimento et al. [2010].

Devido às inúmeras variantes de PDLs, nesta seção, pretende-se limitar o escopo da revisão bibliográfica em problemas que envolvam a produção em máquinas paralelas.

## 2.1. Problemas de Dimensionamento de Lotes com Máquinas Paralelas

O problema de dimensionamento em máquinas paralelas é uma variação do problema de dimensionamento de lotes, na qual existe um conjunto de máquinas, que podem ou não produzir todos os itens da fábrica. Os produtos são alocados nas máquinas podendo formar uma sequência de produção dos lotes. Em problemas desse tipo, os custos de produção e de troca de preparação dependente da máquina podem ser considerados.

Além disso, as máquinas podem ser idênticas ou distintas. Em problemas envolvendo máquinas paralelas idênticas consideram-se idênticos para todas as máquinas os tempos de *setup* por produto, as capacidades e os tempos de produção por produto. Quando consideram-se máquinas paralelas distintas o valor desses dados distinguem-se por máquinas. Nesta revisão, organizaram-se os trabalhos em ordem cronológica.

Um pouco mais distante do estudo deste artigo, vale mencionar o trabalho de Lasdon e Terjung [1971]. Os autores desenvolveram um algoritmo, baseado em técnicas de geração de colunas e no método de delimitação generalizada de Dantzig e Van Slyke, para o problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas idênticas, sem considerar tempo de preparação de máquina. Em seu estudo, somente um item pode ser produzido por máquina e período. Em experimentos computacionais, compararam-se os resultados obtidos diretamente pela decomposição de Dantzig–Wolfe com a proposta do trabalho e atestou-se que a quantidade de iterações necessárias para que o algoritmo proposto atingisse a otimalidade foi de um meio a um nono em relação à quantidade exigida pela estratégia comparada. Vale mencionar que o custo computacional de cada iteração de ambos os métodos é basicamente o mesmo.

Mais relacionados ao PDL visado, tem os trabalhos de Carreno [1990]; Sabbag [1993]; Toledo [1998]; Jans [2009]; Quadri e Kuhn [2009]; Fiorotto et al. [2015], que estudaram o problema de dimensionamento de lotes capacitado com máquinas paralelas e múltiplos itens considerando tempo e/ou custo de *setup*.

Carreno [1990] desenvolveu uma heurística para o PDL com máquinas paralelas idênticas no qual leva-se em conta tempo e custo de *setup* das máquinas. Além disso, cada máquina pode produzir apenas um produto por período e o processo de produção de cada item inicia-se apenas quando a quantidade em estoque desse produto é zero. Os resultados de experimentos computacionais mostraram que a heurística proposta solucionou, com menos do que 5% de desvio em relação ao limitante inferior, problemas envolvendo 10 itens e 100 máquinas em baixos tempos computacionais.

Sabbag [1993] tratou do problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas distintas considerando tempo de *setup* das máquinas e que visa a minimização de custos. Ele desenvolveu uma heurística que inicia o processo de busca por meio de uma solução infactível, gerada por meio de relaxação das restrições de capacidade ou das variáveis inteiras e busca a factibilidade por meio de transferências da quantidade de produção entre períodos e máquinas. Foram testadas instâncias envolvendo 100 itens, 6 máquinas e 24 períodos que foram resolvidas em um tempo computacional razoável, as soluções encontradas apresentaram baixos *gaps*.

Toledo [1998] estudam o PDL alvo deste artigo, em que consideraram-se máquinas paralelas não relacionadas na produção de múltiplos itens. Esse problema tem como objetivo minimizar a soma dos custos de produção, *setup* e estoque. Foram propostos dois algoritmos para resolução deste problema. O primeiro baseia-se em uma relaxação Lagrangiana das capacidades e subsequente transferência de lotes de produção para a factibilização da solução. O segundo foi desenvolvido a partir da reformulação do problema como uma rede generalizada e relaxação linear. Nesta tese propõem-se as instâncias usadas na análise deste artigo, melhor explicadas na Seção 4. Tais



instâncias têm 6 ou 12 itens; 6, 12 ou 18 períodos; e 2 ou 4 máquinas. Os resultados mostraram-se satisfatórios com *gaps* em média de 2% e 11% para instâncias com baixo e alto custo de *setup*, respectivamente.

Também visando o problema alvo deste artigo, na literatura existe o trabalho de Jans [2009], porém com máquinas idênticas. Nele, o autor apresenta um modelagem matemática baseada no Problema do Caminho Mínimo e observa que quando diversas máquinas idênticas estão disponíveis, muitas soluções ótimas alternativas podem ser criadas por renumeração das máquinas. Essas soluções alternativas dificultam o processo de *branch-and-bound*. Dessa forma, ele propõe, na modelagem apresentada, novas restrições para quebrar essa simetria de soluções. Os testes computacionais foram realizados utilizando 40 instâncias com 6 produtos, 15 períodos e de 2 até 5 máquinas. Os resultados indicaram que várias das restrições de quebra de simetria melhoraram o tempo de resolução, exceto quando se trata de problemas muito fáceis. Vale ressaltar que as restrições de quebra de simetria não são consideradas na análise aqui realizada, uma vez que só é factível acrescentá-las em problemas que tratam de máquinas idênticas.

Quadt e Kuhn [2009] estudaram o PDL com máquinas paralelas e *setup carry-over*, entretanto, possibilitando *back-orders* (permissão de atraso para atender a demanda). Os autores propuseram uma formulação matemática considerando o problema como inteiro misto e desenvolveram uma formulação inspirada no denominado “modelo agregado”, cuja idéia consiste em evitar variáveis binárias (que guardam um valor binário para cada máquina, produto e período) e usar, ao invés delas, variáveis inteiras que contam a quantidade de máquinas que executam *setup* (como restrições *surrogate*) para um determinado produto em um período específico. Assim, o número de variáveis não contínuas é substancialmente reduzido. Os autores ressaltam que devido a essa característica, a abordagem de resolução apresentada funciona apenas para o caso de máquinas idênticas, não se aplicando para a configuração de máquinas distintas. O problema foi resolvido considerando a formulação proposta e as soluções obtidas, utilizando o CPLEX limitado a 120 segundos, foram ótimas ou próximas das ótimas.

Mais recentemente, Fiorotto et al. [2015] resolveram o PDLMP por meio de um método de solução que combina a relaxação Lagrangiana e a decomposição de *Dantzig-Wolfe*. Os experimentos computacionais mostraram que o método híbrido produziu limites inferiores de excelente qualidade.

### 3. Modelos Matemáticos

A fim de verificar a eficiência do CPLEX para a resolução do problema de dimensionamento de lotes com máquinas paralelas que produzem múltiplos itens, neste artigo, estudam-se os modelos apresentados por Toledo [1998] e Jans [2009]. Para ambos os modelos, consideram-se os seguintes parâmetros:

- $s_{ijt}$  : custo de preparação do item  $i$  na máquina  $j$  no período  $t$ ,
- $c_{ijt}$  : custo unitário de produção do item  $i$  na máquina  $j$  no período  $t$ ,
- $h_{it}$  : custo unitário de estoque do item  $i$  no período  $t$ ,
- $fc_i$  : custo de uma unidade do estoque inicial para o item  $i$ ,
- $d_{it}$  : demanda do item  $i$  no período  $t$ ,
- $f_{ij}$  : tempo de preparação do item  $i$  na máquina  $j$ ,
- $b_{ij}$  : tempo de produção do item  $i$  na máquina  $j$ ,
- $C_{jt}$  : capacidade da máquina  $j$  no período  $t$ .

#### 3.1. Modelo 1: Tradicional

O PDLMP baseia-se em planejar a produção de  $n$  itens para uma quantidade  $p$  de períodos em um ambiente de produção com  $m$  máquinas. Toledo [1998] apresenta, para o PDLMP, um modelo de programação linear inteira mista e com o intuito de tornar o problema mais restrito, define um limitante inferior para a produção.

As variáveis do problema são:



$x_{ijt}$  : quantidade do item  $i$  produzida na máquina  $j$  no período  $t$ ,  
 $I_{it}$  : estoque do item  $i$  no período  $t$ ,  
 $y_{ijt}$  : variável binária que assume valor 1 se o item  $i$  é produzido na máquina  $j$  no período  $t$ , e 0 caso contrário.

Essa formulação é apresentada a seguir.

$$\min \sum_{t=1}^p \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (c_{ijt}x_{ijt} + s_{ijt}y_{ijt}) + \sum_{t=1}^p \sum_{i=1}^n h_{it}I_{it} \quad (1)$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^m x_{ijt} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = d_{it} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, p; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n (b_{ij}x_{ijt} + f_{ij}y_{ijt}) \leq C_{jt} \quad j = 1, \dots, m; t = 1, \dots, p; \quad (3)$$

$$b_{ij}x_{ijt} \leq \theta_{ijt}y_{ijt} \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; t = 1, \dots, p; \quad (4)$$

$$I_{i0} = 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad (5)$$

$$x_{ijt} \geq 0, y_{ijt} \in \{0, 1\}, I_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; t = 1, \dots, p \quad (6)$$

em que:

$$\theta_{ijt} = \min\{C_{jt} - f_{ij}, \sum_{k=t}^p b_{ij}d_{ik}\}$$

A função objetivo expressa pela Equação (1) representa a minimização dos custos de produção, *setup* e estoque. As restrições (2) tratam do balanço de estoque. A garantia de que as capacidades das máquinas não serão violadas é dada pelo conjunto de restrições (3).

As restrições (4) certificam a incidência de custos e tempo de preparação quando há produção. Esse conjunto de restrições utiliza o limitante superior  $\theta_{ijt}$ , para a produção do item  $i$  na máquina  $j$  no período  $t$  ( $x_{ijt}$ ), que deixa o problema mais restrito. É possível observar que, pelo modelo apresentado, a solução ótima apresentará o estoque final nulo, pois considerando uma solução que apresenta estoque final maior do que zero para algum produto  $i$  ( $I_{ip} > 0$ ), conclui-se que, nessa solução,  $\sum_{t=1}^p x_{ijt} > \sum_{t=1}^p d_{ij}$ , e portanto, existe uma outra solução, de menor custo, tal que  $\sum_{t=1}^p x_{ijt} = \sum_{t=1}^p d_{ij}$  [Zangwill, 1966]. Dado que os estoques finais são não-nulos, tem-se que  $x_{ijt}$  será, no máximo, igual a  $\sum_{t=1}^p d_{ij}$ .

Os estoques iniciais são nulos, conforme as restrições (5). A quantidade de produção e estoque não negativos são garantidos pelas restrições (6).

### 3.2. Modelo 2: Problema baseado em Caminhos Mínimos

Eppen e Martin [1987] reformularam o modelo para o PDL como um problema de caminhos mínimos. Jans [2009] adaptou essa abordagem para considerar no modelo máquinas paralelas idênticas.

Neste modelo considera-se a variável  $z_{vijtl}$  que representa a fração do plano de produção do item  $i$  na máquina  $j$ , em que a produção no período  $t$  satisfaz, total ou parcialmente, a demanda do período  $t$  até o período  $l$ . Considere um problema com 3 períodos e duas máquinas.

Dessa forma o custo de produção do item  $i$  na máquina  $j$ , em que a produção no período  $t$  satisfaz, total ou parcialmente, a demanda do período  $t$  até o período  $l$  é dado pela Equação (7).

$$cv_{ijtl} = c_{ijt}s_{ditl} + \sum_{s=t+1}^l \sum_{u=t}^{s-1} h_{iu}d_{is}, \quad (7)$$



Já o custo total para que o estoque inicial do item  $i$  atenda a demanda dos períodos 1 até o período  $t$ , dado pela Equação (8).

$$ci_{it} = fc_i sd_{i1t} + \sum_{s=2}^t \sum_{u=1}^{s-1} h_{iu} d_{is}. \quad (8)$$

Nessa formulação, além das variáveis  $zv_{ijtl}$  têm-se:

$w_{it}$  : fração do plano de estoque inicial do item  $i$  em que a demanda é atendida para os primeiros  $t$  períodos,

$sd_{itl}$  : soma das demandas do item  $i$  do período  $t$  até o período  $l$ ,

$fc_i$  : custo de uma unidade do estoque inicial para o item  $i$ ,

$cv_{ijtl}$  : custo total de produção e estoque para produzir o item  $i$ , na máquina  $j$  no período  $t$  atendendo a demanda dos períodos  $t$  até  $l$ , dado pela Equação (7).

$ci_{it}$  : custo total para que o estoque inicial do item  $i$  atenda a demanda dos períodos 1 até o período  $t$ , dado pela Equação (8).

O modelo de Jans [2009] foi minimamente modificado neste trabalho para que fossem consideradas máquinas paralelas distintas ao invés de máquinas paralelas idênticas, adicionando um índice que representa cada máquina nos custos, tempos de *setup* e capacidades. A seguir, apresenta-se o modelo:

$$\min \sum_{t=1}^p \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n s_{ijt} y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^p \sum_{l=t}^p cv_{ijtl} zv_{ijtl} + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^p ci_{it} w_{it} \quad (9)$$

sujeito a

$$1 = \sum_{l=1}^p \sum_{j=1}^m zv_{ij1l} + \sum_{l=1}^p w_{il} \quad i = 1, \dots, n; \quad (10)$$

$$w_{i,t-1} + \sum_{s=1}^{t-1} \sum_{j=1}^m zv_{i,j,s,t-1} = \sum_{l=t}^p \sum_{j=1}^m zv_{ijtl} \quad i = 1, \dots, n; t = 2, \dots, p; \quad (11)$$

$$\sum_{t=1}^p \sum_{j=1}^m zv_{ijtp} = 1 \quad i = 1, \dots, n; \quad (12)$$

$$\sum_{l=t}^p zv_{ijtl} \leq y_{ijt} \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; t = 1, \dots, p; \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n f_{ij} y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{l=t}^p b_{ij} sd_{itl} zv_{ijtl} \leq C_{jt} \quad j = 1, \dots, m; t = 1, \dots, p; \quad (14)$$

$$zv_{ijtl} \geq 0; y_{ijt} \in \{0, 1\}; w_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; t = 1, \dots, p; l = t, \dots, p \quad (15)$$

Pelas definições de  $z_{ijtl}$  e  $w_{it}$ , temos que:

$$x_{ijt} = \sum_{l=t}^p sd_{itl} zv_{ijtl}$$

$$I_{i0} = \sum_{l=1}^p sd_{i1l} w_{il}$$

As equações (9) minimizam a soma dos custos de estoque inicial, preparação, produção e estocagem. As restrições (10), (11) e (12) representam restrições de fluxo para a rede de caminho



mínimo. As restrições (13) forçam o *setup* para cada item que será produzido e o conjunto de restrições (14) limita a soma dos tempos de *setup* e produção pela capacidade disponível em cada período e em cada máquina.

Nesta reformulação considera-se estoque inicial por dois motivos:

- Os problemas serão sempre factíveis, basta considerar um alto custo para os estoques iniciais;
- Uma reformulação utilizando o Problema de Caminho Mínimo sem a consideração de estoque inicial não modelaria corretamente instâncias em que a demanda no primeiro período é zero. A razão é que, nesse caso, os somatórios  $\sum_{j=1}^m z_{vij11}$ , para cada produto  $i$ , que representam as proporções das demandas do período 1 atendidas no período 1, deveriam ser ajustados para 1, a fim de atender as restrições (11) - sem consideração de proporções do estoque inicial  $w_{it}$ . Levando-se em conta o conjunto de restrições (13), isso implicaria numa ativação de *setup*, mesmo que nada fosse produzido. Esse problema é resolvido pelo estoque inicial: se a demanda no primeiro período for zero, será considerada uma proporção de estoque inicial neste período ( $w_{i1}$ ) e isso não implicará na ativação de custo de *setup*. Além disso, como o custo deste estoque inicial é zero, pois não há demanda no primeiro período (o custo é multiplicado pela demanda), também não existirá custo de estoque.

#### 4. Experimentos Computacionais

Os dois modelos apresentados na seção anterior foram implementados utilizando o CPLEX 12.6.3 ILOG [2015] e testados utilizando instâncias propostas em [Toledo, 1998]. Todos os testes foram realizados em um microcomputador Intel Core i5 2.5 GHz com 6 Gb de memória RAM e sistema operacional Ubuntu 16.04. Utilizaram-se 10 instâncias para cada configuração ( $p, m, n$ ) de número de períodos ( $p = 6, 12, 18$ ), máquinas ( $m = 2, 4$ ) e itens ( $n = 6, 12$ ). Essas instâncias estão divididas em dois grupos:

- Capacidade apertada (A), custo de preparação alto (A) e tempo de preparação alto (A) - classe AAA;
- Capacidade normal (N), custo de preparação baixo (B) e tempo de preparação baixo (B) - classe NBB.

Os parâmetros foram gerados em intervalos  $[a, b]$  com distribuição uniforme e denotado  $U[a, b]$ :

- custo de produção ( $c_{ijt}$ )  $\sim U[1.5, 2.5]$
- custo de *setup* ( $s_{ij}$ )  $\sim U[5.0, 95.0]$
- custo de estoque ( $h_{ci}$ )  $\sim U[0.2, 0.4]$
- tempo de produção ( $b_{ij}$ )  $\sim U[1.0, 5.0]$
- tempo de preparação ( $f_{ij}$ )  $\sim U[10.0, 50.0]$
- demanda ( $d_{it}$ )  $\sim U[0, 180]$

Com o intuito de gerar instâncias com altos custos de *setup*, os custos de *setup* gerados pela distribuição normal com os parâmetros acima, foram multiplicados por 10. Da mesma forma, para criar exemplos com tempos de preparação alto multiplicaram-se os tempos dados pela distribuição normal por 1,5.

A capacidade foi obtida através da divisão da demanda de cada item e cada período entre as máquinas. A média foi calculada sobre o número de máquinas e períodos, o que resulta na seguinte expressão:



$$Cap = \frac{\sum_{t=1}^p \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left( \frac{d_{it}}{m} b_{ij} + f_{ij} \right)}{mp}$$

Para ajustar  $Cap$  de acordo com o número de máquinas conforme a quantidade de máquinas consideradas, utilizou-se a seguinte expressão:

$$C_{jt} = \left( 1, 4 - \frac{m}{10} \right) Cap$$

A capacidade apertada é obtida multiplicando  $Cap$  por 0,9.

Todas as instâncias foram rodadas no CPLEX 12.6.3 [ILOG, 2015]. A Tabela 1 mostra a quantidade de instâncias, para cada configuração de períodos, máquinas e itens  $(p, m, n)$ , nas quais o CPLEX provou a otimalidade no tempo máximo de 1800 segundos, tanto na classe AAA quanto na classe NBB. Nesta tabela, é possível analisar a dificuldade em se obter soluções para os problemas dependendo de suas características.

Tabela 1: Quantidade de soluções ótimas encontradas pelo CPLEX, no tempo limite de 1800 segundos.

			Modelo 1		Modelo 2	
$p$	$m$	$n$	AAA	NBB	AAA	NBB
6	2	6	10	10	10	10
		12	10	10	10	10
	4	6	10	10	10	10
		12	10	10	10	10
12	2	6	10	10	10	10
		12	8	10	8	10
	4	6	10	10	6	10
		12	9	6	2	8
18	2	6	10	10	8	10
		12	2	8	3	8
	4	6	9	10	1	4
		12	1	3	0	1

Observa-se que o CPLEX encontrou soluções ótimas para todas as instâncias com 6 períodos. Considerando-se 12 períodos uma quantidade razoável de soluções ótimas não foram encontradas. Em instâncias com 18 períodos, poucas soluções foram encontrados quando considerou-se mais do que 6 produtos.

Verifica-se ainda que para os problemas com capacidade normal, com custos e tempos de preparação baixos (NBB), o CPLEX encontrou soluções ótimas, em até 1800 segundos, para todas as 10 instâncias em 75% das configurações  $(p, m, n)$  para o Modelo 1 e em 66% das configurações para o Modelo 2. Já capacidade apertada, custos e tempos de preparação alto (AAA) a porcentagem de configurações em que o *solver* provou a otimalidade para todas as instâncias cai para 58% para o Modelo 1 e 42% para o Modelo 2.

A Figura 1 apresenta o tempo médio gasto para os problemas com capacidade apertada, custos e tempos de preparação alto (AAA) e cada configuração  $(p, m, n)$ ; e a Figura (2) apresenta o tempo médio gasto para os problemas com capacidade normal, custos e tempos de preparação baixos (NBB) e cada configuração  $(p, m, n)$ .

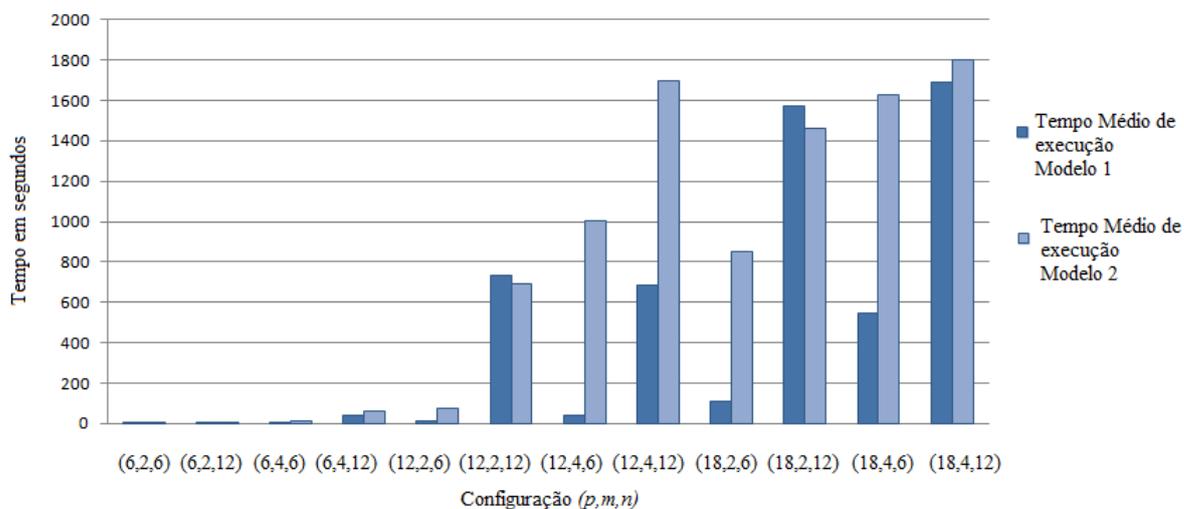


Figura 1: Tempo médio - AAA para Modelos 1 e 2

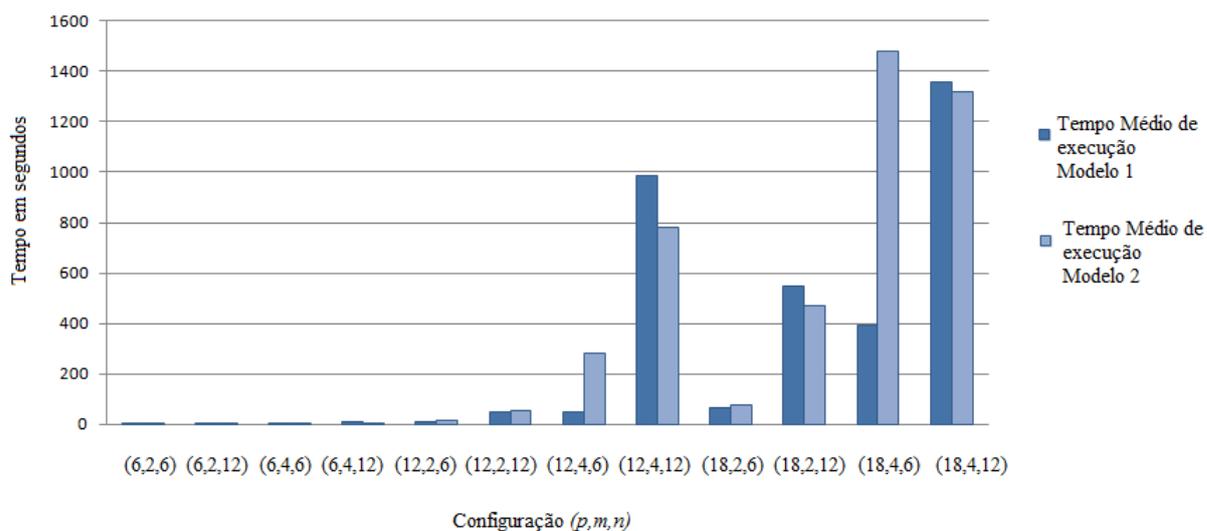


Figura 2: Tempo médio - NBB para Modelos 1 e 2

Analisando as figuras é possível observar que os problemas AAA foram resolvidos em um tempo maior que os problemas NBB. Nota-se ainda que, no geral, o CPLEX resolveu os problemas formulados pelo Modelo 1 utilizando menos tempo que os implementados conforme o Modelo 2. Nas configurações que o CPLEX com o Modelo 2 resolveu em menor tempo, a diferença em relação ao Modelo 1 foi pequena, enquanto que nas configurações em que o CPLEX com o Modelo 1 resolveu em menor tempo, a diferença em relação ao Modelo 2 foi significativamente grande.

Outra forma utilizada para comparar os resultados foi por meio do gráfico de perfil de desempenho de Dolan e Moré [2002]. Para isso, considera-se um conjunto  $P$  de  $n_p$  instâncias e um conjunto  $S$  de  $n_s$  algoritmos de solução. A comparação do desempenho de um determinado algoritmo  $s \in S$  na resolução de um problema  $p \in P$  em relação ao desempenho do melhor algoritmo, é dada pela razão de desempenho:



$$r_{ps} = \frac{t_{ps}}{\min\{t_{ps} : s \in S\}} \quad (16)$$

Na Equação 16,  $t_{ps}$  é o tempo computacional gasto para a resolução de  $p$  utilizando-se  $s$ . O menor  $t_{ps}$  define a melhor performance obtida pelo algoritmo. Assim, de acordo com a Equação (16) o melhor valor para o  $r_{ps}$  é 1.

A Figura 3 analisa os perfis de desempenho na resolução de problemas através das duas formulações estudadas. Para a criação deste gráfico, utilizou-se os tempos de execução do *solver* CPLEX para o Modelo 1 e para o Modelo 2 nas 240 instâncias consideradas. O eixo das ordenadas é dado pelo número de problemas que a execução do CPLEX através de cada modelo atingiu uma razão de desempenho igual ou melhor que um coeficiente  $\tau$  (eixo das abcissas).

Assim, o gráfico indica a probabilidade de  $s$  ter uma razão de desempenho dentro de um fator  $\tau$ . Em linguagem matemática :  $P(\log_2(r_{ps}) \leq \tau | 1 < s < n_s)$ .

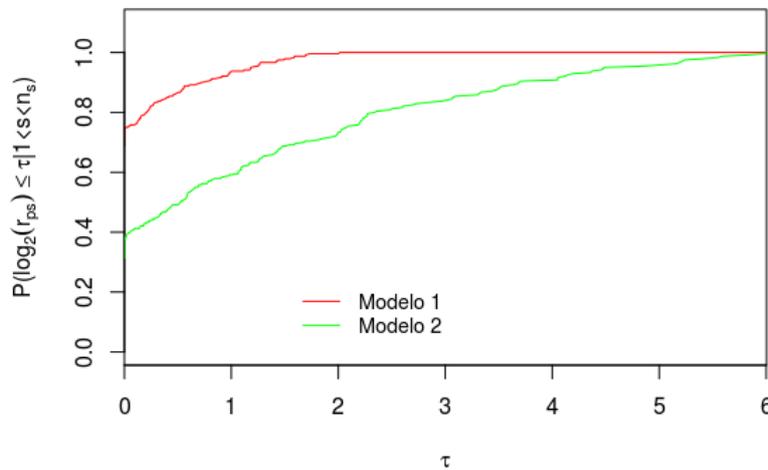


Figura 3: Perfil de Desempenho dos Modelos 1 e 2.

Pela Figura 3 pode-se concluir que o CPLEX utilizando o Modelo 1 conseguiu resolver sempre a maior proporção de instâncias dentro de um dado fator  $\tau$  do desempenho do CPLEX utilizando o Modelo 2. Isso se deve, provavelmente, devido ao fato de o problema de simetrias quando as máquinas não são idênticas não acontecer nos casos de testes testados.

## 5. Conclusões

O Problema de Dimensionamento de Lotes ocupa uma importante parcela no planejamento da produção. Ele estabelece a quantidade a ser produzida (ou o tamanho do lote) de cada item em uma determinada fábrica para cada período de um horizonte de planejamento finito, otimizando os recursos disponíveis. O objetivo deste trabalho foi estudar o Problema de Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas distintas sob dois diferentes aspectos: modelando-o de forma direta e reformulando-o para tratá-lo como um Problema de Caminho Mínimo.

O modelo relacionado a cada abordagem foi implementado no CPLEX 12.6.3 [ILOG, 2015] e executado utilizando instâncias de Toledo [1998]. Os experimentos empregaram 240 instâncias da literatura com características diversas. Diante dos resultados obtidos concluiu-se que o Modelo 1, no qual o problema é tratado de forma direta, apresenta uma quantidade maior de resultados em menor tempo do que o Modelo 2, no qual o problema é reformulado como um Problema de Caminho Mínimo. No entanto, o Modelo 2 apresenta o PDLMP de uma forma que possibilita a utilização de diversas heurísticas da literatura para solucioná-lo, pois o Problema do Caminho Mínimo é bastante estudado e vários métodos já foram desenvolvidos para solucioná-lo.



Em trabalhos futuros pretende-se criar heurísticas, em particular, matheurísticas, para resolver o PDLMP por meio das duas modelagens aqui estudadas e permitir, no PDLMP, o aproveitamento de *setup* de um período para o outro (*setup carry-over*).

### Agradecimentos

As autoras agradecem o apoio financeiro da CAPES, FAPESP (Proc: 15/21660-4) e CNPq (448614/2014-6).

### Referências

- Anthony, R. N. (1965). *Planning and Control System: A Framework for Analysis*. Cambridge: Harvard University Press. apud em Hax e Candea (1984).
- Armentano, V. A., França, P. M., e de Toledo, F. M. (1999). Multilevel capacitated lotsizing complexity and lp-based heuristics. *European Journal of Operational Research*, 53(2):131–148.
- Bahl, H. C., Ritzman, L. P., e Gupta, J. N. (1987). Or practice—determining lot sizes and resource requirements: A review. *Operations Research*, 35(3):329–345.
- Bitran, G. R. e Yanasse, H. H. (1982). Computational complexity of the capacitated lot size problem. *Management Science*, 28(10):1174–1186.
- Brahimi, N., Dauzere-Peres, S., Najid, N. M., e Nordli, A. (2006). Single item lot sizing problems. *European Journal of Operational Research*, 168(1):1–16.
- Buschkühl, L., Sahling, F., Helber, S., e Tempelmeier, H. (2010). Dynamic capacitated lot-sizing problems: a classification and review of solution approaches. *Or Spectrum*, 32(2):231–261.
- Carreno, J. J. (1990). Economic lot scheduling for multiple products on parallel identical processors. *Management Science*, 36(3):348–358.
- Carvalho, D. M. e Nascimento, M. C. (2016). Lagrangian heuristics for the capacitated multi-plant lot sizing problem with multiple periods and items. *Computers & Operations Research*, 71: 137–148.
- De Souza, K. X. S. e Armentano, V. A. (1994). Multi-item capacitated lot-sizing by a cross decomposition based algorithm. *Annals of Operations Research*, 50(1):557–574.
- Diaby, M., Bahl, H., Karwan, M., e Zionts, S. (1992a). Capacitated lot-sizing and scheduling by Lagrangean relaxation. *European Journal of Operational Research*, 59(3):444–458.
- Diaby, M., Bahl, H. C., Karwan, M. H., e Zionts, S. (1992b). A Lagrangean relaxation approach for very-large-scale capacitated lot-sizing. *Management Science*, 38(9):1329–1340.
- Dolan, E. D. e Moré, J. J. (2002). Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical programming*, 91(2):201–213.
- Drexl, A. e Kimms, A. (1997). Lot sizing and scheduling—survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, 99(2):221–235.
- Eppen, G. D. e Martin, R. K. (1987). Solving multi-item capacitated lot-sizing problems using variable redefinition. *Operations Research*, 35(6):832–848.
- Fiorotto, D. J., de Araujo, S. A., e Jans, R. (2015). Hybrid methods for lot sizing on parallel machines. *Computers & Operations Research*, 63:136–148.
- Florian, M., Lenstra, J. K., e Rinnooy Kan, A. (1980). Deterministic production planning: Algorithms and complexity. *Management science*, 26(7):669–679.



- ILOG. *CPLEX 12.6 Reference Manual*. ILOG: France, 2015. v. 12.6.
- Jans, R. (2009). Solving lot-sizing problems on parallel identical machines using symmetry-breaking constraints. *INFORMS Journal on Computing*, 21(1):123–136.
- Jans, R. e Degraeve, Z. (2008). Modeling industrial lot sizing problems: a review. *International Journal of Production Research*, 46(6):1619–1643.
- Karimi, B., Ghomi, S. F., e Wilson, J. (2003). The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega*, 31(5):365–378.
- Kuik, R., Salomon, M., e Van Wassenhove, L. N. (1994). Batching decisions: structure and models. *European journal of operational research*, 75(2):243–263.
- Lasdon, L. S. e Terjung, R. (1971). An efficient algorithm for multi-item scheduling. *Operations research*, 19(4):946–969.
- Lozano, S., Larraneta, J., e Onieva, L. (1991). Primal-dual approach to the single level capacitated lot-sizing problem. *European Journal of Operational Research*, 51(3):354–366.
- Maes, J., McClain, J. O., e Van Wassenhove, L. N. (1991). Multilevel capacitated lotsizing complexity and LP-based heuristics. *European Journal of Operational Research*, 53(2):131–148.
- Nascimento, M. C., Resende, M. G., e Toledo, F. M. (2010). GRASP heuristic with path-relinking for the multi-plant capacitated lot sizing problem. *European Journal of Operational Research*, 200(3):747–754.
- Quadt, D. e Kuhn, H. (2009). Capacitated lot-sizing and scheduling with parallel machines, back-orders, and setup carry-over. *Naval Research Logistics (NRL)*, 56(4):366–384.
- Sabbag, Z. (1993). Planejamento da produção em máquinas paralelas sob restrições de capacidade.
- Toledo, F. M. B. (1998). *Dimensionamento de lotes em máquinas paralelas*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- Toledo, F. M. B. e Armentano, V. A. (2006). A Lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines. *European Journal of Operational Research*, 175(2): 1070–1083.
- Trigeiro, W. W., Thomas, L. J., e McClain, J. O. (1989). Capacitated lot sizing with setup times. *Management science*, 35(3):353–366.
- Wolsey, L. A. (1995). Progress with single-item lot-sizing. *European Journal of Operational Research*, 86(3):395–401.
- Zangwill, W. I. (1966). A deterministic multi-period production scheduling model with backlogging. *Management Science*, 13(1):105–119.