



SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DESPACHO HIDROTÉRMICO DE MÉDIO PRAZO POR RELAXAÇÃO BASEADA EM MOMENTOS

Franciele Cicconet, Katia Campos de Almeida

Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina

Campus Trindade, 88040-900, Florianópolis, SC

e-mails: f.cicconet@posgrad.ufsc.br, katia.c.almeida@ufsc.br

RESUMO

Este artigo calcula o despacho ótimo de geração, num horizonte de médio prazo e em sistemas predominantemente hidrelétricos, através da resolução de um problema de programação estocástica de dois estágios, quadrático e com restrições quadráticas. A técnica de relaxação por programação semidefinida (PSD) baseada na teoria de momentos é utilizada para encontrar uma solução otimista para o problema. O artigo propõe o uso de restrições adicionais para melhorar o grau de factibilidade da solução otimista. Além disso, o artigo analisa a melhoria de desempenho da PSD através de re-escalonamento das variáveis do problema. São apresentados resultados obtidos para sistemas de até quatro usinas.

PALAVRAS CHAVE. Programação Semidefinida, Despacho hidrotérmico de médio prazo.

Tópicos: otimização aplicada a sistemas de energia, programação não linear, programação semidefinida.

ABSTRACT

This paper calculates the medium term power dispatch in predominantly hydro systems by solving a two-stage, quadratic, stochastic programming problem with quadratic constraints. Moment relaxation is used to obtain optimistic solutions to such problem. The paper analyses the use of additional constraints to reduce the infeasibility of the relaxed solutions. It also investigates the impact of scaling on the quality of the SDP solutions. Results are presented for small test systems.

KEYWORDS. Semidefinite programming, Medium term hydrothermal dispatch.

Paper topics: optimization applied to power systems, nonlinear programming, semidefinite programming.

1. Introdução

A produção de energia elétrica no Brasil é feita predominantemente por usinas hidrelétricas, muitas delas com grandes reservatórios e acopladas em cascata. Devido à presença desses reservatórios, e também da natureza estocástica das vazões afluentes, o planejamento da operação do sistema é feito com auxílio de programação dinâmica estocástica e considerando horizontes de longo prazo. Uma vez que possuem um elevado número de variáveis, os modelos de otimização usados no planejamento de longo prazo não representam detalhadamente o sistema, tornando necessário o uso de outros modelos, com representação mais detalhada das interconexões das usinas hidrelétricas e da rede elétrica, para determinar o despacho ótimo de geração das usinas no horizonte de médio e curto prazo. Este trabalho analisa o uso da técnica de programação semidefinida (PSD) para obter a solução do modelo de otimização que representa o despacho ótimo de geração no horizonte de médio prazo.



As aplicações de PSD em sistemas de potência foram feitas na resolução de problemas de fluxo de potência ótimo [Molzahn e Hiskens, 2014], despacho de geração com unit commitment [Madrigal e Quintana, 1999], estimação de estados [Zhu e Giannakis, 2011] e planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos [Fuentes-Loyola e Quintana, 2003], [Paredes et al., 2015], [Zhu et al., 2013]. Em [Fuentes-Loyola e Quintana, 2003] e [Paredes et al., 2015], a PSD é usada para resolver problemas inteiros mistos, que representam o despacho ótimo de geração considerando a possibilidade de ligar ou desligar unidades geradoras. Por outro lado, em [Zhu et al., 2013], supõe-se que as unidades geradoras em operação sejam conhecidas e o despacho ótimo de geração é obtido resolvendo-se um problema contínuo, quadrático com restrições quadráticas. Os estudos sobre despacho hidrotérmico foram feitos considerando-se um horizonte de curto prazo (entre um e sete dias). Portanto, os problemas de otimização resolvidos são determinísticos.

Embora tenha sido aplicada com sucesso para encontrar ótimos globais de diferentes problemas, a relaxação via PSD encontra ainda obstáculos, sendo os mais importantes: a elevada dimensão do problema relaxado, o grau de infactibilidade das soluções relaxadas, que pode prejudicar o ajuste de tais soluções para soluções ótimas, e o mal condicionamento numérico do problema relaxado [Waki et al., 2006; Fampa et al., 2013]. Entre as estratégias propostas para reduzir alguns desses obstáculos estão a inclusão de restrições relevantes ao problema relaxado [Sherali e Tuncbilek, 1995; Fampa et al., 2013] e o re-escalamento de variáveis [Waki et al., 2006]. Este trabalho analisa a eficácia dessas duas estratégias quando aplicadas na resolução do problema de despacho ótimo de usinas.

Este artigo calcula o despacho ótimo de geração, num horizonte de médio prazo e em sistemas predominantemente hidrelétricos, pela resolução de um problema de programação estocástica de dois estágios, quadrático e com restrições quadráticas. A técnica de relaxação por programação semidefinida baseada na teoria de momentos [Lasserre, 2001] é utilizada para encontrar uma solução otimista para o problema. O artigo propõe o uso de restrições adicionais para melhorar o grau de factibilidade da solução otimista. Além disso, o artigo analisa a melhoria de desempenho da PSD através de re-escalamento das variáveis do problema. São apresentados resultados obtidos para sistemas de até quatro usinas.

2. Formulação do Problema

O planejamento de médio prazo de sistemas hidrelétricos é feito de forma centralizada pelo operador do sistema e determina o despacho das usinas disponíveis com objetivo minimizar o custo da geração térmica no período considerado que, neste trabalho é suposto igual a um ano. Uma vez que, neste horizonte de estudo, há considerável incerteza sobre as vazões afluentes naturais dos rios, essas são consideradas variáveis aleatórias e representadas por um conjunto de N_ω cenários, que são obtidos de séries históricas de vazões [ONS, 2017]. Cada cenário ω possui probabilidade

π_ω de ocorrência, sendo $\sum_{\omega=1}^{N_\omega} \pi_\omega = 1$.

O horizonte de estudo é discretizado em T períodos de tempo. Em cada período t e cenário ω são determinadas: a potência gerada, $ph_{i,t,\omega}$, a vazão turbinada, $q_{i,t,\omega}$ e vazão vertida $u_{i,t,\omega}$ de cada usina i . Supõe-se um sistema predominantemente hidrelétrico, portanto, somente usinas hidrelétricas são representadas de forma individualizada. A carga não atendida pelas hidrelétricas é suprida por uma termelétrica equivalente que, no período t e cenário ω fornece potência igual a $pt_{t,\omega}$. Considera-se um sistema com H usinas hidrelétricas.

Ao se considerar a aleatoriedade das vazões afluentes dos rios, para se obter o despacho ótimo das usinas no horizonte de médio prazo, deve-se resolver um problema de programação estocástica de múltiplos estágios, cada estágio associado a um período do horizonte de planejamento. Neste trabalho esse problema é simplificado para um problema estocástico de dois estágios, sendo que, no primeiro estágio, são tomadas decisões referentes ao primeiro período de planejamento e, no segundo estágio, são tomadas decisões referentes aos períodos $t = 2, \dots, T$. Assim, no primeiro período tem-se:



$$\begin{aligned} ph_{i,1,1} &= ph_{i,1,2} = \dots = ph_{i,1,N_\omega}, \\ q_{i,1,1} &= q_{i,1,2} = \dots = q_{i,1,N_\omega}, \\ u_{i,1,1} &= u_{i,1,2} = \dots = u_{i,1,N_\omega}, \\ pt_{1,1} &= pt_{1,2} = \dots = pt_{1,N_\omega}. \end{aligned} \quad (1)$$

O despacho das usinas minimiza o custo esperado de geração térmica, representado por:

$$f_{ob} = \sum_{\omega=1}^{N_\omega} \pi_\omega \sum_{t=1}^T c_2 pt_{t,\omega}^2 + c_1 pt_{t,\omega} + c_0, \quad (2)$$

onde c_0, c_1, c_2 são constantes pré-especificadas.

Desconsiderando os tempos gastos pela água para percorrer as distâncias entre as usinas numa cascata, as perdas por evaporação e/ou outras utilizações para a água, o balanço hídrico em cada reservatório i , no período t e cenário ω é expresso por:

$$v_{i,t,\omega} = v_{i,t-1,\omega} + h[r_{i,t,\omega} - q_{i,t,\omega} - u_{i,t,\omega} + \sum_{m \in \Omega_i} (q_{m,t,\omega} + u_{m,t,\omega})], \quad (3)$$

onde, h é o número de horas no período, $r_{i,t,\omega}$ é a vazão natural na usina e Ω_i é o conjunto de usinas a montante da usina i .

A potência fornecida pela hidrelétrica i , no período t e cenário ω é obtida a partir da energia potencial da água, sendo expressa por:

$$ph_{i,t,\omega} = g \sigma \eta_i h l_{i,t,\omega} q_{i,t,\omega}, \quad (4)$$

onde g é a constante de aceleração da gravidade, σ é a densidade d'água, η_i é o rendimento do grupo turbina gerador da usina, considerado constante, e $h l_{i,t,\omega}$ é a queda líquida da água.

Desprezando-se as perdas $h l_{i,t,\omega}$ é igual à diferença entre a altura a montante, $h v_{i,t,\omega}$, e a altura a jusante da usina, $h q_{i,t,\omega}$:

$$h l_{i,t,\omega} = h v_{i,t,\omega} - h q_{i,t,\omega}. \quad (5)$$

As alturas a montante e a jusante das usinas presentes no sistema elétrico nacional são expressas por polinômios de até quinto grau. Neste artigo, no entanto, utiliza-se a representação por polinômios de grau 1. Assim, a altura a montante da usina é expressa por:

$$h v_{i,t,\omega} = \alpha_{0_i} + \alpha_{1_i} \bar{v}_{i,t,\omega}, \quad (6)$$

onde α_{0_i} e α_{1_i} são constantes pré-calculadas e $\bar{v}_{i,t,\omega}$ é o volume médio do reservatório, ou seja,

$$\bar{v}_{i,t,\omega} = \frac{v_{i,t-1,\omega} + v_{i,t,\omega}}{2}.$$

Por outro lado, a altura a jusante é representada por:

$$h q_{i,t,\omega} = \beta_{0_i} + \beta_{1_i} (q_{i,t,\omega} + u_{i,t,\omega}), \quad (7)$$

sendo β_{0_i}, β_{1_i} constantes pré-calculadas.

Substituindo (5)-(7) em (4), obtém-se a forma final da função de produção da usina:

$$ph_{i,t,\omega} = k_{1_i} q_{i,t,\omega} - k_{2_i} q_{i,t,\omega}^2 + k_{3_i} \bar{v}_{i,t,\omega} q_{i,t,\omega} - k_{4_i} q_{i,t,\omega} u_{i,t,\omega}, \quad (8)$$

sendo $k_{1_i}, k_{2_i}, k_{3_i}$ e k_{4_i} constantes conhecidas.



O despacho das usinas deve também satisfazer o balanço de potência no sistema em cada período t e cenário ω , que é expresso por:

$$\sum_{i=1}^H ph_{i,t,\omega} + pt_{t,\omega} = pd_t, \quad (9)$$

onde pd_t é a demanda do sistema para cada período t . Deve-se observar que pd_t é a mesma em todos os cenários de vazão afluyente, o que significa que a o grau de incerteza com que se conhece a demanda do sistema é considerado pequeno em relação ao grau de incerteza com que são conhecidas as vazões afluyentes nas usinas.

Cada usina possui uma faixa de operação que depende de seus limites operacionais. No despacho de médio prazo são considerados limites nas vazões turbinadas, vazões vertidas, volumes dos reservatórios e potências geradas.

Por fim, para levar em consideração as condições impostas pelo planejamento de longo prazo, impõe-se que os volumes dos reservatórios no último período sejam maiores ou iguais a um valor pré-especificado:

$$v_{i,T,\omega} \geq v_i^{esp}, \quad \forall i, \omega. \quad (10)$$

O problema de despacho é representado em termos das variáveis $q_{i,t,\omega}$, $u_{i,t,\omega}$, $\bar{v}_{i,t,\omega}$ e $pt_{t,\omega}$. Além disso, (1) é usada para reduzir o número de variáveis do problema. Para

$$\begin{aligned} g1_{t,\omega} &= \sum_{i=1}^H (k_{1_i} q_{i,t,\omega} - k_{2_i} q_{i,t,\omega}^2 + k_{3_i} \bar{v}_{i,t,\omega} q_{i,t,\omega} - k_{4_i} q_{i,t,\omega} u_{i,t,\omega}) + pt_{t,\omega}, \\ g2_{i,t,\omega} &= \bar{v}_{i,t,\omega} + \sum_{\tau=1}^{t-1} (q_{i,\tau,\omega} + u_{i,\tau,\omega}) + \frac{1}{2} (q_{i,t,\omega} + u_{i,t,\omega}) - \sum_{\tau=1}^{t-1} \left[\sum_{k \in \Omega_i} (q_{k,\tau,\omega} + u_{k,\tau,\omega}) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k \in \Omega_i} (q_{k,\tau,\omega} + u_{k,\tau,\omega}), \\ g3_{i,t,\omega} &= \bar{v}_{i,t,\omega} + \frac{1}{2} [-q_{i,t,\omega} - u_{i,t,\omega} + \sum_{m \in \Omega_i} (q_{m,t,\omega} + u_{m,t,\omega})], \\ g4_{i,t,\omega} &= k_{1_i} q_{i,t,\omega} - k_{2_i} q_{i,t,\omega}^2 + k_{3_i} \bar{v}_{i,t,\omega} q_{i,t,\omega} - k_{4_i} q_{i,t,\omega} u_{i,t,\omega}, \\ g5_{i,\omega} &= \bar{v}_{i,T,\omega} + \frac{1}{2} [-q_{i,T,\omega} - u_{i,T,\omega} + \sum_{m \in \Omega_i} (q_{m,T,\omega} + u_{m,T,\omega})] + \frac{1}{2} r_{i,T,\omega}, \end{aligned} \quad (11)$$

o problema final é expresso:

$$\begin{aligned} \min f_{ob} &= \sum_{\omega=1}^{N\omega} \pi_{\omega} \sum_{t=1}^T c_2 pt_{t,\omega}^2 + c_1 pt_{t,\omega} + c_0, \\ \text{sujeito a} & \\ & g1_{t,\omega} = pd_t, \\ & g2_{i,t,\omega} = v_{i,0} + \sum_{\tau=1}^{t-1} (r_{i,\tau,\omega}) + \frac{1}{2} r_{i,t,\omega}, \\ & v_i^{\min} - \frac{1}{2} r_{i,t,\omega} \leq g3_{i,t,\omega} \leq v_i^{\max} - \frac{1}{2} r_{i,t,\omega}, \\ & ph_i^{\min} \leq g4_{i,t,\omega} \leq ph_i^{\max}, \\ & g5_{i,\omega} \geq v_i^{esp}, \\ & 0 \leq q_{i,t,\omega} \leq q_i^{\max}, \\ & 0 \leq u_{i,t,\omega} \leq u_i^{\max}, \\ & 0 \leq pt_{t,\omega} \leq pt^{\max}, \end{aligned} \quad (12)$$



para $i = 1, \dots, H$, $t = 1, \dots, T$, $\omega = 1, \dots, N_\omega$ e, além disso, $q_{i,1,\omega}$, $u_{i,1,\omega}$, $\bar{v}_{i,1,\omega}$ e $pt_{1,\omega}$ que satisfazem (1) $\forall i, \omega$. Os superescritos min e max indicam limites mínimos e máximos para as variáveis.

O número de variáveis do problema (12) é igual a $n = (3H + 1)TN_\omega - (HN_\omega - 1)$. Deve-se observar que foi imposto um limite máximo à vazão vertida para possibilitar uma boa aproximação do problema via PSD.

3. Relaxação Semidefinida Baseada em Momentos

Através de uma mudança de variáveis, a PSD representa um problema polinomial em um novo espaço de maior dimensão, sendo expresso em termos de variáveis de elevação. Usando a teoria de momentos, Lasserre demonstra que uma solução otimista para um problema restrito pode ser obtida através de PSD [Lasserre, 2001]. Neste caso, a aproximação via PSD é feita representando-se as restrições do problema através de matrizes de diferentes ordens, que dependem dos graus dos polinômios das restrições.

Considere o problema polinomial expresso em função do vetor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s. a} \quad & g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (13)$$

tendo $f(\mathbf{x})$ grau $2d$ e $g_i(\mathbf{x})$ grau φ_i . A solução ótima desse problema é denominada \mathbf{x}^* .

Uma vez que f possui grau $2d$ e n variáveis, esta função pode ser expressa $f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} f_{\alpha} x^{\alpha}$, sendo f_{α} coeficientes da função e $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, com $\sum_i \alpha_i \leq 2d$.

Seja $\hat{\mathbf{x}} = (1, x_1, \dots, x_n, x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_n^2, \dots, x_n^d)^\top$ o vetor de todos os $\binom{n+d}{d}$ monômios em x_1, \dots, x_n com grau menor ou igual a d . Além disso, seja $\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}^\top$. Observa-se que $f(\mathbf{x})$ pode ser expressa em função dos elementos de $\hat{\mathbf{X}}$. Supondo que $\varphi_i \leq 2d$, o mesmo ocorre com a restrição g_i . Defina o vetor de variáveis de elevação $\mathbf{y} = \{y_{\alpha}\}$ com $y_{0, \dots, 0} = 1$ e $y_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$. O problema PSD é expresso em função de \mathbf{y} .

Seja $\mathbf{M}_d(\mathbf{y})$ a matriz de momentos de ordem d . $\mathbf{M}_d(\mathbf{y})$ é obtida substituindo-se os monômios presentes em $\hat{\mathbf{X}}$ pelos elementos correspondentes de \mathbf{y} . A função objetivo de (13) expressa em termos de \mathbf{y} é escrita como $L_{\mathbf{y}}\{f\} = \sum_{\alpha} f_{\alpha} y_{\alpha}$. Cada restrição $g_i(\mathbf{x})$ é expressa em função de \mathbf{y} via uma matriz de localização. Supondo que a matriz de localização tenha ordem d , para obter a restrição do problema PSD, cada monômio de $g_i(\mathbf{x})$ é multiplicado por $\hat{\mathbf{X}}$ e a matriz resultante é expressa em função de \mathbf{y} . A nova restrição é escrita como $\mathbf{M}_d\{g_i\}\mathbf{y}$.

Uma solução relaxada de (13) pode ser obtida resolvendo-se o seguinte problema PSD [Lasserre, 2001]:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} \quad & \sum_{\alpha} f_{\alpha} y_{\alpha} \\ \text{s. a} \quad & M_{N-\tilde{\varphi}_i}\{(g_i)\mathbf{y}\} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, r, \\ & M_N(\mathbf{y}) \succeq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

sendo $\tilde{\varphi}_i = \lceil \varphi_i/2 \rceil$, $N \geq \lceil d \rceil$ e $N \geq \max_i \tilde{\varphi}_i$.

O valor ótimo da função objetivo do problema (14), f_N^* , será sempre inferior a $f(\mathbf{x}^*)$. No entanto, $f_N^* \rightarrow f(\mathbf{x}^*)$ quando $N \rightarrow \infty$.

4. Problema de Despacho Ótimo de Médio Prazo Relaxado

O problema (12) possui função objetivo de grau 2 e restrições de até grau 2. Portanto, uma solução otimista pode ser obtida para este problema empregando-se relaxação de ordem $N \geq 1$. Neste trabalho, adota-se $N = 1$, o que significa que todas as matrizes de localização são de ordem zero, ou ainda, $\mathbf{M}_0 = [1]$. Assim, sendo g_i uma restrição do problema, a condição $M_{N-\tilde{\varphi}_i}\{(g_i)\mathbf{y}\} \succeq 0$ se simplifica para $\{(g_i)\mathbf{y}\} \geq 0$. Portanto, o problema relaxado tem um conjunto de restrições lineares em \mathbf{y} e somente uma restrição de matricial ($M_1(\mathbf{y}) \succeq 0$).

O vetor de variáveis do problema de despacho ótimo associadas a cada cenário ω é:



$$\mathbf{x}_\omega = [q_{1,1,\omega}, \dots, q_{H,1,\omega}, \dots, q_{1,T,\omega}, \dots, q_{H,T,\omega}, u_{1,1,\omega}, \dots, u_{H,1,\omega}, \dots, u_{1,T,\omega}, \dots, u_{H,T,\omega}, \bar{v}_{1,1,\omega}, \dots, \bar{v}_{H,1,\omega}, \dots, \bar{v}_{1,T,\omega}, \dots, \bar{v}_{H,T,\omega}, pt_{1,\omega}, pt_{2,\omega}, \dots, pt_{T,\omega}]^\top \quad (15)$$

e o vetor completo de variáveis é

$$\hat{\mathbf{x}} = [1, \mathbf{x}_1^\top, \mathbf{x}_2^\top, \dots, \mathbf{x}_{N_\omega}^\top]^\top. \quad (16)$$

Uma solução otimista para (12) é obtida resolvendo-se o seguinte problema PSD:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} \quad & L_{\mathbf{y}}\{f_{ob}\} \\ \text{sujeito a} \quad & \{(g1_{t,\omega} - pd_t)\mathbf{y}\} = 0, \forall t, \omega, \\ & \{(g2_{i,t,\omega} - v_{i,0} - \sum_{\tau=1}^{t-1} (r_{i,\tau,\omega}) - \frac{1}{2}r_{i,t,\omega})\mathbf{y}\} = 0, \forall i, t, \omega, \\ & \{(g3_{i,t,\omega} - v_i^{\min} + \frac{1}{2}r_{i,t,\omega})\mathbf{y}\} \geq 0, \forall i, t, \omega, \\ & \{(v_i^{\max} - \frac{1}{2}r_{i,t,\omega} - g3_{i,t,\omega})\mathbf{y}\} \geq 0, \forall i, t, \omega, \\ & \{(g4_{i,t,\omega} - ph_i^{\min})\mathbf{y}\} \geq 0, \forall i, t, \omega, \\ & \{(ph_i^{\max} - g4_{i,t,\omega})\mathbf{y}\} \geq 0, \forall i, t, \omega, \\ & \{(g5_{i,\omega} - v_i^{sp})\mathbf{y}\} \geq 0, \forall i, \omega, \\ & \{(q_{i,t,\omega} - q_i^{\min})\mathbf{y}\} \geq 0, \forall i, t, \omega, \\ & \{(q_i^{\max} - q_{i,t,\omega})\mathbf{y}\} \geq 0, \forall i, t, \omega, \\ & \{(u_{i,t,\omega} - u_i^{\min})\mathbf{y}\} \geq 0, \forall i, t, \omega, \\ & \{(u_i^{\max} - u_{i,t,\omega})\mathbf{y}\} \geq 0, \forall i, t, \omega, \\ & \{(pt_{t,\omega} - pt_i^{\min})\mathbf{y}\} \geq 0, \forall t, \omega, \\ & \{(pt_i^{\max} - pt_{t,\omega})\mathbf{y}\} \geq 0, \forall t, \omega, \\ & \mathbf{M}_1(\mathbf{y}) \succeq 0, \end{aligned} \quad (17)$$

onde \mathbf{M}_1 é obtida de $\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}^\top$. A solução deste problema é denominada \mathbf{y}^*

O número de variáveis de (17) é igual a $\binom{n+2}{2} - 1$. Portanto, este problema se torna extremamente grande quando o número de usinas hidrelétricas e cenários aumenta.

Um ótimo global de (12) é encontrado se, na solução de (17), $posto(\mathbf{M}_1) = 1$. Se, por outro lado, $posto(\mathbf{M}_1) > 1$, a solução relaxada é otimista para o problema de planejamento [Blekherman et al., 2013]. Uma solução menos otimista pode ser obtida aumentando a ordem da relaxação, o que eleva ainda mais a dimensão do problema PSD.

4.1. Restrições Complementares

A programação semidefinida apresenta a característica de elevar o espaço de solução de um problema. No entanto, ao fazer isso, nem sempre mantém as características físicas do problema. Uma forma de melhorar os resultados obtidos pela PSD é incluir restrições adicionais ao problema relaxado. As restrições adicionais usadas para melhorar a qualidade da solução relaxada são de três tipos: limites nas variáveis de elevação, restrições lineares em termos de variáveis associadas à mesma usina, ao mesmo período e cenário, e restrições lineares em termos de variáveis de usinas e períodos distintos. Essas restrições são indicadas em (18). Deve-se observar que muitas são expressas em termos do parâmetro $\alpha > 0$, que deve ser ajustado de forma empírica para cada sistema teste.



$$\begin{aligned}
 &\text{Para todo } i, t, \omega : \\
 &\{ [q_{i,t,\omega}^2] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [-q_{i,t,\omega}^2 + \alpha(q_i^{\max})^2] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [u_{i,t,\omega}^2] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [-u_{i,t,\omega}^2 + \alpha(u_i^{\max})^2] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [q_{i,t,\omega} u_{i,t,\omega}] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [-q_{i,t,\omega} u_{i,t,\omega} + \alpha q_i^{\max} u_i^{\max}] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [q_{i,t,\omega} \bar{v}_{i,t,\omega}] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [-q_{i,t,\omega} \bar{v}_{i,t,\omega} + \alpha q_i^{\max} v_i^{\max}] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [q_{i,t,\omega} p t_{t,\omega}] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [-q_{i,t,\omega} p t_{t,\omega} + \alpha q_i^{\max} p t^{\max}] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [u_{i,t,\omega} \bar{v}_{i,t,\omega}] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [-u_{i,t,\omega} \bar{v}_{i,t,\omega} + \alpha u_i^{\max} v_i^{\max}] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [u_{i,t,\omega} p t_{t,\omega}] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [-u_{i,t,\omega} p t_{t,\omega} + \alpha u_i^{\max} p t^{\max}] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [\bar{v}_{i,t,\omega}^2 - \alpha(v_i^{\max})^2] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [-\bar{v}_{i,t,\omega}^2 + \alpha(v_i^{\max})^2] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [q_{i,t,\omega} (-q_{i,t,\omega} + q_i^{\max})] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [u_{i,t,\omega} (-u_{i,t,\omega} + u_i^{\max})] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [\bar{v}_{i,t,\omega} (-\bar{v}_{i,t,\omega} + v_i^{\max})] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [p t_{t,\omega} (-p t_{t,\omega} + p t^{\max})] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [(-q_{i,t,\omega} + q_i^{\max})^2] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [(-u_{i,t,\omega} + u_i^{\max})^2] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [\bar{v}_{i,t,\omega} (-g_{v_{i,t,\omega}} + v_i^{\max})] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [q_{i,t,\omega} (-g_{v_{i,t,\omega}} + v_i^{\max})] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [u_{i,t,\omega} (-g_{v_{i,t,\omega}} + v_i^{\max})] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [\bar{v}_{i,t,\omega} (g_{v_{i,t,\omega}} - v_i^{\min})] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [q_{i,t,\omega} (g_{v_{i,t,\omega}} - v_i^{\min})] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [u_{i,t,\omega} (g_{v_{i,t,\omega}} - v_i^{\min})] \mathbf{y} \} \geq 0. \\
 &\text{Para todo } t, \omega : \\
 &\{ [p t_{t,\omega}^2] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [-p t_{t,\omega}^2 + (p t_t^{\max})^2] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [p t_{t,\omega} (-p t_{t,\omega} + p t_t^{\max})] \mathbf{y} \} \geq 0, \\
 &\{ [(-p t_{t,\omega} + p t_t^{\max})^2] \mathbf{y} \} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

4.2. Implementação

Em sistemas onde existem usinas com grandes reservatórios em rios com vazões afluentes elevadas, problemas numéricos pode prejudicar a convergência da PSD. Isso ocorre porque alguns componentes do vetor \mathbf{y} , que correspondem a monômios presentes na função de produção (8), adquirem valores muito elevados. Para solucionar este problema, foi implementado um modelo PSD no qual vazões afluentes, turbinadas e vertidas são representadas em $100hm^3/h$ e os volumes dos reservatórios em $100hm^3$, e não em hm^3/h e hm^3 , como é feito no problema de despacho original. Isso diminuiu a diferença numérica entre os valores das variáveis utilizadas no problema. O re-escalamento das variáveis do problema facilita a convergência do método de pontos interiores, que é empregado na resolução do problema PSD.

Uma vez que a solução do problema PSD é usualmente otimista para (12), uma solução factível precisa ser recuperada a partir de \mathbf{y}^* . A recuperação da solução ótima pode ser encarada como um problema independente, que foi resolvido usando três estratégias diferentes.

A primeira estratégia se baseia no fato que \mathbf{y}^* é sempre factível para as restrições lineares de (12). Assim, os valores ótimos de $\bar{v}_{i,t,\omega}$, $q_{i,t,\omega}$ e $u_{i,t,\omega}$, $\forall i, t, \omega$ são obtidos diretamente de \mathbf{y}^* e são usados para calcular $v_{i,t,\omega}$, a partir das equações de balanço hídrico, e $ph_{i,t,\omega}$, a partir de (8). Por fim, a geração termelétrica é calculada a partir das equações de balanço de potência.

A segunda estratégia é baseada na decomposição espectral de $\mathbf{M}_1(\mathbf{y}^*)$ [Luo et al., 2010]. Uma aproximação de posto r para $\mathbf{M}_1(\mathbf{y}^*)$ pode ser obtida pela expressão:

$$\mathbf{M}_1^r = \sum_{k=1}^r \lambda_j v_j v_j^\top. \tag{19}$$

onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ são autovalores de $\mathbf{M}_1(\mathbf{y}^*)$ e v_1, v_2, \dots, v_r os respectivos autovetores. Portanto, $\mathbf{M}_1^1 = \lambda_1 v_1 v_1^\top$ possui posto igual a 1. Assim, uma estimativa de solução para o problema são componentes da matriz \mathbf{M}_1^1 . Caso essa estimativa, \mathbf{x}^+ , seja factível, ela é um ótimo global do problema (12). Caso contrário, uma solução factível é recuperada a partir de \mathbf{x}^+ resolvendo-se o



seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^+)^2 \\ \text{sujeito a} \quad & \text{restrições de (12)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Na terceira estratégia, o despacho ótimo de geração é também obtido por mínimos desvios quadráticos. No entanto, em (20) utiliza-se como referência os componentes da solução do problema PSD, y^* .

5. Resultados

Resultados foram obtidos para a usina hidrelétrica de Furnas operando isoladamente, um sistema com duas usinas e um sistema com 4 usinas da Região Sudeste do Brasil. A topologia dos sistemas é apresentada na Figura ?? e os dados das usinas nas tabelas 1, 2 e 3. Os perfis de carga dos sistemas são indicados na Figura 1.

Os resultados dos modelos relaxados de PSD foram obtidos utilizando o *solver* SeDuMi (*Self-Dual-Minimization*) [Sturm, 2001]. Para validar os resultados obtidos pela PSD, foi implementado o modelo de despacho ótimo de médio prazo na plataforma GAMS (*General Algebraic Modeling System*) [Rosenthal, 2012]. O GAMS possui um conjunto de *solvers* para diversos tipos de problemas. Neste artigo é utilizado o *solver* CONOPT, que possui convergência local [Drud, 2012]. Toda a implementação foi feita em ambiente MATLAB.

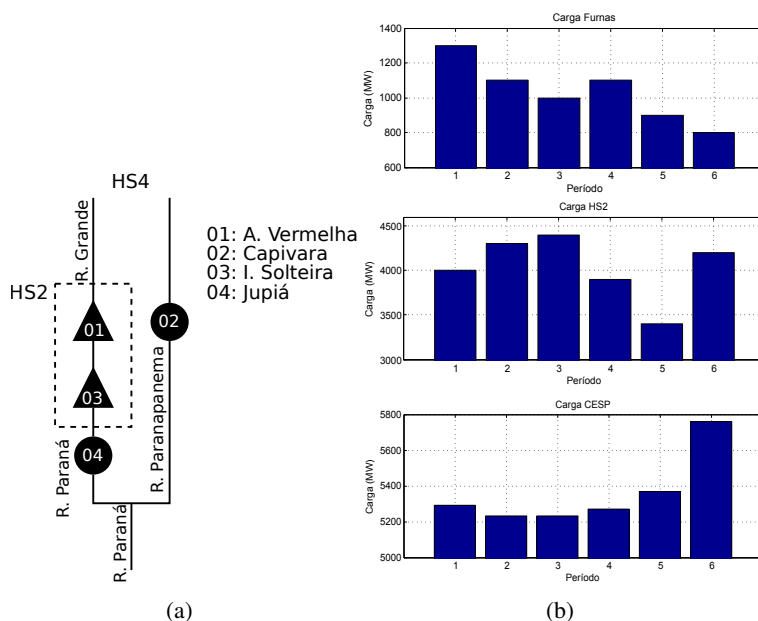


Figura 1: (a) Topologia do Sistema, (b) Perfil de Carga: Furnas, SH2 e HS4

Tabela 1: Dados das Usinas

Usina	q^{\min} (hm^3/h)	q^{\max} (hm^3/h)	v^{\min} (hm^3)	v^{\max} (hm^3)	v^0 (hm^3)	ph^{\min} (MW)	ph^{\max} (MW)
A. Verm.	0	10,519	5856	11025	7000	0	1380
Capiv.	0	6,278	4816	10540	7000	0	640
I. Solt.	0	31,824	8232	21060	12000	0	3240
Jupia	0	27,367	2450	3680	2700	0	1411
Furnas	0	5,4821	5733	22950	22950	0	1272



Tabela 2: Constantes da Funções de Produção

Usina	$(g\sigma\eta)$ ($MW/m \cdot hm^3/h$)	α_0 (m)	α_1 (m/hm^3)	β_0 (m)	β_1 (m/hm^3)
A. Verm.	0,0245	$3,218 \cdot 10^2$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$3,23123 \cdot 10^2$	$-0,1648 \cdot 10^{-5}$
Capiv.	0,0232	$2,5195 \cdot 10^2$	$7,2 \cdot 10^{-3}$	$2,83463 \cdot 10^2$	$0,4710 \cdot 10^{-5}$
I. Solt.	0,0245	$2,9392 \cdot 10^2$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$2,7294 \cdot 10^2$	0
Jupiá.	0,0243	$2,756 \cdot 10^2$	0	$2,54329 \cdot 10^2$	$0,2083 \cdot 10^{-4}$

Tabela 3: Dados - Térmica

Usina	pt^{\max} (MW)	c_0 (\$)	c_1 (\$/MWh)	c_2 (\$/(MW) ² h)
Térmica	máx. pd_t	230	7.48	$1,68 \cdot 10^{-3}$

Os resultados para a usina de Furnas e o sistema HS2 foram obtidos considerando três cenários de vazões afluentes, correspondendo aos anos de 1953 (vazões baixas), 1933 (vazões médias) e 1984 (vazões altas); nas simulações com o sistema HS4 foram usados apenas dois cenários de vazões (baixas e médias) ONS [2017]. O horizonte de planejamento foi dividido em 6 períodos bimestrais, sendo iniciado no mês de maio.

5.1. Impacto das Restrições Adicionais

Os estudos realizados indicaram a importância de se incluir no problema relaxado as restrições adicionais (18). Isso é observado na Figura 2, que indica o despacho ótimo da usina de Furnas. Em (a) são apresentados os valores de despacho obtidos pelo CONOPT, em (b) a solução do problema PSD foi obtida sem a inclusão das restrições (18). Observa-se que tal solução é extremamente otimista no que tange à geração hidrelétrica; em (c) observa-se a redução da geração hidrelétrica quando as restrições adicionais são incluídas no problema PSD, sendo a nova solução relaxada mais próxima da solução do problema original indicada em (a).

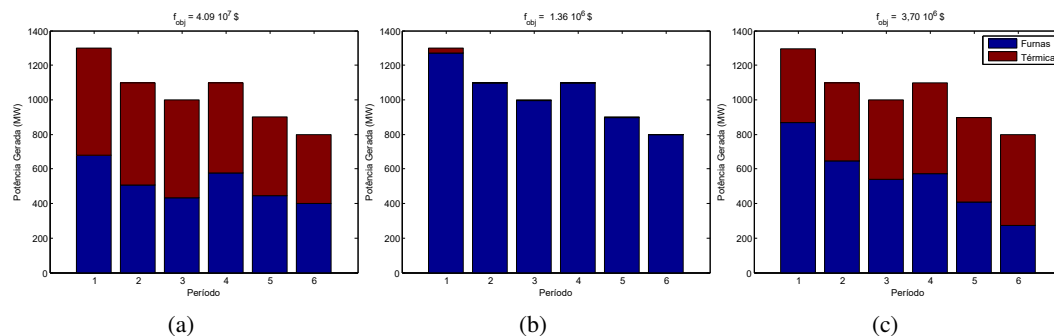


Figura 2: Furnas: (a) CONOPT, (b) Otimista sem restrições adicionais e (c) Otimista com restrições.

5.2. Soluções Relaxadas e Soluções Recuperadas

Na Tabela 4 são indicados os custos esperados das melhores soluções obtidas pelo CONOPT, das soluções relaxadas do modelo PSD original (PSDO), formulado com as variáveis associadas às usinas hidrelétricas expressas em hm^3/h e hm^3 , e do modelo escalonado (PSDE), formulado com variáveis expressas em $100hm^3/h$ e $100hm^3$. As restrições (18) foram incluídas nos modelos. As soluções obtidas por PSD são sempre factíveis para as restrições de balanço hídrico e limites das usinas (restrições lineares) No entanto, ocorrem diferenças entre os valores otimistas das gerações hidrelétrica, $ph_{i,t,\omega}^{otim}$, obtidos usando as componentes de y^* associadas às variáveis do problema original e também os monômios $q_{i,t,\omega}^2$, $q_{i,t,\omega}u_{i,t,\omega}$ e $q_{i,t,\omega}\bar{v}_{i,t,\omega}$, e a geração hidrelétrica, calculada a partir da função não linear (8), que é obtida pela primeira estratégia de recuperação,



$ph_{i,t,\omega}^{Rec1}$. Assim, em cada período t e cenário ω tal diferença é $\Delta p_{t,\omega} = \sum_{i=1}^H [ph_{i,t,\omega}^{otim} - ph_{i,t,\omega}^{Rec1}]$.
Considerando todos os períodos e cenários tem-se um vetor de diferenças, $\Delta \mathbf{p}$.

Tabela 4: Custos Esperados das Soluções Obtidas

Sistema	CONOPT	SDPO		SDPE	
		Custo (\$)	$\ \Delta \mathbf{p}\ _{\infty}$ (MW)	Custo (\$)	$\ \Delta \mathbf{p}\ _{\infty}$ (MW)
Furnas	$4,14 \cdot 10^7$	$3,70 \cdot 10^7$	0,72	$3,73 \cdot 10^7$	0,75
HS2	$9,22 \cdot 10^7$	$6,06 \cdot 10^7$	1027	$6,43 \cdot 10^7$	1035
HS4	$1,06 \cdot 10^8$	$5,60 \cdot 10^7$	1269	$6,65 \cdot 10^7$	1268

Analisando os resultados da Tabela 4 observa-se que, à medida que o número de usinas aumenta, aumentam as diferenças entre os custos das soluções obtidas pelo CONOPT e os custos das soluções relaxadas. Além disso aumentam os valores de $\Delta p_{t,\omega}$. Nota-se também que o re-escalonamento das variáveis fez com que as soluções otimizadas tenham custos esperados mais próximos dos custos das soluções obtidas pelo CONOPT, embora os valores de $\|\Delta \mathbf{p}\|_{\infty}$ sejam maiores nesse caso.

Em todos os casos simulados há necessidade de recuperar as soluções ótimas do problema de despacho a partir das soluções otimizadas. A Tabela 5 indica os custos esperados das soluções ótimas recuperadas para os sistemas teste através das três estratégias propostas, Rec.1, Rec.2 e Rec.3. Observa-se que em todos os casos a primeira estratégia obteve os melhores resultados.

Tabela 5: Custos Totais das Soluções Recuperadas

Sistema	Custos (\$) - SDPO			Custos (\$) - SDPE		
	Rec.1	Rec.2	Rec.3	Rec.1	Rec.2	Rec.3
Furnas	$4,10 \cdot 10^7$	$5,03 \cdot 10^7$	$4,90 \cdot 10^7$	$4,11 \cdot 10^7$	$6,13 \cdot 10^7$	$4,95 \cdot 10^7$
HS2	$1,12 \cdot 10^8$	$1,28 \cdot 10^8$	$1,20 \cdot 10^8$	$1,16 \cdot 10^8$	$1,86 \cdot 10^8$	$1,23 \cdot 10^8$
HS4	$1,36 \cdot 10^8$	$1,42 \cdot 10^8$	$1,32 \cdot 10^8$	$1,43 \cdot 10^8$	$2,02 \cdot 10^8$	$1,54 \cdot 10^8$

6. Análise dos Resultados Obtidos para o Sistema HS4

Os valores esperados das vazões turbinadas, vazões vertidas e volumes dos reservatórios no período de planejamento obtidos pelo CONOPT são indicados na Figura 3(a). Pode-se observar que as usinas com reservatório operam com armazenamento máximo em quase todos os períodos e que somente há vertimento na usina de Jupia. Na Figura 3(b) são indicados os valores obtidos pelo modelo SDPE, que são factíveis para todas as restrições lineares do problema (12). Nota-se que, na solução do modelo SDPE, as vazões turbinadas por Água Vermelha, Capivara e Ilha Solteira são menores do que as obtidas pelo CONOPT. Além disso, há vertimento em Ilha Solteira e variações nos volumes de água armazenada nos reservatórios durante o período de planejamento. As soluções obtidas são, portanto, muito distintas.

Na Figura 4(a) são indicados os valores esperados das potências geradas obtidos pelo CONOPT. Pode-se notar que, no períodos 3 e 4, com cargas mais baixas (Figura 1), as hidrelétricas geram menos do que nos demais períodos. Na Figura 4(b) são indicados os valores otimizadas das potências geradas, obtidos na solução do modelo SDPE. Nessa solução observa-se claramente a elevada geração de Capivara, uma maior geração de Água Vermelha e, conseqüentemente uma menor geração térmica. É interessante notar que, apesar de se ter maiores gerações em Capivara e Água Vermelha, elas não são acompanhadas de maiores vazões turbinadas (Figura 3(b)). Este fato indica que a solução do modelo SDPE é otimista. Por fim, na Figura 4(c) são representados os valores esperados de geração na solução recuperada. Nessa solução, as potências geradas por Capivara e

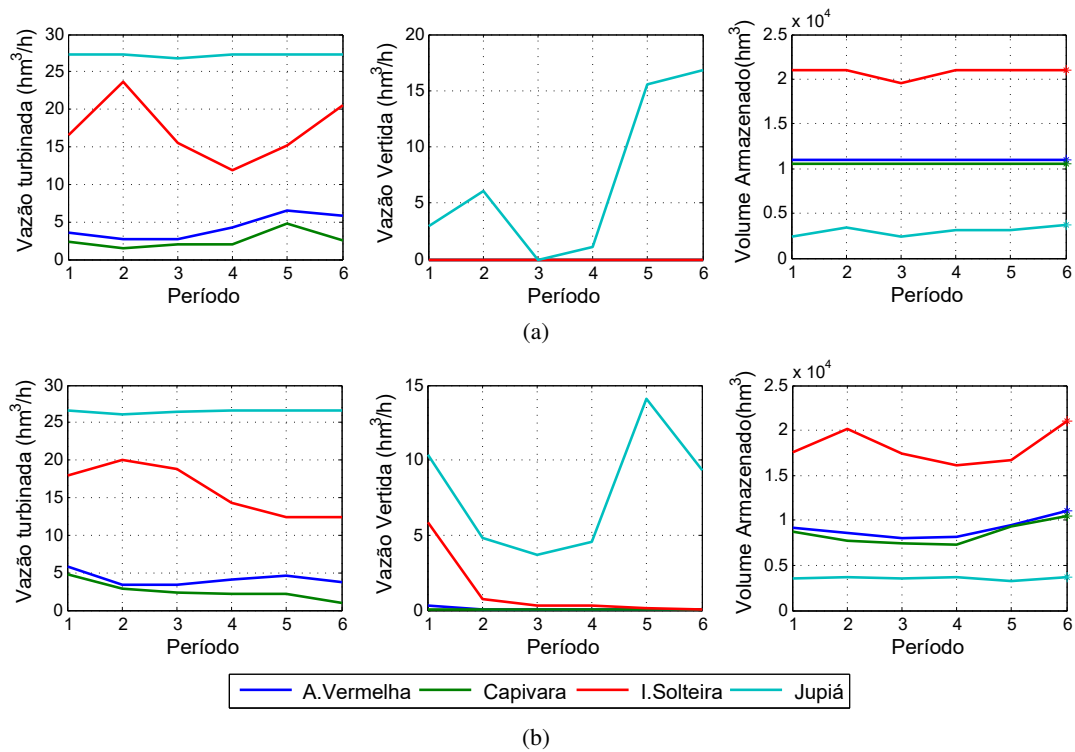


Figura 3: Vazões Turbinadas e Vertidas e Volumes Armazenados: (a) CONOPT, (b) SDPE Rec. 1

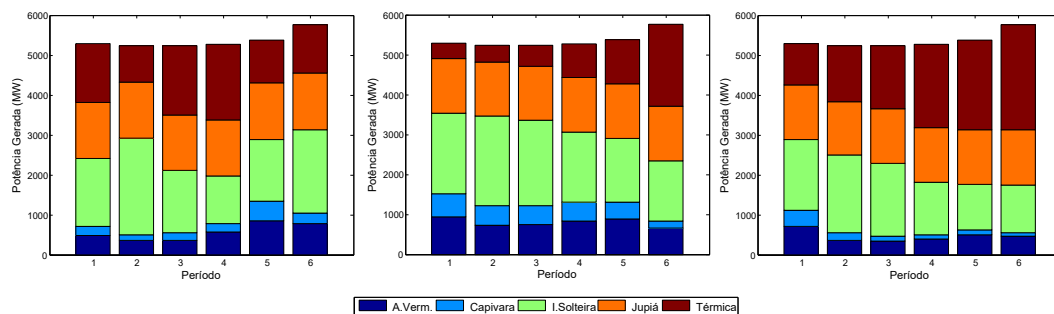


Figura 4: Geração: (a) CONOPT, (b) SDPS Otimista, (c) SDPS Rec. 1

Água Vermelha são inferiores às que aparecem na solução otimista, o que leva ao aumento da geração térmica. Na solução recuperada a participação da usina térmica é menor nos períodos de carga mais baixa e maior nos períodos de carga elevada, ou seja, a solução recuperada não “modula” a produção das usinas hidrelétricas de forma a minimizar a geração térmica. Consequentemente, o custo esperado da solução recuperada (Tabela 5) é maior do que o custo da solução obtida pelo CONOPT (Tabela 4).

7. Conclusão

A PSD sempre obtém soluções otimistas, o que significa que soluções factíveis para o espaço original devem ser recuperadas. A utilização de matrizes de momento e localização de ordens maiores tende a melhorar a qualidade destas soluções obtidas. No entanto, o esforço computacional se torna proibitivo, mesmo para sistemas pequenos. Assim, considerando as limitações da relaxação de ordem 1 utilizada neste artigo, a forma encontrada para melhorar a solução foi introduzir restrições adicionais ao problema com o objetivo de limitar o valor dos monômios e ainda utilizar técnicas de escalonamento para diminuir o erro numérico causado pelo desbalanço nas magnitu-



des das variáveis. Embora essas técnicas tenham auxiliado na obtenção de soluções relaxadas mais próximas do ótimo global do problema, há ainda a necessidade de recuperação da solução relaxada para que atenda as restrições no espaço original do problema. Três formas de recuperação foram testadas, no entanto, devem ser exploradas novas técnicas que permitam a obtenção de melhores soluções factíveis. Embora a PSD tenha sido aplicada com sucesso a sistemas de pequeno porte, sua aplicação a sistemas maiores depende do uso de técnicas de esparsidade.

Referências

- Blekherman, G., Parrilo, P. A., e Thomas, R. R. (2013). *Semidefinite optimization and convex algebraic geometry*, volume 13. Siam.
- Drud, A. (2012). Conopt tutorial. URL [\url{http://www.gams.com/dd/docs/solvers/conopt.pdf}](http://www.gams.com/dd/docs/solvers/conopt.pdf).
- Fampa, M. H., Melo, W. A., e Maculan, N. (2013). Semidefinite relaxation for linear programs with equilibrium constraints. *International Transactions in Operational Research*, 20(2):201–212.
- Fuentes-Loyola, R. e Quintana, V. H. (2003). Medium-term hydrothermal coordination by semidefinite programming. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 18(4):1515–1522.
- Lasserre, J. B. (2001). Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM*, 11:796–817.
- Luo, Z.-Q., Ma, W.-K., So, A.-C., Ye, Y., e Zhang, S. (2010). Semidefinite relaxation of quadratic optimization problems. *IEEE Signal Processing Magazine*, 27(3):20–34. ISSN 1053-5888.
- Madrigal, M. e Quintana, V. H. (1999). Semidefinite programming relaxations for $\{0, 1\}$ -power dispatch problems. In *Power Engineering Society Summer Meeting, 1999. IEEE*, volume 2, p. 697–702. IEEE.
- Molzahn, D. K. e Hiskens, I. A. (2014). Sparsity-exploiting moment-based relaxations of the optimal power flow problem. *IEEE Transactions on Power Systems*.
- ONS (2017). OPERADOR NACIONAL DO SISTEMA ELÉTRICO - Séries Históricas de Vazões. URL [\url{http://www.ons.org.br/operacao/vazoes_naturais.aspx}](http://www.ons.org.br/operacao/vazoes_naturais.aspx).
- Paredes, M., Martins, L. A., e Soares, S. (2015). Using semidefinite relaxation to solve the day-ahead hydro unit commitment problem. *IEEE Transactions on Power Systems*.
- Rosenthal, R. E. (2012). GAMS - A User's Guide. URL [\url{http://www.gams.com/dd/docs/bigdocs/GAMSUsersGuide.pdf}](http://www.gams.com/dd/docs/bigdocs/GAMSUsersGuide.pdf).
- Sherali, H. D. e Tuncbilek, C. H. (1995). A reformulation-convexification approach for solving nonconvex quadratic programming problems. *Journal of Global Optimization*, 7(1):1–31. ISSN 1573-2916. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01100203>.
- Sturm, J. F. (2001). Sedumi. URL <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- Waki, H., Kim, S., Kojima, M., e Muramatsu, M. (2006). Sums of squares and semidefinite program relaxations for polynomial optimization problems with structured sparsity. *SIAM Journal on Optimization*, 17(1):218–242.
- Zhu, H. e Giannakis, G. (2011). Estimating the state of ac power systems using semidefinite programming. In *North American Power Symposium (NAPS), 2011*, p. 1–7. IEEE.
- Zhu, Y., Jian, J., Wu, J., e Yang, L. (2013). Global optimization of non-convex hydro-thermal coordination based on semidefinite programming. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 28(4): 3720–3728.